



PHYSICS
LIBRARY

WITHDRAWN







Digitized by the Internet Archive
in 2025

Artur Schoenflies

Theorie der Kristallstruktur

Theorie der Kristallstruktur

ein Lehrbuch

von

Dr. Artur Schoenflies

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt

Mit 257 in den Text gedruckten Figuren

Berlin

Verlag von Gebrüder Borntraeger

W 35 Schöneberger Ufer 12a

1923

QD911

S42

Physics
dept

Alle Rechte,
insbesondere das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Copyright 1923, by Gebrüder Borntraeger in Berlin

Physics dept

Vorwort

Seit dem Erscheinen der Schrift „Kristallsysteme und Kristallstruktur“ sind 32 Jahre verflossen. Sie war nach Entstehung und Zweckbestimmung in erster Linie ein mathematisches Buch, das die Notwendigkeit und den Nutzen mathematischer Deduktionen im Gebiet des kristallographischen Denkens ins Licht setzen sollte. Die naturwissenschaftliche Welt brachte seinem Inhalt damals höchstens ein platonisches Interesse entgegen. Inzwischen hat die Vorstellung, daß die Eigenart der Kristallsubstanz in der Regelmäßigkeit einer atomistischen Anordnung zu erblicken ist, den Rang einer starken und erfolgreichen Arbeitshypothese erworben, die wissenschaftliches Gemeingut geworden ist. Eine für Physiker und Kristallographen gut lesbare Neubearbeitung ist daher allmählich ein Bedürfnis geworden. Mehr und mehr wurde dem Verfasser nahegelegt, diesem Bedürfnis zu entsprechen; der so an ihn herantretenden wissenschaftlichen Verpflichtung konnte er sich nicht entziehen.

Dies zur Begründung, daß trotz des Druckes der Zeit und trotz der Nöte der wissenschaftlichen Betätigung eine Neubearbeitung der Strukturtheorie in die naturwissenschaftliche Welt hinausgeht. Sie trägt aber dem Gebot der Zeit insofern Rechnung, als sie sich auf das durchaus Notwendige beschränkt; was an anderer leicht erreichbarer Stelle vorhanden ist, wie z. B. die rechnerische Ermittlung der Struktur der einzelnen Kristalle, ist außerhalb des Rahmens des Werkes geblieben. Sein Inhalt ist wesentlich den Darlegungen gewidmet, die aus der Grundhypothese mittels exakter mathematischer Schlußfolgerungen die 230 Gruppen erstehen lassen; gemäß einigen von kristallographischer Seite geäußerten Wünschen schließen sich einige Ausblicke auf die Fedorowschen Paralleloeder und die Kugelpackungen dieser Darlegung an.

Die Darstellung hat eine völlig neue und, wie der Verfasser hofft, zugleich vereinfachte Form erhalten; die bestmögliche Befriedigung der kristallographischen Bedürfnisse bildet ihren leitenden Gesichtspunkt. Tiefere mathematische Kenntnisse werden nirgends vorausgesetzt. Die Methode ist, wie es dem geometrischen Denken und Vorstellen der Kristallographen entspricht, in erster Linie eine gestaltlich anschauliche; eine Fülle möglichst zweckmäßiger Figuren soll das Verständnis erleichtern. So ist zu hoffen, daß die Lesbarkeit eine wesentlich leichtere sein wird, als in der ersten Bearbeitung. Eine ausführlichere mathematische Entwicklung enthält nur das elfte Kapitel, das aus der Grundhypothese das Gitterhafte des Aufbaues ableitet. Sein Resultat entspricht der kristallographischen Intuition; so würde es ohne Schaden für das Ganze sein, wenn die Einzelheiten des Beweises nicht zur vollen Kenntnis des Lesers gelangen¹⁾.

Dem Verlag, der von vornherein den wissenschaftlichen Bedürfnissen, sowie auch den Wünschen des Verfassers, warmherzig entgegengekommen ist, sage ich meinen besonderen Dank; ebenso allen denen, die meine Arbeit sachlich unterstützt haben, zumal dem Herrn Kollegen W. Eitel.

Die Figuren sind nach meinen Skizzen von dem Studenten der Technischen Wissenschaften, Herrn W. Conrad, gezeichnet worden; auch ihm sage ich für seine höchst wertvolle Hilfe an dieser Stelle nochmals den besten Dank. Einzelne Versehen, die erst nachträglich bemerkt wurden, sind in den Anmerkungen beglichen worden.

Frankfurt, Ostern 1923

A. Schoenflies

¹⁾ Ein einfacher (nachgelassener) Beweis des Hauptsatzes von K. Rohn wird voraussichtlich in den Berichten der Sächs. Ges. der Wiss. demnächst erscheinen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Kap. I. Bewegungen und Umlegungen	
§ 1. Einfachste Typen der Bewegungen	3
§ 2. Einfachste Operationen zweiter Art (Umlegungen)	5
§ 3. Zusammengesetzte Operationen	8
Kap. II. Das Rechnen mit Operationen	
§ 1. Potenzen von Drehungen	9
§ 2. Die Identität	11
§ 3. Der Produktbegriff	12
§ 4. Beispiele und Einzelsätze	14
§ 5. Vertauschbare Operationen	19
§ 6. Die Potenzen der Drehspiegelungen	22
§ 7. Die Potenzen von Schraubung und Gleitspiegelung	24
Kap. III. Die einfachsten Typen der Operationen	
Vorbemerkung	25
§ 1 und 2. Zusammensetzung von Drehungen um parallele Achsen	26
§ 3. Drehungen, deren Achsen sich schneiden	31
§ 4. Der Eulersche Satz	34
§ 5. Die drei typischen Formen der Bewegungen	35
§ 6. Die typischen Formen der Operationen zweiter Art	36
Kap. IV. Hilfssätze über Operationen erster und zweiter Art	
§ 1. Produkte von Operationen erster Art mit Translationen	39
§ 2. Produkte von Schraubungen	41
§ 3. Ein Beispiel	42
§ 4. Produkte von Translationen und Operationen zweiter Art	43
§ 5. Isomorphe Operationen	45
Kap. V. Der Gruppenbegriff und die Kristallklassen mit bloßer Achsensymmetrie	
Vorbemerkung	47
§ 1. Symmetriecharakter und Deckoperationen	47
§ 2. Das mathematische Grundtheorem	48

	Seite
§ 3. Die Abhängigkeit der einzelnen Symmetrieeigenschaften voneinander	50
§ 4. Der Gruppenbegriff	52
§ 5. Die zyklischen Gruppen und die Diëdergruppen	55
§ 6. Tetraedergruppe und Oktaedergruppe	57
§ 7. Die transformierte Drehung	60
§ 8. Ein allgemeiner Satz über Drehungsgruppen	63
§ 9. Aufzählung aller Gattungen endlicher Drehungsgruppen	66
§ 10. Tabelle der kristallographischen Drehungsgruppen	69

Kap. VI. Die Gruppen und Kristallklassen zweiter Art

Vorbemerkung	71
§ 1. Die Gruppen zweiter Art mit einer Symmetrieachse	71
§ 2. Allgemeine Sätze über die Gruppen zweiter Art	75
§ 3. Transformierte Operationen zweiter Art	78
§ 4. Die Erzeugung der Gruppen zweiter Art	79
§ 5. Die zyklischen Gruppen und die Diëdergruppen zweiter Art	82
§ 6. Tetraedergruppen zweiter Art	86
§ 7. Die Oktaedergruppe zweiter Art	87
§ 8. Tabelle der Gruppen zweiter Art	89
§ 9. Die Kristallsysteme und ihre Unterabteilungen	91

Kap. VII. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte

§ 1. Problemstellung und Formeln für die Lösung	92
§ 2. Das triklin und monokline System	96
§ 3. Das rhombische System	97
§ 4. Das rhomboedrische System	97
§ 5. Das tetragonale System	99
§ 6. Das hexagonale System	101
§ 7. Das kubische System	103

Kap. VIII. Punktreihen, Punktnetze, Punktgitter

§ 1. Die regelmäßigen Punktreihen	105
§ 2. Das Punktnetz	109
§ 3. Die geometrische Addition der Translationen	113
§ 4. Die Translationengruppe des Punktnetzes	115
§ 5. Die Punktgitter	118
§ 6. Die Translationengruppe des Punktgitters	121
§ 7. Systeme primitiver Translationen	125
§ 8. Eigenschaften primitiver Paare und Tripel	128
§ 9. Invarianter Inhalt der primitiven Parallelogramme und Parallelepipede	135
§ 10. Zentrierte Netze und Gitter	138

Kap. IX. Symmetrische Punktnetze und Punktgitter

§ 1.	Allgemeine Sätze über symmetrische Punktnetze	144
§ 2.	Die vier Typen symmetrischer Punktnetze	147
§ 3.	Die Achsenschaaren der Punktnetze	151
§ 4.	Allgemeine Sätze über symmetrische Punktgitter	155
§ 5.	Symmetrische Gitter vom monoklinen Typus	158
§ 6.	Die Gitter vom rhombischen Typus	162
§ 7.	Die Gitter vom rhomboedrischen und hexagonalen Typus	166
§ 8.	Die Gitter vom tetragonalen Typus	170
§ 9.	Die Gitter vom kubischen Typus	172
§ 10.	Ein Satz über die Symmetrieachsen und Symmetrieebenen der Punktgitter	174
§ 11.	Anlage und Bezeichnung der Figuren	174
§ 12.	Die Achsen und Symmetrieebenen für die monoklinen und rhombischen Gitter	176
§ 13.	Die Achsen und Symmetrieebenen der tetragonalen und hexagonalen Gitter	184
§ 14.	Die Achsen und Symmetrieebenen des rhomboedrischen Gitters	190
§ 15.	Die Achsen und Symmetrieebenen der kubischen Gitter	194
§ 16.	Tabelle der Gittersymmetrie	200

Kap. X. Die Strukturtheorien und die mathematische Problemstellung

§ 1.	Die historische Entwicklung	204
§ 2.	Die Bravais'sche Theorie	206
§ 3.	Mathematische Erörterung der Bravais'schen Theorie	208
§ 4.	Die Weiterentwicklung des Strukturbildes	211
§ 5.	Gruppentheoretische Folgerungen und Probleme	213
§ 6.	Die kristallographischen Grundgesetze	215

Kap. XI. Nachweis der kristallographischen Grundgesetze

Vorbemerkung	218
§ 1. Allgemeine transformierte Operationen	218
§ 2. Isomorphe Gruppen	223
§ 3. Eine Raumgruppe besonderer Art	223
§ 4. Beweis einiger Hilfssätze	227
§ 5. Unmöglichkeit irrationaler Drehungswinkel	230
§ 6. Die in den Raumgruppen enthaltenen Translationengruppen	236
§ 7. Symmetriegesetz und Gesetz der rationalen Indizes	238

Kap. XII. Allgemeine Sätze über Raumgruppen

Vorbemerkung	240
§ 1. Isomorphie zwischen Punktgruppen und Raumgruppen	240
§ 2. Reduzierte Operationen	243

	Seite
§ 3. Sätze über die Erzeugung der Raumgruppen	245
§ 4. Die Raumgruppen vom zyklischen Typus	248
§ 5. Der Hauptsatz über die Erzeugung der Raumgruppen erster Art	251
§ 6. Erzeugung der Raumgruppen zweiter Art	254
§ 7. Identität verschiedenartig erzeugter Gruppen	256
§ 8. Raumgruppe und regelmäßige Anordnung (Struktur) . . .	257
§ 9. Parallelepipeder Aufbau der Strukturen	259
§ 10. Einordnung der Bravais'schen Strukturen in die allgemeine Theorie	260
§ 11. Strukturen mit symmetrischen Bausteinen	263
§ 12. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte	267

Kap. XIII. Die Raumgruppen vom triklinen und monoklinen Typus

§ 1. Vorbemerkungen, Figuren, Bezeichnungen	270
§ 2. Die Gruppen vom triklinen Typus	272
§ 3. Allgemeine Bemerkungen über die Gruppen vom monoklinen Typus	275
§ 4. Die Gruppen der Symmetrie $C_1^h = S_1$	276
§ 5. Die Gruppen der Symmetrie C_2	279
§ 6. Die Gruppen der Symmetrie C_2^h	280
§ 7. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte	284
§ 8. Die Eigensymmetrie der Bausteine	287

Kap. XIV. Die Raumgruppen vom rhombischen Typus

§ 1. Vorbemerkungen	293
§ 2. Hilfssätze und Hilfsformeln	295
§ 3. Die Gruppen der Symmetrie C_2^v mit dem Gitter Γ_v . . .	300
§ 4. Die Gruppen der Symmetrie C_2^v mit dem Gitter $\Gamma_{v'}$. . .	304
§ 5. Die Gruppen der Symmetrie C_2^v mit den Gittern $\Gamma_{v''}$ und $\Gamma_{v'''}$	309
§ 6. Allgemeines über die Gruppen der Symmetrie V	312
§ 7. Die Gruppen der Symmetrie V mit den Gittern Γ_v und $\Gamma_{v'}$	316
§ 8. Die Gruppen der Symmetrie V mit den Gittern $\Gamma_{v''}$ und $\Gamma_{v'''}$	320
§ 9. Allgemeine Bemerkungen über die Gruppen der Symmetrie V^h	322
§ 10. Die Gruppen der Symmetrie V^h mit dem Gitter Γ_v . . .	325
§ 11. Die Gruppen der Symmetrie V^h mit dem Gitter $\Gamma_{v'}$. . .	329
§ 12. Die Gruppen der Symmetrie V^h mit den Gittern $\Gamma_{v''}$ und $\Gamma_{v'''}$	331
§ 13. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte	335
§ 14. Die Eigensymmetrie der Bausteine	340

Kap. XV. Die Raumgruppen vom rhomboedrischen Typus

§ 1. Vorbemerkungen	348
§ 2. Die Gruppen der Symmetrie C_3	350
§ 3. Die Gruppen der Symmetrie C_3^i	353
§ 4. Die Gruppen der Symmetrie C_3^v	354

§ 5.	Die Gruppen der Symmetrie D_3	357
§ 6.	Die Gruppen der Symmetrie D_3^d	363
§ 7.	Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte	365
§ 8.	Die Eigensymmetrie der Bausteine	366

Kap. XVI. Die Raumgruppen vom tetragonalen Typus

§ 1.	Vorbemerkungen und Hilfsformeln	372
§ 2.	Die Gruppen der Symmetrie S_4	378
§ 3.	Die Gruppen der Symmetrie C_4	379
§ 4.	Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie C_4^v	381
§ 5.	Die Gruppen der Symmetrie C_4^v	383
§ 6.	Die Gruppen der Symmetrie C_4^h	387
§ 7.	Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie V^d	390
§ 8.	Die Gruppen der Symmetrie V^d	393
§ 9.	Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie D_4	399
§ 10.	Die Gruppen der Symmetrie D_4	402
§ 11.	Die Gruppen der Symmetrie D_4^h	410
§ 12.	Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte	415
§ 13.	Die Eigensymmetrie der Bausteine	422

Kap. XVII. Die Raumgruppen vom hexagonalen Typus

§ 1.	Vorbemerkungen	441
§ 2.	Die Gruppen der Symmetrie C_6^h	442
§ 3.	Die Gruppen der Symmetrie D_6^h	443
§ 4.	Die Gruppen der Symmetrie C_6	444
§ 5.	Die Gruppen der Symmetrie C_6^v	446
§ 6.	Die Gruppen der Symmetrie C_6^h	448
§ 7.	Die Gruppen der Symmetrie D_6	449
§ 8.	Die Gruppen der Symmetrie D_6^h	452
§ 9.	Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte	454
§ 10.	Die Eigensymmetrie der Bausteine	456

Kap. XVIII. Die Raumgruppen vom kubischen Typus

§ 1.	Vorbemerkungen	461
§ 2.	Die Gruppen der Symmetrie T	463
§ 3.	Die Gruppen der Symmetrie T^h	466
§ 4.	Die Gruppen der Symmetrie T^d	468
§ 5.	Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie O	471
§ 6.	Die Gruppen der Symmetrie O	473
§ 7.	Die Gruppen der Symmetrie O^h	479
§ 8.	Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte	483
§ 9.	Die Eigensymmetrie der Bausteine	487

Kap. XIX. Raumteilung und Kugelpackung

§ 1.	Der Fundamentalbereich eines Punktnetzes	501
§ 2.	Beispiele von Fundamentalbereichen der Gitter	504
§ 3.	Die Paralleloeder	505
§ 4.	Die verschiedenen Paralleloedertypen	510
§ 5.	Die Fundamentalbereiche der allgemeinsten regelmäßigen Strukturen	513
§ 6.	Gitterhafte Kugelpackungen	516
§ 7.	Allgemeinere Kugelpackungen	518

Kap. XX. Anwendungen und Beispiele

§ 1.	Allgemeine Gesichtspunkte	522
§ 2.	Gleichwertige Punktlagen	523
§ 3.	Gleichwertige Punkte bei den rhombischen Gruppen.	525
§ 4.	Gleichwertige Punkte bei den tetragonalen Gruppen	526
§ 5.	Gleichwertige Punkte bei rhomboedrischen und hexagonalen Gruppen	530
§ 6.	Gleichwertige Punkte bei den kubischen Gruppen.	531
§ 7.	Beispiele einzelner Strukturen	534
§ 8.	Die Deutung des Strukturbildes	542
§ 9.	Bedeutung und Nutzung der Tabellen	545
§ 10.	Schlußwort	551

Einleitung

Die mathematische Theorie der Kristallstruktur will die geometrischen Gesetze der Kristallsubstanz auf Grund einer *einzigsten fundamentalen Hypothese* ableiten. Die Hypothese besagt, daß die Schwerpunkte der Kristallbausteine, also der Atome, regelmäßig im Raum angeordnet sind. Die Regelmäßigkeit soll darin bestehen, daß um jedes Atom oder jeden Atomkomplex herum die Lagerung aller übrigen die gleiche ist. Die Einfachheit der Annahme ist kaum einer Steigerung fähig.

Die Prüfung und Ausschöpfung dieser Hypothese bildet den Inhalt des vorliegenden Werkes. Die Prüfung muß mit dem Nachweis enden, daß die kristallographischen Grundgesetze (das Symmetriegesetz und das Gesetz der rationalen Indizes) mit der Hypothese im Einklang stehen; sie werden sich als notwendige Folgerungen aus ihr herausstellen. Insbesondere wird sie genau zu den 32 möglichen Klassen führen, in die wir die Kristalle nach ihrer Symmetrie zu scheiden gelernt haben.

Die Ausschöpfung muß das Ziel verfolgen, alle an sich möglichen Strukturen abzuleiten, und sie nach ihrer kristallographischen Eigenart zu ordnen und zu kennzeichnen. Es wird sich zeigen, daß wir 230 Strukturen zu unterscheiden haben.

Es darf nicht wundernehmen, daß ein so umfangreicher Stoff eine umfangreichere Darstellung beansprucht. Dem Mathematiker liegt jederzeit die Verpflichtung ob, seine Resultate in bindender Form zu erweisen und darzustellen. Dazu kommen in diesem Fall noch zwei andere zwingende Gründe, ein äußerer

und ein innerer. Der äußere ist der, daß die methodischen Hilfsmittel, die das Gebäude stützen, dem Kristallographen und Physiker im wesentlichen fremd sind; sie bedürfen daher einer eingehenden, vorbereitenden Erörterung. Der andere Grund ist ein ganz anderer. Seit 10 Jahren ist in der naturwissenschaftlichen Wertung der Strukturtheorien ein grundlegender Wechsel eingetreten. Bis dahin mußten sie sich damit bescheiden, eine ebenso vollkommene wie reizvolle Lösung eines einfach gestellten mathematischen Problems zu sein; sie gaben ein Bild von einer gewissen Wahrscheinlichkeit, ohne jedes Hemmnis in der Welt der Erscheinungen, aber auch ohne die entscheidende innere Beglaubigung. Ein Beleg für die Kraft des menschlichen Intellekts, in nie versagender Fülle Bilder zu ersinnen, die uns das Verständnis der Naturerscheinungen und ihrer Gesetzmäßigkeit nahelegen; aber dem Naturgeschehen gegenüber ohne die zwingenden Ansprüche, die wir fordern.

Die Strukturtheorien danken es dem Erfindungsgeist und dem Scharfsinn des Herrn v. Laue, wenn es jetzt anders geworden ist. Er hat unserem inneren Auge sozusagen ein geistiges Mikroskop beschert, das uns gestattet, zwischen den Atomen hindurchzublicken und das Geheimnis ihrer verschlungenen Anordnung zu entschleiern; es zeigte uns eine volle Bestätigung der Hypothese. So dürfen wir jetzt in der regelmäßigen Anordnung der Kristallbausteine eines der am besten beglaubigten Bilder erblicken. Um so notwendiger ist seine vollständige mathematische Erkenntnis und Beherrschung. Um so höher die oben genannte mathematische Verpflichtung. Ein geometrisches Bild kann aber nur dann vollständig verstanden und beherrscht werden, wenn es auch anschaulich erfaßt wird. Auch dem, so gut es möglich war, zu genügen, ist die Aufgabe, die ich mir gestellt habe. Vielleicht kommt die Darstellung deshalb den gewohnten Denkweisen des Kristallographen nicht immer völlig entgegen — aber geometrische Gestalten und Bilder können nur durch geometrisches Schauen erkannt werden.

Kap. I. Bewegungen und Umlegungen

(Operationen erster und zweiter Art)

§ 1. **Einfachste Typen der Bewegungen.** Soll ein Körper S aus einer Anfangslage S_1 in eine Endlage S_2 gebracht werden¹⁾, so kann dies auf sehr mannigfache Art geschehen. Für den hier vorliegenden Zweck kommt es aber auf den Weg, den ein Körper beschreibt, um aus der Lage S_1 in die Lage S_2 zu gelangen, nicht an. Alle Bewegungen, die diesen Übergang vermitteln, betrachten wir daher als *äquivalente* Bewegungen. Von ihnen wird stets die *einfachste* ins Auge gefaßt werden. Als einfachste Bewegungen sind uns erfahrungsgemäß die *Translation* (Schiebung, Gleitung), die *Drehung* (Rotation) und die *Schraubung* bekannt. Wir werden später zeigen (Kap. III), daß *jede* Bewegung einer dieser drei einfachen Bewegungsformen im obigen Sinn äquivalent ist.

Wird ein Körper S einer *Translation* unterworfen, so beschreiben alle seine Punkte gleich lange und gleichgerichtete Wege, die Translation ist daher durch den Weg eines *einzigsten* Punktes bestimmt. Ist A dieser Punkt, so stellt die Strecke $A_1 A_2$ die Translation dar, und zwar ist $A_1 A_2$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung, also ein *Vektor*. Die allgemeine Bezeichnung für eine Translation soll $\mathfrak{T}$ sein. Ein Körper, der einer Translation unterworfen wird, befindet sich in Anfangslage und Endlage in *paralleler Stellung*.

Eine *Drehung* ist gekettet an eine Achse a ; ihre Größe ist durch den Drehungswinkel ω bestimmt. Lassen wir nicht eine Drehung um ω , sondern eine Drehung um $\omega + 2\pi$ eintreten, so nimmt der bewegte Körper dieselbe Endlage ein. Beide Drehungen sind also in dem oben definierten Sinn äquivalent. Wir beschränken uns daher stets auf Drehungen, deren Drehungswinkel kleiner als 2π ist.

¹⁾ In den ersten Kapiteln werden die einzelnen Lagen eines Körpers durch Indizes unterschieden, während ein Buchstabe ohne Index den Körper an sich bezeichnet. Später wird eine freiere Bezeichnungsweise benutzt werden.

Der Übergang aus der Anfangslage S_1 in die Endlage S_2 läßt sich auch dadurch vermitteln, daß wir den Körper S um die Achse a im *entgegengesetzten* Sinn drehen, und zwar um den Winkel $2\pi - \omega$. Solche Drehungen bezeichnet man als negativ; es ist ersichtlich, daß jede Bewegung des Körpers S um die Achse a sowohl durch positive, wie durch negative Drehungen herbeigeführt werden kann. Da aber unter allen äquivalenten Drehungen immer nur eine zu berücksichtigen ist, so werden wir, um die Darstellung möglichst einfach zu halten, im allgemeinen nur mit positiven Drehungen operieren.

Wenn die Achse a dem Körper S angehört, wie es z. B. bei der Drehung der Erde um die Erdachse der Fall ist, so fallen offenbar die Anfangslage a_1 und die Endlage a_2 miteinander zusammen; jeder Punkt der Achse bleibt bei der Drehung fest. *Es ist aber auch das umgekehrte richtig*; d. h. sind S_1 und S_2 zwei Lagen des Körpers S , und weiß man, daß Anfangslage und Endlage einer gewissen ihm angehörenden Geraden Punkt für Punkt koinzidieren, so geht der Körper S *durch Drehung um diese Gerade* aus der Lage S_1 in die Lage S_2 über.

Abkürzend bezeichnen wir die Drehung vom Winkel ω um die Achse a durch $\mathfrak{A}(\omega)$. In dem besonderen Fall, daß der Drehungswinkel 180° beträgt, soll die Drehung auch *Umwendung* (um die Achse a) genannt werden.

Eine *Schraubung* ist ebenfalls an eine gewisse Achse a gekettet. Sie besteht aus einer Drehung vom Winkel ω um die Achse und einer Translation von der Länge t längs der Achse. Drehung und Translation erfolgen *gleichzeitig*. Der Schraubung kommt eine gewisse *Ganghöhe* zu; sie ist diejenige Translation, die einer Drehung vom Winkel 2π entspricht. Der durch eine Schraubung vermittelte Übergang eines Körpers S aus einer Lage S_1 in eine Lage S_2 kann übrigens auch so bewirkt werden, daß Drehung und Translation in beliebiger Reihenfolge *nacheinander* eintreten (Kap. III § 5). Daß die Reihenfolge beliebig ist, erkennt man folgendermaßen (Fig. 1). Aus einer Anfangslage A_1 komme ein Punkt A infolge der Drehung in die Lage A_2 und dann infolge der Translation in die Lage A_3 . Bestimmt man nun den Punkt A'_2 so, daß $A_1 A'_2 \parallel A_2 A_3$ und

$A_3 A'_2 \parallel A_1 A_2$ ist, so wird der Punkt A zunächst durch die Translation nach A'_2 und dann durch die Drehung wiederum nach A_3 gelangen. Dies gilt für jeden Punkt A und somit ist die Behauptung erwiesen.

Wir bezeichnen die Schraubung vom Winkel ω um die Achse a und von der Translation t durch $\mathfrak{A}(\omega, t)$; t heißt auch die *Gleitungskomponente*¹⁾. Eine Schraubung vom Winkel π heißt auch *Umschraubung*.

Der Schraubung kommt ein gewisser *Windungssinn* zu; man unterscheidet *rechtsgewundene* und *linksgewundene* Schrauben. Zeichnet man bei der Achse a eine bestimmte Richtung aus, so beruht der Unterschied darauf, ob, von dieser Richtung aus beurteilt, die Drehung im Sinn des Uhrzeigers erfolgt (linksgewunden) oder im umgekehrten Sinn (rechtsgewunden)²⁾. Eine Hervorhebung des Windungssinnes in dem eben eingeführten Zeichen $\mathfrak{A}(\omega, t)$ ist nicht erforderlich.

Zwei Lagen eines Körpers, die durch Bewegung auseinander hervorgehen, heißen bekanntlich *kongruent*; ebenso können kongruente Körper durch Bewegung ineinander übergeführt werden.

§ 2. **Einfachste Operationen zweiter Art (Umlegungen).** Denken wir uns den Körper S an einer ebenen Fläche σ gespiegelt, so erscheint hinter der Fläche sein Spiegelbild; es möge $\bar{S}$ heißen³⁾. Wir nennen S und $\bar{S}$ einander *spiegelbildlich gleich*. Körper und Spiegelbild zeigen den gleichen Gegensatz, wie rechte und linke Hand oder wie enantiomorphe Kristalle; auch wie rechtsgewundene und linksgewundene Schrauben. Es ist nicht möglich, zwei spiegelbildlich gleiche Gegenstände *materiell* zur Deckung zu bringen. Es wird

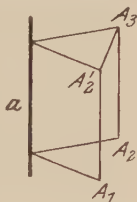


Fig. 1

¹⁾ Ist p die *Ganghöhe* der Schraubung, so besteht die Proportion
$$t:p = \omega:2\pi;$$

doch kommt die Größe p für unsere Zwecke kaum in Frage.

²⁾ Die im täglichen Leben benutzten Schrauben sind *rechtsgewunden*.

³⁾ Für diese Bezeichnung vgl. die Anmerkung auf S. 3. Den Körper S nehmen wir ohne Eigensymmetrie an.

möglich, aber nur im *geometrischen* Sinn, wenn wir die Operation des Spiegels zu Hilfe nehmen. Ist nämlich S_1 eine Lage eines Körpers S , und S_2 irgendeine Lage von S , so können wir zunächst S_1 an einer Ebene, welche es auch sei, spiegeln, und das so gewonnene Spiegelbild $\bar{S}_1$ mit S_2 durch Bewegung zur Deckung bringen. Diesen Prozeß nennen wir eine *Operation zweiter Art* oder eine *Umlegung*¹⁾. Alle Operationen, die den Übergang von S_1 nach S_2 vermitteln, heißen wieder *äquivalent*. Es läßt sich erwarten, daß auch von den Operationen zweiter Art für unsere Zwecke nur gewisse einfachste Typen in Betracht kommen. Es sind, wie sich zeigen wird (Kap. III, § 6) die folgenden: *Spiegelung*, *Inversion*, *Drehspiegelung* und *Gleitspiegelung*.

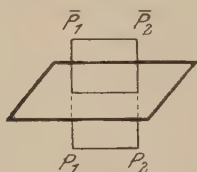


Fig. 2



Fig. 3

Spiegelung und *Gleitspiegelung* sind an eine bestimmte Ebene σ geknüpft; von einer *Gleitspiegelung* sprechen wir dann, wenn zu der Spiegelung an der Ebene noch eine Translation (Gleitung) *parallel* zur Ebene hinzukommt. Ein Punkt P gelangt, wenn wir erst die Spiegelung und dann die Gleitung eintreten lassen, von einer Anfangslage P_1 über $\bar{P}_1$ nach P_2 (Fig. 2); tritt erst die Gleitung und dann die Spiegelung ein, so gelangt er erst nach P_2 , und dann ebenfalls nach $\bar{P}_2$; beides sind daher äquivalente Operationen. Wir bezeichnen die Spiegelung an der Ebene σ durch $\mathfrak{S}$; eine Gleitspiegelung durch $\mathfrak{S}(t)$, wenn t die Gleitung parallel zu σ bedeutet.

Die *Inversion* (Fig. 3) ist an einen festen Punkt des Raumes geknüpft. Geht ein Körper S durch Inversion gegen O in einen

¹⁾ Dies Wort ist bei den Geometern neuerdings in Gebrauch gekommen.

Körper S über, so liegen je zwei entsprechende Punkte P und P so, daß die Gerade PP durch O geht, und zugleich O die Mitte von PP ist. Der Punkt O heißt auch Mittelpunkt der Inversion. Wir bezeichnen die Inversion durch $\mathfrak{S}$.

Die Drehspiegelung ist an eine Achse a und eine zu a senkrechte Ebene σ geknüpft. Sie besteht aus einer Drehung um a vom Winkel ω , und einer Spiegelung gegen die zu a senkrechte Ebene σ . Auch hier ist es gleichgültig, ob erst die Drehung und dann die Spiegelung oder ob erst die Spiegelung und dann die Drehung ausgeführt wird. Im ersten Fall kommt ein Punkt P von der Anfangslage P_1 (Fig. 4), durch die Drehung um a zunächst nach P_2 und von hier durch die

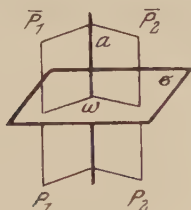


Fig. 4

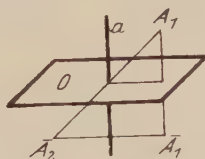


Fig. 5

Spiegelung an σ nach P_2 . Bestimmt man den Punkt P_1 so, daß $P_1 P_1$, $P_2 P_2$ und $P_2 P_1 = P_2 \bar{P}_1$ ist, so wird die zunächst eintretende Spiegelung P_1 nach P_1 bringen, und die dann folgende Drehung bringt P_1 wiederum nach P_2 . Die beiden so bestimmten Operationen sind also wieder äquivalent. Die Drehspiegelung um a vom Winkel ω bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}(\omega)$.

Ist der Drehungswinkel $\omega = 180^\circ$, so wird die Drehspiegelung eine Inversion, und zwar gegen den Punkt O , in dem die Achse a und die Ebene σ sich schneiden. Ist nämlich A_1 die Anfangslage eines Punktes (Fig. 5), so gelangt er durch Spiegelung an σ in die Lage A_2 und von hier durch Umwendung um a in die Lage $\bar{A}_2$, und es ist offenbar $A_1 O = \bar{A}_2 O$, und überdies $A_1 O A_2$ eine Gerade. Wir erkennen daraus noch, daß auch die Inversion einer Bewegung in Verbindung mit einer Spiegelung äquivalent ist. Beachten wir überdies, daß

aus dem Ergebnis von Umwendung und Spiegelung die Richtung der Achse a verschwunden ist, so können wir sagen:

1. Eine Inversion gegen den Punkt O ist einer Umwendung um eine beliebige durch O gehende Achse und einer Spiegelung an einer zur Achse senkrechten Ebene äquivalent.

Im Interesse vereinfachter Sprechweise werden wir von nun an die Bewegungen auch als *Operationen erster Art* bezeichnen und zusammenfassend von Operationen überhaupt reden.

Wir stellen die eingeführten Bezeichnungen in folgender Tabelle zusammen.

Operationen 1. Art	Operationen 2. Art
Translation $\mathfrak{T}$	Spiegelung $\mathfrak{S}$
Drehung $\mathfrak{A}(\omega)$	Gleitspiegelung . . . $\mathfrak{S}(t)$
Schraubung $\mathfrak{A}(\omega, t)$	Inversion $\mathfrak{I}$
	Drehspiegelung . . . $\mathfrak{A}(\omega)$.

§ 3. **Zusammengesetzte Operationen.** Die vorstehende Aufzählung der einfachsten Typen von Operationen erster und zweiter Art führt zu der folgenden Fragestellung. Wir haben drei einfachste Formen von Bewegungen und vier einfachste Formen von Operationen zweiter Art aufgezählt. Die Frage ist, ob dies auch wirklich die sämtlichen einfachen Operationen sind, die wir für unsere Untersuchungen nötig haben; oder anders ausgedrückt, ob der Übergang eines Körpers S aus einer Lage S_1 in eine Lage S_2 in jedem Fall durch eine Translation oder eine Drehung oder eine Schraubung bewirkt werden kann, und ob die analoge Tatsache auch für zwei einander spiegelbildlich gleiche Körper besteht. Erst dies kann uns berechtigen, uns für die weiteren geometrischen Vorbetrachtungen auf die Verwendung der genannten Typen zu beschränken. Ehe wir an die Beantwortung dieser Frage gehen, führen wir den Begriff der *zusammengesetzten* Operation ein, und zwar in folgender Weise:

Wir unterwerfen einen Körper S zunächst einer ersten Operation, die wir durch $\mathfrak{L}$ bezeichnen wollen, und dann einer zweiten Operation, die $\mathfrak{M}$ heißen möge, so wird das Resultat wieder einer einzigen Operation äquivalent sein; diese heißt die

resultierende oder auch die aus $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ *zusammengesetzte* Operation. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ heißen auch ihre *Komponenten*.

Seien z. B. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ Operationen zweiter Art, so führt die Operation $\mathfrak{L}$ den Körper zunächst aus einer Lage S_1 in eine Lage $\overline{S}_2$, und die dann folgende Operation $\mathfrak{M}$ bringt ihn aus der Lage $\overline{S}_2$ in eine Lage S_3 . Es ist dann auch möglich, den Körper S aus der Lage S_1 direkt in die Lage S_3 zu bringen. Die Operation, die dies leistet, ist die *resultierende*. Es gibt naturgemäß mannigfache derartige einander äquivalente Operationen; es ist aber im Sinne von § 1 wieder belanglos, welche von ihnen wir ins Auge fassen.

Sind, wie vorstehend, beide Operationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ von der zweiten Art, so gilt der folgende evidente Satz:

2. *Sind die beiden Operationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ von der zweiten Art, so ist die aus ihnen zusammengesetzte Operation eine Bewegung.*

Ebenso erkennt man:

2a. *Ist von den beiden Operationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die eine von der ersten, die andere von der zweiten Art, so ist die aus ihnen zusammengesetzte Operation von der zweiten Art.*

Kap. II. Das Rechnen mit Operationen

§ 1. **Potenzen von Drehungen.** Die bisherigen Ausführungen knüpften an einen Körper S an, den wir gewissen Operationen unterwarfen. Die Gestalt dieses Körpers blieb ganz willkürlich; sie spielte für die erörterten Fragen keinerlei Rolle. Wir können daher statt eines Körpers S auch den ganzen Raum ins Auge fassen und uns vorstellen, daß er selbst den bezüglichen Operationen unterliegt. Oder aber, was auf das gleiche hinauskommt, wir können den Körper S auch ganz außer acht lassen und uns — in etwas abstrakterer Form — nur mit den Operationen selbst beschäftigen. In dieser Weise werden wir von nun an verfahren.

Was von den Operationen für unsere Zwecke fast ausschließlich in Frage steht, sind die Gesetze ihrer *Zusammensetzung*. Hierfür kann mit Erfolg eine Rechnungssymbolik

benutzt werden, die der Multiplikation der Zahlen analog ist. Wir knüpfen sie zunächst an das Beispiel der Drehungen an.

Eine Drehung um die Achse a vom Winkel α bezeichnen wir oben durch $\mathfrak{A}(\alpha)$. Betrachten wir nun die Drehungen, die durch

$$\mathfrak{A}(\alpha), \mathfrak{A}(2\alpha), \mathfrak{A}(3\alpha) \dots \mathfrak{A}(n\alpha) \dots$$

dargestellt sind. Wir können uns vorstellen, daß die Drehung $\mathfrak{A}(2\alpha)$ entsteht, wenn die Drehung $\mathfrak{A}(\alpha)$ um die Achse a zweimal hinter einander ausgeführt wird. Ebenso ergibt sich $\mathfrak{A}(3\alpha)$ bei einer dreimaligen Wiederholung der Drehung $\mathfrak{A}$, und allgemein $\mathfrak{A}(n\alpha)$, wenn die Drehung $\mathfrak{A}$ n mal hintereinander erfolgt. Auf Grund hiervon *bezeichnen wir die vorstehenden Drehungen kurz durch*

$$1) \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \dots \mathfrak{A}^n,$$

so daß also ganz allgemein für jede positive ganze Zahl n

$$\mathfrak{A}(n\alpha) = \mathfrak{A}^n$$

gesetzt ist. Die Drehung $\mathfrak{A}(\alpha)$, n mal hinter einander ausgeführt, wird also genau so bezeichnet, als ob sie die n te Potenz von $\mathfrak{A}$ wäre.

In dieser Bezeichnung steckt aber nicht allein eine äußerliche Analogie zu den Potenzen; vielmehr — und hierauf beruht ihre Zweckmäßigkeit — *kann bei der neuen Bezeichnungsweise mit den Drehungen genau so gerechnet werden, als ob sie Potenzen wären.* Dies werden wir sofort erweisen.

Es seien h und k irgend zwei positive ganze Zahlen, so daß also

$$\mathfrak{A}(h\alpha) = \mathfrak{A}^h \text{ und } \mathfrak{A}(k\alpha) = \mathfrak{A}^k$$

gesetzt werden kann. Sind nun $\mathfrak{A}^h$ und $\mathfrak{A}^k$ wirkliche Potenzen, so besteht die Gleichung

$$1a) \quad \mathfrak{A}^h \cdot \mathfrak{A}^k = \mathfrak{A}^{h+k}.$$

Diese Gleichung überträgt sich sinngemäß auf die Drehungen. Die Drehungen $\mathfrak{A}^h$ und $\mathfrak{A}^k$ sind nämlich zusammen einer einzigen Drehung um den Winkel $(h+k)\alpha$, d. h. eben der Drehung $\mathfrak{A}^{h+k}$ äquivalent; die obige Gleichung gilt daher in dem Sinne, daß die Multiplikation die Zusammensetzung der bezüglichen

Drehungen bedeutet, und beide Seiten der Gleichung *äquivalente* Drehungen repräsentieren. Auf Grund dessen dürfen wir mit den Drehungen

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}^2, \quad \mathfrak{A}^3 \dots$$

genau so rechnen, wie mit Potenzen; in der Tat ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^3, \quad \mathfrak{A}^2 \cdot \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}^3 \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^4 \text{ usw.}$$

§ 2. Die Identität. Die in der Kristallographie auftretenden Drehungswinkel stehen sämtlich in einem rationalen Verhältnis zu 360° . Sei beispielsweise $\alpha = 120^\circ$; dann ist $\mathfrak{A}^2$ eine Drehung um 240° und $\mathfrak{A}^3$ eine Drehung um 360° , d. h. eine volle Umdrehung. Eine volle Umdrehung ist aber einer Drehung vom Winkel Null äquivalent; es ergibt sich also die Notwendigkeit, die Drehung vom Winkel Null ins Auge zu fassen. Wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{A}(0)$.

Wenn wir versuchen, die Analogie mit den Potenzen auch auf die Drehung von der Größe Null auszudehnen, so können wir dafür nur das Symbol $\mathfrak{A}^0 = 1$ einführen. Diese Festsetzung genügt in der Tat den allgemeinen Erfordernissen. Setzen wir nämlich die Drehung $\mathfrak{A}(0)$ mit irgend einer andern Drehung $\mathfrak{A}^h = \mathfrak{A}(h\alpha)$ zusammen, so ergibt sich als resultierende Drehung natürlich wieder $\mathfrak{A}^h$ selbst; das Zeichen für $\mathfrak{A}(0)$ muß daher so gewählt werden, daß es mit $\mathfrak{A}^h$ multipliziert wieder $\mathfrak{A}^h$ gibt, und dies ist gerade und nur für die Zahl 1, oder aber für die Potenz $\mathfrak{A}^0$ der Fall. Wir beschließen diese Erörterungen durch folgende Definition:

1. Die Drehung vom Winkel 0 heißt Identität. Das Zeichen dafür ist 1.

Ist a eine n -zählige Drehungsachse ($\alpha = 2\pi/n$), so folgt nunmehr

$$\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}(0) = 1.$$

Wird die Drehung um die Achse a im entgegengesetzten Sinn ausgeführt (so daß also $-\alpha$ der Drehungswinkel ist), so soll diese Drehung die zu $\mathfrak{A}$ *inverse Drehung* heißen. Wir erkennen sofort, daß wir für sie — wenn wir zugleich das Rechnen mit Potenzen auf negative Exponenten ausdehnen — das Zeichen $\mathfrak{A}^{-1}$ einzuführen haben. Die aus $\mathfrak{A}$ und der inversen

Drehung zusammengesetzte Drehung ist nämlich der Identität äquivalent; in Übereinstimmung damit ist aber auch

$$2) \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^0 = 1 \text{ und } \mathfrak{A}^n \cdot \mathfrak{A}^{-n} = 1.$$

§ 3. **Der Produktbegriff.** Dies läßt sich wie folgt verallgemeinern. Seien $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{M}$ irgend zwei Bewegungen, die nacheinander eintreten, und zwar möge *zuerst* die Bewegung $\mathfrak{Q}$ und *dann* die Bewegung $\mathfrak{M}$ ausgeführt werden. Die beiden aufeinanderfolgenden Bewegungen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{M}$ sind, wie wir oben sahen, einer einzigen Bewegung äquivalent; wir nannten sie die *resultierende* Bewegung und wollen sie jetzt durch $\mathfrak{R}$ bezeichnen. Die so definierte Beziehung zwischen $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ wollen wir von nun an durch die Gleichung

$$3) \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$$

darstellen und wollen $\mathfrak{R}$ auch das *Produkt* von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{M}$ nennen. Offenbar wird diese Bezeichnung durch die soeben erörterte Anwendbarkeit des Potenzbegriffs nahegelegt. Weiter ist auch klar, daß wir diese Festsetzung auf Operationen beliebiger Art ausdehnen können. Wir definieren daher ganz allgemein:

2. Sind $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{M}$ irgend welche Operationen, so verstehen wir unter dem Produkt $\mathfrak{Q}\mathfrak{M}$ die aus $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{M}$ zusammengesetzte Operation mit der Maßgabe, daß *zuerst* die Operation $\mathfrak{Q}$ und *dann* die Operation $\mathfrak{M}$ eintritt.

Es ist nun zu untersuchen, ob und wie sich mit solchen Produkten rechnen läßt. Ehe wir dazu übergehen, haben wir ganz allgemein die zu einer Operation $\mathfrak{Q}$ *inverse* Operation einzuführen; darunter soll wieder die im *umgekehrten* Sinn ausgeführte Operation verstanden werden. Wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{Q}^{-1}$. Diese Bezeichnung genügt wiederum der Bedingung, daß das Produkt beider Operationen die *Identität* liefert; es ist

$$4) \quad \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^{-1} = 1.$$

Wir dürfen also sagen:

3. Die zu einer Operation $\mathfrak{Q}$ inverse Operation wird durch $\mathfrak{Q}^{-1}$ dargestellt; für sie gilt die Gleichung 4.

Wir gehen nun zu den Rechnungsregeln unseres Produktbegriffs über. Zunächst sei auf einen wesentlichen Unterschied

gegenüber den aus Zahlen gebildeten Produkten hingewiesen. In dem aus $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ gebildeten Produkt soll *zuerst* die Operation $\mathfrak{L}$ und *dann* die Operation $\mathfrak{M}$ eintreten. Wie wir sehen werden, ist aber die resultierende Operation $\mathfrak{N}$ im allgemeinen von der Reihenfolge der Operationen abhängig; sie ist eine andere, je nachdem erst $\mathfrak{L}$ und dann $\mathfrak{M}$ oder erst $\mathfrak{M}$ und dann $\mathfrak{L}$ ausgeführt wird. Der hier benutzte Produktbegriff deckt sich also nicht ganz mit dem arithmetischen. Dies ist an sich kein Hindernis, das Wort „Produkt“ doch für den vorliegenden Zweck zu verwenden; es hat nur die Änderung einiger Rechnungsregeln im Gefolge und bedingt deshalb eine gewisse Vorsicht des Operierens.

Das, was wir für unsere Zwecke mit den Operationen im wesentlichen vorzunehmen haben, ist ihre wiederholte Zusammensetzung. Dies führt auf Produkte von beliebig vielen Faktoren, so daß jeder Faktor eine einzelne Operation repräsentiert. Wir wollen nunmehr untersuchen, wann diese Produkte derselben resultierenden Operation äquivalent sind, und welche formalen Änderungen die Produkte gestatten, ohne daß sie aufhören, einer und derselben Operation äquivalent zu bleiben.

Sind a, b, c Zahlgrößen, so besteht die fundamentale Gleichung

$$(ab)c = a(bc).$$

Sie bewirkt, daß in einem Zahlenprodukt, ohne daß sein Wert sich ändert, Faktoren beliebig in Klammern eingeschlossen und durch die dem Teilprodukt entsprechende Zahl ersetzt werden können, und umgekehrt. Das Grundgesetz, das sich darin ausspricht, ist auf Operationen übertragbar; d. h. es gilt die Gleichung

$$5) \quad (\mathfrak{L}\mathfrak{M})\mathfrak{N} = \mathfrak{L}(\mathfrak{M}\mathfrak{N}).$$

Nehmen wir zunächst der Einfachheit halber an, $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ seien Bewegungen. Die linke Seite repräsentiert dann die Ortsveränderung, die eintritt, wenn erst die Bewegungen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$, und dann noch $\mathfrak{N}$ ausgeführt wird. Die rechte Seite verlangt, daß erst die Bewegung $\mathfrak{L}$, und dann noch nacheinander die Bewegungen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ausgeführt werden; d. h. aber, in beiden Fällen

sollen der Reihe nach die drei Bewegungen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ vor sich gehen. Damit ist die obige Gleichung für Bewegungen als richtig nachgewiesen. Unsere Schlüsse übertragen sich aber offenbar ungeändert auf Operationen beliebiger Art. Wir dürfen also in den beiden obigen Produkten genau wie bei Zahlen die Klammern ganz und gar weglassen; jedes dieser Produkte kann einfach durch

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$$

bezeichnet werden. Dies gilt natürlich auch für beliebig viele Operationen. Beispielsweise ist

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{M}\mathfrak{N})\mathfrak{P} = (\mathfrak{L}\mathfrak{M})\mathfrak{N}\mathfrak{P},$$

denn beide Produkte sagen aus, daß hintereinander die vier Operationen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ ausgeführt werden sollen usw. Wir haben daher für die Rechnung mit Operationen die folgenden beiden Hauptgesetze gewonnen:

4. *In einem Produkt von Operationen darf ihre Reihenfolge im allgemeinen nicht geändert werden.*

5. *Jedes Produkt von Operationen bleibt ungeändert, wenn man beliebig viele aufeinander folgende in eine Klammer einschließt, oder derartige Klammern tilgt.*

§ 4. **Beispiele und Einzelsätze.** Wir hatten in Kap. I, § 2 gefunden, daß eine Inversion einer Umwendung $\mathfrak{U}$ und einer Spiegelung $\mathfrak{S}$ äquivalent ist, deren Ebene auf der Umwendungsachse senkrecht steht; auch kommt es auf die Folge der beiden Operationen nicht an. Dies drückt sich durch die Gleichungen

$$6) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{U}\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{U}$$

aus¹⁾. Weitere drei Gleichungen, deren Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist, sind die folgenden. Es ist

$$7) \quad \mathfrak{U}^2 = 1, \quad \mathfrak{S}^2 = 1, \quad \mathfrak{S}^2 = 1.$$

In der Tat ist ja das Quadrat einer Umwendung einer Drehung um 360° äquivalent, also der Identität; ferner heben sich zwei

¹⁾ Daß Achse und Ebene senkrecht zueinander sind, kommt in der Gleichung nicht zum Ausdruck; was ja auch nicht nötig ist.

Spiegelungen an derselben Ebene und zwei Inversionen gegen denselben Punkt gegenseitig auf; d. h.

6. Das Quadrat einer Umwendung, Spiegelung oder Inversion gibt die Identität¹⁾.

Aus den Gleichungen 6) folgt noch, wenn wir die erste linksseitig und die zweite rechtsseitig mit $\mathbb{U}$ multiplizieren gemäß Gleichung 7)

$$6a) \quad \mathbb{U}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathbb{U} = \mathfrak{S},$$

und ebenso, wenn wir die erste rechtsseitig und die zweite linksseitig mit $\mathfrak{S}$ multiplizieren,

$$6b) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathbb{U};$$

endlich ergibt sich hieraus in gleicher Weise auch noch

$$8) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathbb{U} = 1,$$

und zwar ist ersichtlich, daß diese Gleichung für jede Reihenfolge der drei Operationen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$, $\mathbb{U}$ in Geltung ist.

Ein weiterer Satz betrifft Inversionen gegen zwei verschiedene Punkte O und O_1 (Fig. 6).

Durch die Inversion $\mathfrak{S}$ gelange ein Punkt A nach $\bar{A}_1$, durch die Inversion $\mathfrak{S}_1$ von $\bar{A}_1$ nach A_2 . Dann ist

$$AO = O\bar{A}_1; \quad \bar{A}_1O_1 = O_1A_2,$$

also ist $OO_1 \parallel AA_2$ und

$$9) \quad AA_2 = 2OO_1.$$

Hier war A ein beliebiger Punkt; andererseits ist OO_1 vom Punkt A unabhängig. Also beschreiben alle Punkte gleiche und parallele Strecken, und es ist daher das Produkt von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ einer Translation $\mathfrak{T}$ äquivalent. Vertauschen wir die Reihenfolge der Inversionen, so geht $\mathfrak{T}$ in die inverse Translation über; d. h. es ist

$$10) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}; \quad \mathfrak{S}_1\mathfrak{S} = \mathfrak{T}^{-1}.$$

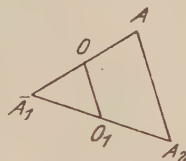


Fig. 6

¹⁾ In der Geometrie werden aus diesem Grunde Spiegelung, Umwendung und Inversion gemeinsam als Spiegelungen bezeichnet, und zwar gegen Ebene, Gerade, Punkt.

Hieraus ergibt sich weiter, wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen links mit $\mathfrak{I}$ und rechts mit $\mathfrak{I}_1$ multiplizieren, gemäß Gleichung 7)

$$10a) \quad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}\mathfrak{I}_1 \text{ und } \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}\mathfrak{I}.$$

7. Das Produkt zweier Inversionen ist eine Translation, die gleich dem doppelten Abstand beider Inversionszentren ist; bei Vertauschung beider Inversionen ändert sie ihren Sinn.

7a. Das Produkt aus einer Translation und einer Inversion ist wieder eine Inversion. Der Abstand beider Inversionszentra ist gleich der halben Translation.

Wir gehen zu Produkten zweier Spiegelungen über. Seien zunächst $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ Spiegelungen an zwei parallelen Ebenen σ und σ_1 . Wir wollen die Bewegung bestimmen, die gleich dem Produkt $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ ist. Wir denken uns die Ebenen σ und σ_1 senk-

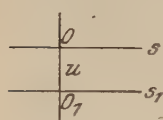


Fig. 7

recht auf der Zeichnungsebene ε . Es seien s und s_1 ihre Schnittlinien mit ε , und u eine zu s und s_1 also auch zu σ und σ_1 senkrechte Gerade; die Umwendung um u sei $\mathfrak{U}$ (Fig. 7). Da $\mathfrak{U}^2 = 1$ ist, so folgt sofort

$$\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}\mathfrak{U}^2\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}\mathfrak{S}_1.$$

Aber nach Gleichung 6) haben wir

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U} = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{I}_1,$$

wenn $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_1$ Inversionen gegen die Schnittpunkte O und O_1 von u mit s und s_1 sind. Daher folgt schließlich (gemäß Gleichung 9 und 10)

$$11) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{I}\mathfrak{I}_1 = 2OO_1 = \mathfrak{I}.$$

8. Das Produkt zweier Spiegelungen an zwei parallelen Ebenen σ und σ_1 ist eine Translation, die gleich dem doppelten Abstand von σ und σ_1 ist. Bei Vertauschung von σ und σ_1 ändert die Translation ihren Sinn¹⁾.

¹⁾ Man wird diesen Satz auch leicht durch eine geometrische Betrachtung ableiten, die die Wirkung der Spiegelungen auf einen Punkt direkt in Betracht zieht.

Aus der Gleichung 11) ergeben sich, genau wie oben, wieder die zwei weiteren Gleichungen

$$11a) \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{I}; \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{I}\mathfrak{S}_1,$$

d. h. das Produkt aus einer Spiegelung und einer zu ihr senkrechten Translation ist eine Spiegelung an einer Ebene, die der ersten Ebene parallel und von ihr um die halbe Translation entfernt ist.

Bilden die Ebenen σ_1 und σ einen Winkel α miteinander und ist a ihre Schnittlinie, so ist, wie wir sofort zeigen werden,

$$12) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{A}(2\alpha); \text{ d. h.}$$

9. *Das Produkt von zwei Spiegelungen ist eine Drehung um die Schnittlinie der spiegelnden Ebenen.*

Zunächst ist evident, daß (Fig. 8) jeder Punkt der Geraden a bei beiden Spiegelungen seinen Ort nicht ändert; daher ist das Produkt eine Drehung um a . Ist nun l irgend eine auf a senkrechte Gerade der Ebene σ , so bleibt sie bei der Spiegelung gegen σ ebenfalls unverändert; tritt alsdann die Spiegelung $\mathfrak{S}_1$ ein, so geht l in die Gerade l_1 über, die ihr Spiegelbild in bezug auf die Ebene σ_1 ist. Der Winkel $(ll_1) = 2\alpha$ ist demnach der Drehungswinkel; genauer gesprochen, ist α derjenige spitze Winkel, um den die Ebene σ gedreht werden muß, um mit σ_1 zusammenzufallen. Die Reihenfolge der Spiegelungen ist daher im allgemeinen *nicht* vertauschbar.



Fig. 8.

Stehen die spiegelnden Ebenen senkrecht aufeinander, so ist $2\alpha = \pi$, also das Produkt eine Umwendung. In diesem besonderen Fall ist die Reihenfolge, in der die Spiegelungen vor sich gehen, gleichgültig; die Gerade l von Fig. 8 geht nämlich in ihre Verlängerung über.

Wir multiplizieren die Gleichung 12) und zwar beide Seiten von links mit $\mathfrak{S}$, so folgt wegen $\mathfrak{S}^2 = 1$, daß

$$12a) \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{A}$$

ist; ebenso folgt, wenn wir rechtsseitig mit $\mathfrak{S}_1$ multiplizieren,

$$12b) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{A}\mathfrak{S}_1.$$

Dies gibt den Satz:

10. *Das Produkt aus einer Drehung und einer Spiegelung, deren Ebene die Drehungsachse enthält, ist wieder eine Spiegelung, deren Ebene durch die Drehungsachse geht.*

Der Winkel der spiegelnden Ebenen ist, wie das Vorstehende zeigt, gleich dem halben Drehungswinkel.

Wir haben im vorstehenden bereits mehrfach davon Gebrauch gemacht, Gleichungen linksseitig oder rechtsseitig mit derselben Operation zu multiplizieren. Im Anschluß hieran wollen wir ausdrücklich auf alle die Rechnungsregeln hinweisen, die sich aus den Sätzen 4 und 5 von § 3 ergeben, und von denen im folgenden immer Gebrauch gemacht werden wird.

1) In jedem Produkt von Operationen ist es gestattet, eine beliebige Operation durch andere ihr äquivalente zu ersetzen und umgekehrt. Beispielsweise kann man gemäß obiger Gleichung 6) in jedem Produkt die Inversion $\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$ ersetzen und umgekehrt.

2) Jede Gleichung zwischen Operationen darf in der Weise mit derselben Operation multipliziert werden, daß die Multiplikation auf beiden Seiten gleichzeitig von rechts oder gleichzeitig von links erfolgt. Sind also $\mathfrak{R}, \mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \dots$ irgend welche Operationen, und ist

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} \dots = \mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1 \dots,$$

so ist offenbar auch

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} \dots \mathfrak{R} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{R}$$

und ebenso ist auch

$$\mathfrak{R}\mathfrak{L}\mathfrak{M} \dots = \mathfrak{R}\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1 \dots$$

3) Enthalten die beiden in einer Gleichung stehenden Produkte rechts oder links dieselbe Operation, so kann die Gleichung durch diese Operation dividiert werden. D. h. bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} \dots \mathfrak{R} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{R}$$

oder

$$\mathfrak{R}\mathfrak{L}\mathfrak{M} \dots = \mathfrak{R}\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1 \dots,$$

so ist in beiden Fällen

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} \dots = \mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1 \dots$$

Wenn wir nämlich die ersten beiden Gleichungen rechts oder links mit der zu $\mathfrak{R}$ inversen Operation $\mathfrak{R}^{-1}$ multiplizieren, so ergibt sich, gemäß Gleichung 4, die dritte Gleichung.

§ 5. **Vertauschbare Operationen.** Zwei Operationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ sollen *vertauschbar* heißen, wenn für sie die Gleichung

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{L}$$

besteht. Die vertauschbaren Operationen sind, weil sie die rechnerische Behandlung der Formeln erleichtern, von erhöhter Wichtigkeit. Wir wollen deshalb die hauptsächlichsten Fälle von Vertauschbarkeit angeben.

11. *Vertauschbare Operationen sind:*

1) *Zwei Translationen.*

2) *Eine Drehung um eine Achse a und eine zur Achse parallele Translation.*

3) *Eine Spiegelung und eine zur Spiegelungsebene parallele Translation.*

4) *Eine Spiegelung und eine Drehung um eine zur spiegelnden Ebene senkrechte Achse.*

5) *Eine Inversion gegen einen Punkt O und eine Drehung um eine durch O gehende Achse.*

6) *Umwendungen um zwei sich senkrecht schneidende Achsen.*

7) *Spiegelungen an zwei zueinander senkrechten Ebenen.*

Die Sätze 2), 3), 4) haben wir bereits in Kap. I und II bewiesen. Über sie mag noch folgende Bemerkung Platz finden. Die in sie eingehenden Operationen (Drehung und Translation, Spiegelung und Translation, Drehung und Spiegelung) sind die Komponenten von solchen drei Gesamtoperationen, die wir in Kap. I als einfachste Typen von Operationen eingeführt haben; nämlich von der Schraubung, der Gleitspiegelung und der Drehspiegelung. Offenbar erhalten damit diese Operationsformen eine Art Vorzugsstellung.

Was den Satz 1) betrifft, so besteht nach ihm, wenn $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ irgend zwei Translationen sind, stets die Gleichung 13)

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1.$$

Werde nämlich $\mathfrak{T}_1$ durch den Vektor OA und $\mathfrak{T}_2$ durch den Vektor OB dargestellt, und sei (Fig. 9) $OABC$ das durch OA und OB bestimmte Parallelogramm, dann führt das Produkt $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2$ den Punkt O zuerst von O nach A und dann von A nach C ; hingegen bringt das Produkt $\mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1$ ihn erst von O nach B und dann von B nach C . Was für einen Punkt gilt, gilt aber bei einer Translation für alle. Man sieht daraus noch, daß beide Produkte diejenige Schiebung $\mathfrak{T}$ darstellen, die dem Vektor OC entspricht.

Wir folgern daraus noch, daß wir eine gegebene Translation (wie z. B. $\mathfrak{T}$) so durch zwei andere Translationen ersetzen können,

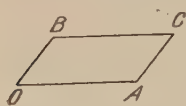


Fig. 9

daß wir *eine von beiden* (wie z. B. $\mathfrak{T}_1$) *willkürlich wählen*. Die andere ist dann bestimmt. In der Tat ist durch die Vektoren OC und OA auch OB vektoriell gegeben.

Am häufigsten hat man eine gegebene Translation durch zwei zueinander senkrechte

Translationen vorgegebener Richtung zu ersetzen.

Den fünften Satz wollen wir rechnerisch beweisen, und zwar so, daß wir ihn auf den Fall 4) zurückführen und den Satz 1) von Kap. I zu Hilfe nehmen. Sei a die Achse der Drehung, von der im Satz 5) die Rede ist, und α der Drehungswinkel. Wir ersetzen die Inversion $\mathfrak{S}$ (Kap. I, Satz 1) so durch ein Produkt aus Spiegelung und Umwendung, daß die Umwendungssachse mit a zusammenfällt; wir setzen also

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U}(\pi) \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{U}(\pi),$$

wo die Ebene von $\mathfrak{S}$ auf a senkrecht steht. Dann wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{U}(\alpha) &= \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{U}(\pi) \cdot \mathfrak{U}(\alpha) = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{U}(\pi + \alpha) \text{ und} \\ \mathfrak{U}(\alpha) \cdot \mathfrak{S} &= \mathfrak{U}(\alpha) \cdot \mathfrak{U}(\pi) \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{U}(\pi + \alpha) \cdot \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

und in der Tat folgt nun unser Satz aus Satz 4). Wir folgern noch, daß das Produkt $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}$ eine *Drehspiegelung* um a vom Winkel $\alpha + \pi$ liefert.

Die Richtigkeit von Satz 7) haben wir bereits in § 4 erkannt; von dem Satz 6) überzeugt man sich folgendermaßen.

Seien u und v die beiden Umwendungsachsen, und w eine dritte auf beiden senkrechte Achse (Fig. 10). Dann geht die Achse w durch Umwendung um u so in sich über, daß ihre beiden Hälften sich vertauschen, und durch Umwendung um v kehrt jede Hälfte wieder in ihre Anfangslage zurück. Dieser Schluß ist aber von der Reihenfolge der beiden Umwendungen unabhängig. Endlich sieht man noch, daß die resultierende Bewegung eine Umwendung um w ist. Die Achse u bleibt nämlich bei der ersten Umwendung $\mathfrak{U}$ punktweise fest, und bei der Umwendung $\mathfrak{B}$ geht die eine Hälfte in die andere über. Das gleiche bewirkt aber auch eine Umwendung $\mathfrak{B}$ um w . Man hat also noch

$$14) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{U} = \mathfrak{B}.$$

Die Achsen u, v, w stehen so aufeinander senkrecht, wie drei Koordinatenachsen; sie sind also gleichberechtigt, und ebenso die Umwendungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}$. Es ist also auch

$$\mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{U} = \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{B} = \mathfrak{U}.$$

Endlich verifiziert man auch leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$15) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{B}\mathfrak{B} = 1.$$

Als einen Satz allgemeiner Art beweisen wir endlich den folgenden:

12. Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ vertauschbare Operationen, so ist die n te Potenz von $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ dem Produkt aus $\mathfrak{L}^n$ und $\mathfrak{M}^n$ äquivalent.

Nach Voraussetzung ist nämlich

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{L}.$$

Daher wird gemäß Satz 7)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}\mathfrak{M})^2 &= (\mathfrak{L}\mathfrak{M})(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) \\ &= \mathfrak{L}(\mathfrak{M}\mathfrak{L})\mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{L}(\mathfrak{L}\mathfrak{M})\mathfrak{M} = \mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2. \end{aligned}$$

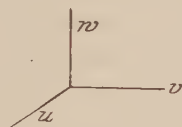


Fig. 10

Ebenso folgt nun

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{L}\mathfrak{M})^3 &= (\mathfrak{L}\mathfrak{M})^2(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) \\
 &= \mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2\mathfrak{L}\mathfrak{M} \\
 &= \mathfrak{L}^2\mathfrak{M}(\mathfrak{M}\mathfrak{L})\mathfrak{M} \\
 &= \mathfrak{L}^2\mathfrak{M}(\mathfrak{L}\mathfrak{M})\mathfrak{M} \\
 &= \mathfrak{L}^2(\mathfrak{M}\mathfrak{L})\mathfrak{M}^2 \\
 &= \mathfrak{L}^2(\mathfrak{L}\mathfrak{M})\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{L}^3\mathfrak{M}^3.
 \end{aligned}$$

In derselben Weise kann man weiter schließen und erhält

$$16) \quad (\mathfrak{L}\mathfrak{M})^n = \mathfrak{L}^n \mathfrak{M}^n.$$

Ausdrücklich sei noch bewiesen, daß der Satz 12) *auch für negative Potenzen Geltung hat*. Wir gehen aus von der Gleichung

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1} = \mathfrak{N},$$

in der $\mathfrak{N}$ die Bezeichnung für die linke Seite ist. Aus ihr folgt durch linksseitige Multiplikation mit $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})$

$$1 = (\mathfrak{L}\mathfrak{M})\mathfrak{N} = \mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}.$$

Wir multiplizieren jetzt linksseitig erst mit $\mathfrak{L}^{-1}$ und dann noch mit $\mathfrak{M}^{-1}$ und erhalten

$$\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}; \quad \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{N}.$$

Da aber $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind, so folgt ganz ebenso auch

$$1 = \mathfrak{M}\mathfrak{L}\mathfrak{N}$$

und hieraus fließt, wenn zunächst mit $\mathfrak{M}^{-1}$ und dann mit $\mathfrak{L}^{-1}$ multipliziert wird

$$\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{L}\mathfrak{N}; \quad \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{N},$$

also insgesamt in der Tat

$$16a) \quad (\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}.$$

§ 6. Die Potenzen der Drehspiegelungen. Die Drehspiegelung ist gemäß ihrer Definition gleich dem Produkt aus einer Drehung und einer Spiegelung; d. h. es ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{S}.$$

Daher folgt aus dem obigen Satz 12)

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{S}^2\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^2\mathfrak{S}^2$$

und allgemein

$$17) \quad \mathfrak{A}^n = \mathfrak{S}^n\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}^n\mathfrak{S}^n.$$

Dies führt zu einigen weiteren Folgerungen, die wir ableiten müssen. Sei der zu $\mathfrak{A}$ gehörige Drehungswinkel $2\pi/n$, so haben wir genauer

$$\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{A}}^{(2\pi/n)} = \mathfrak{A}^{(2\pi/n)}\mathfrak{S}.$$

Wir wollen die *kleinste* Potenz von $\bar{\mathfrak{A}}$ suchen, die der Identität äquivalent ist, beschränken uns aber auf die kristallographisch allein interessierenden Fälle $n = 2, 3, 4, 6$.

Wir haben zu unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist. Ferner scheidet der Fall $n = 2$ aus, da er gemäß Kap. I einer Inversion entspricht.

Ist $n = 3$, so haben wir $\mathfrak{A}^3 = 1$, also

$$\bar{\mathfrak{A}}^2 = \mathfrak{A}^2\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{A}^2, \quad \bar{\mathfrak{A}}^3 = \mathfrak{A}^3\mathfrak{S}^3 = \mathfrak{S},$$

es ist daher erst

$$\mathfrak{A}^6 = \mathfrak{S}^2 = 1$$

und wir finden die sechs nicht äquivalenten Potenzen

$$1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \bar{\mathfrak{A}}^3, \bar{\mathfrak{A}}^4, \bar{\mathfrak{A}}^5.$$

Wegen $\mathfrak{A}^3 = 1$ ist weiter

$$\bar{\mathfrak{A}}^4 = \mathfrak{A}^4\mathfrak{S}^4 = \mathfrak{A}, \quad \bar{\mathfrak{A}}^5 = \mathfrak{A}^5\mathfrak{S}^5 = \mathfrak{A}^2\mathfrak{S},$$

und es lassen sich deshalb unsere sechs Operationen in die Form setzen

$$1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2; \mathfrak{S}, \mathfrak{A}\mathfrak{S}, \mathfrak{A}^2\mathfrak{S},$$

von denen die drei ersten reine Drehungen sind.

Im Fall $n = 4$ haben wir

$$\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}^4\mathfrak{S}^4 = 1,$$

es gibt daher nur vier nicht äquivalente Potenzen, nämlich

$$1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3.$$

Hier ist

$$\bar{\mathfrak{A}}^2 = \mathfrak{A}^2, \quad \bar{\mathfrak{A}}^3 = \mathfrak{A}^3\mathfrak{S}^3 = \mathfrak{A}^3\mathfrak{S},$$

wir können daher die vier Potenzen in die Form

$$1, \mathfrak{A}^2; \mathfrak{A}\mathfrak{S}, \mathfrak{A}^3\mathfrak{S}$$

setzen, wo die ersten beiden die Drehungen darstellen.

Endlich ist im Fall $n = 6$ wiederum $\bar{U}^6 = U^6 \mathfrak{S}^6 = 1$, wir erhalten daher die sechs nicht äquivalenten Potenzen

$$1, \bar{U}, \bar{U}^2, \bar{U}^3, \bar{U}^4, \bar{U}^5,$$

die sich auch in die Form

$$1, U^2, U^4; U\mathfrak{S}, U^3\mathfrak{S}, U^5\mathfrak{S}$$

setzen lassen, mit den drei ersten als Drehungen. Wir können die drei Operationen zweiter Art zweckmäßig noch in eine andere Form bringen. Da nämlich U^3 eine Umwendung um a ist, so haben wir

$$U^3\mathfrak{S} = \mathfrak{I}.$$

Darum folgt weiter

$$U^5\mathfrak{S} = U^2U^3\mathfrak{S} = U^2\mathfrak{I}, \quad U\mathfrak{S} = U^7\mathfrak{S} = U^4U^3\mathfrak{S} = U^4\mathfrak{I};$$

unsere sechs Potenzen lassen sich also auch schreiben

$$1, U^2, U^4; \mathfrak{I}, U^2\mathfrak{I}, U^4\mathfrak{I}.$$

§ 7. Die Potenzen von Schraubung und Gleitspiegelung. Die Sätze, die wir ableiten wollen, sind anschaulich einleuchtend; dem entspricht aber auch die Einfachheit des formellen Beweises. Die Gleitspiegelung $\mathfrak{S}(t)$ kann in die Form

$$\mathfrak{S}(t) = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{I}$$

gesetzt werden, und zwar sind (§ 5) $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{I}$ vertauschbare Operationen. Wir haben daher nach Satz 12 sofort

$$18) \quad \mathfrak{S}^2(t) = \mathfrak{S}^2 \cdot \mathfrak{I}^2 = \mathfrak{I}^2,$$

und zwar stellt $\mathfrak{I}^2$ eine Translation dar, die vektoriell gleich $2t$ ist. Sie ist zur Ebene σ der Gleitspiegelung parallel. Analog haben wir für eine n -zählige Schraubung

$$U^{(2\pi/n)}(t) = U^{(2\pi/n)} \cdot \mathfrak{I}$$

und finden insbesondere für ihre n -te Potenz

$$19) \quad U^{n(2\pi/n)}(t) = U^{n(2\pi/n)} \cdot \mathfrak{I}^n = \mathfrak{I}^n,$$

wo jetzt $\mathfrak{I}^n$ eine Translation von der vektoriellen Länge nt darstellt. Diese Translation fällt in die Richtung der Axe a .

Endlich noch eine Bemerkung über linke und rechte Schraubung. Zwei solche Schraubungen können durch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\omega, t) \text{ und } \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(-\omega, t)$$

dargestellt werden; wofür wir auch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\omega) \cdot \mathfrak{T} \text{ und } \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(-\omega) \cdot \mathfrak{T}$$

schreiben können. Wir fragen, wann beide Bewegungen äquivalent sind, wann also

$$\mathfrak{A}(\omega)\mathfrak{T} = \mathfrak{A}(-\omega)\mathfrak{T}$$

ist. Dies bedeutet, wenn wir mit $\mathfrak{T}^{-1}$ multiplizieren,

$$\mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{A}(-\omega) = \mathfrak{A}^{-1}(\omega),$$

woraus weiter durch Multiplikation mit $\mathfrak{A}(\omega)$ folgt

$$\mathfrak{A}^2(\omega) = 1.$$

Die Äquivalenz tritt also für zweizählige Schraubenachsen ein; für sie *verschwindet also der Gegensatz des Windungssinns*.

Kap. III. Die einfachsten Typen der Operationen

Vorbemerkung. In diesem Kapitel sollen einige für uns notwendige Einzelsätze über Zusammensetzung und Produkte von Operationen abgeleitet werden; auf dieser Grundlage wird es möglich, die im Kapitel I aufgezählten einfachsten Formen der Operationen erster und zweiter Art als die allein in Betracht zu ziehenden nachzuweisen.

Folgende Bemerkung über Bewegungen schicken wir voraus. Ist ein Punkt A des Körpers S an eine Stelle A_1 gelangt, so kann sich S noch beliebig um den Punkt A_1 bewegen. Sind zwei Punkte A und B von S an feste Stellen A_1 und B_1 gekommen, so kann sich S noch um $A_1 B_1$ als Achse drehen. Sind endlich drei Punkte von S (die eine Ebene bestimmen) an vorgeschriebene Stellen gelangt, *so liegt der Körper fest*. Wir ersehen daraus, daß jede räumliche Bewegung durch die Bewegung von drei Punkten bestimmt ist (oder, da drei Punkte eine Ebene bestimmen, auch durch die Bewegung einer dem Körper angehörigen Ebene).

§ 1. **Zusammensetzung von Drehungen um parallele Achsen.** Wir werden die Sätze, zu denen wir zunächst gelangen wollen, auf eine sehr einfache rechnerische Weise ableiten; sie soll zugleich die Zweckmäßigkeit und Überlegenheit unseres rechnerischen Algorithmus ins Licht setzen.

Seien σ , σ_1 , σ_2 drei Ebenen, die auf der Zeichnungsebene senkrecht stehen. Ferner sei $\sigma_1 \parallel \sigma_2$ und es seien s , s_1 , s_2 die Schnittlinien von σ , σ_1 , σ_2 mit ε (Fig. 11). Die Schnittpunkte von s mit s_1 und s_2 seien A und B . Sind nun $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ die Spiegelungen an den drei Ebenen, so haben wir — wegen $\mathfrak{S}^2 = 1$ — offenbar

$$1) \quad \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}^2 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$$

oder aber auch

$$1a) \quad \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S} \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2.$$

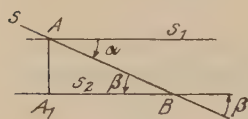


Fig. 11

Nun ist aber, wenn a die Schnittlinie von σ_1 und σ und b die Schnittlinie von σ und σ_2 ist, (Kap. II, Satz 9)

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S} = \mathfrak{A}(2\alpha) \text{ und } \mathfrak{S} \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{B}(2\beta).$$

Ferner ist nach Kap. II, § 4 das Produkt $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$ eine Translation $\mathfrak{T}$, die gleich dem doppelten Abstand der Ebenen σ_1 und σ_2 ist. Wir wollen sie, da sie auf a und b senkrecht steht, mit $\mathfrak{T}_n$ bezeichnen. Füllen wir also von A das Lot AA_1 auf s_2 , so erhalten wir

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{T}_n = 2 AA_1.$$

Setzen wir die so gefundenen Werte in Gleichung 1a) ein, so folgt

$$2) \quad \mathfrak{A}(2\alpha) \cdot \mathfrak{B}(2\beta) = \mathfrak{T}_n; \alpha + \beta = 0.$$

Dies ist die abzuleitende Grundgleichung. Sie läßt die folgenden Umformungen zu. Wir setzen $2\alpha = \omega$ und haben

$$\mathfrak{B}(2\beta) = \mathfrak{B}(-2\alpha) = \mathfrak{B}(-\omega).$$

Setzen wir dies in 2) ein, so folgt zunächst

$$2a) \quad \mathfrak{A}(\omega) \mathfrak{B}(-\omega) = \mathfrak{T}_n.$$

Multiplizieren wir noch rechtsseitig mit $\mathfrak{B}(\omega)$, so folgt

$$2b) \quad \mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{T}_n \mathfrak{B}(\omega).$$

Ebenso erhalten wir, wenn wir $2\beta = \omega_1$ setzen

$$2c) \quad \mathfrak{B}(\omega_1) = \mathfrak{A}(\omega_1)\mathfrak{T}_n.$$

Diese Gleichungen lassen sich wie folgt aussprechen:

1. Das Produkt von zwei Drehungen um parallele Achsen von entgegengesetzt gleichem Drehungswinkel ist eine zu den Achsen senkrechte Translation (Gleichung 2a).

1a. Jede Drehung kann durch eine gleiche Drehung um eine parallele Achse und eine zur Achsenrichtung senkrechte Translation ersetzt werden und umgekehrt (Gleichung 2b und 2c).

Für die Art der Anwendung dieser Sätze sei folgendes bemerkt:

In den meisten Fällen ist die genaue Lage der Achsen und die vektorielle Eigenart der Translation ohne Belang; die Sätze kommen sozusagen nur mit ihrem *qualitativen* Inhalt in Frage. Es genügt zu wissen, daß man sowohl das Produkt aus Drehung und Translation (Gleichung 2b) wie auch ein Produkt aus Translation und Drehung (Gleichung 2c) durch eine einzige Drehung ersetzen kann, und umgekehrt.

Ist die gegenseitige Lage der Achsen sowie Richtung und Größe der Translation zu wissen nötig, so sind dafür die geometrischen Verhältnisse des Dreiecks AA_1B maßgebend. Sie geben die *quantitativen* Beziehungen an, und zwar:

a) Für die Größe der Translation $\mathfrak{T}_n$ besteht die Formel

$$3) \quad 2AA_1 = 2AB \sin \alpha = 2AB \sin \omega/2.$$

b) Sind die Achsen a und b und ω gegeben, also im Dreieck ABA_1 die Punkte A , B und ω , so ist dadurch die Translation $\mathfrak{T}_n$ vektoriell bestimmt (Gleichung 2a).

c) Ist die Drehung $\mathfrak{A}$ und die Translation $\mathfrak{T}_n$ gegeben, also im Dreieck ABA_1 die Punkte A , A_1 und ω , so ist dadurch B , also die Achse b bestimmt (Gleichung 2b und 2c).

d) Für solche Drehungen, deren Drehungswinkel einen der vier Werte

$$\pi, \quad 2\pi/3, \quad \pi/2, \quad \pi/3$$

hat, lassen wir die genaue Bestimmung der dem Satz 1 entsprechenden Translation $\mathfrak{T}_n = 2AA_1$ hier folgen.

Ist $\omega = \pi$, so ist

$$4) \quad 2AA_1 = 2AB,$$

und zwar liegt der Punkt A_1 (Fig. 12) auf der Geraden AB , fällt also mit B zusammen; es fällt also $\mathfrak{T}_n$ in die Verbindungsebene (ab).

Ist $\omega = 120^\circ$, so wird (Fig. 12a)

$$4a) \quad 2AA_1 = 2AB \sin \pi/3 = AB\sqrt{3}.$$

Es ist also B Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks über der Seite AA_1 .

Ist $\omega = 90^\circ$, so wird (Fig. 12b)

$$4b) \quad 2AA_1 = 2AB \sin \pi/4 = AB\sqrt{2},$$

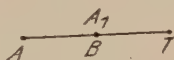


Fig. 12



Fig. 12a

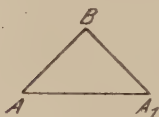


Fig. 12b



Fig. 12c

das Dreieck AA_1B ist also gleichschenkelig und bei B rechtwinklig.

Ist endlich $\omega = 60^\circ$, so ist (Fig. 12c)

$$4c) \quad 2AA_1 = 2AB \sin \pi/6 = AB,$$

also ist AA_1B ein gleichseitiges Dreieck.

e) Wir wollen noch eine letzte Folgerung ableiten. Wir multiplizieren die Gleichung 1) rechtsseitig mit einer zu den Achsen normalen Translation $\mathfrak{T}'_n$, so folgt

$$\mathfrak{U}(\omega) \cdot \mathfrak{T}'_n = \mathfrak{T}_n \mathfrak{B}(\omega) \mathfrak{T}'_n.$$

Hier können wir gemäß Gleichung 2c) die linke Seite wieder durch eine einzige Drehung $\mathfrak{U}_1(\omega)$ um eine wohlbestimmte Achse $a_1 \parallel a$ ersetzen, die durch $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{T}'_n$ bestimmt ist, und finden so

$$4d) \quad \mathfrak{T}_n \mathfrak{B}(\omega) \mathfrak{T}'_n = \mathfrak{U}_1(\omega).$$

Es ist also auch das linksstehende Produkt einer einzigen Drehung von gleichem Winkel und paralleler Achsenrichtung äquivalent.

§ 2. Ein weiterer Satz betrifft Drehungen um *drei* zueinander parallele Achsen. Wir gelangen zu ihm durch eine analoge Betrachtung. Sei ABC ein Dreieck (Fig. 13); in seinen Eckpunkten denken wir uns die zu ihm senkrechten Achsen a, b, c . Ferner seien $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ Spiegelungen an den drei Ebenen

$$\sigma_1 = (bc), \sigma_2 = (ca), \sigma_3 = (ab).$$

Es ist dann offenbar

$$\mathfrak{S}_2^2 \mathfrak{S}_3^2 \mathfrak{S}_1^2 = 1.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung zuerst linksseitig mit $\mathfrak{S}_2^{-1}$ und dann rechtsseitig mit $\mathfrak{S}_2$, so folgt weiter

$$\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}_2 = 1.$$

Aus dieser evidenten Gleichung ist unser Satz wieder unmittelbar zu entnehmen. Wir bezeichnen noch die Dreieckswinkel mit $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$, so daß also

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

ist; dann folgt aus Satz 9 von Kap. II

$$\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{A}(\alpha), \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{B}(\beta), \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{C}(\gamma)$$

und die obige Gleichung geht über in

$$5) \quad \mathfrak{A}(\alpha) \cdot \mathfrak{B}(\beta) \cdot \mathfrak{C}(\gamma) = 1.$$

Dies ist unser Satz: Wir können ihn folgendermaßen aussprechen:

2. Werden um die Ecken eines Dreiecks nacheinander Drehungen ausgeführt, deren Winkel gleich den doppelten Dreieckswinkeln sind, so gibt ihr Produkt die Identität¹⁾. Das Dreieck kommt also infolge der drei Drehungen in seine Ausgangslage zurück.

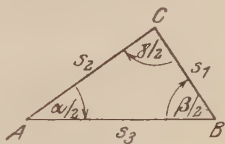


Fig. 13

¹⁾ Der Satz stammt von Hamilton; vgl. die Anm. auf S. 31. Der Drehungssinn ist immer derselbe.

Diesem Satz entnehmen wir die folgende rechnerische Folgerung. Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ist

$$\mathfrak{E}^{-1}(\gamma) = \mathfrak{E}(2\pi - \gamma).$$

Multiplizieren wir also die letzte Gleichung rechtsseitig mit $\mathfrak{E}^{-1}(\gamma)$, so folgt schließlich

$$5a) \quad \mathfrak{A}(\alpha) \cdot \mathfrak{B}(\beta) = \mathfrak{E}(2\pi - \gamma) = \mathfrak{E}(\alpha + \beta).$$

Diese Gleichung lehrt den Satz:

2a. Das Produkt zweier Drehungen $\mathfrak{A}(\alpha)$ und $\mathfrak{B}(\beta)$ um parallele Achsen a und b liefert eine Drehung um die zu ihnen parallele Achse c vom Winkel $\alpha + \beta$; und zwar bestimmt sich die Lage der Achse c so, daß die 3 Punkte A , B , C ein Dreieck bilden mit den Winkeln $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$.

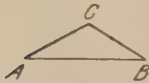


Fig. 13a

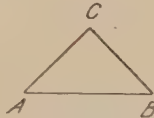


Fig. 13b

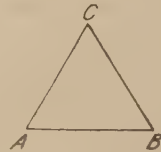


Fig. 13

Von diesem Resultat haben wir für unsere Zwecke wieder einige Sonderfälle zu betrachten.

1) Ist $\alpha = \beta = 60^\circ$, so ist $\gamma = 120^\circ$ (Fig. 13a); der Punkt C ist Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basiswinkel 30° betragen. Das Produkt beider Drehungen um 60° liefert also eine einzige Drehung vom Winkel 120° .

2) Ist $\alpha = \beta = 90^\circ$, so ist $\gamma = 180^\circ$ (Fig. 13b); das Produkt der beiden Drehungen um 90° liefert also eine Umwendung. Das Dreieck ABC wird in C rechtwinklig.

3) Ist $\alpha = \beta = 120^\circ$, so ist $\gamma = 240^\circ$. Eine Drehung um 240° ist aber einer im entgegengesetzten Sinn erfolgenden Drehung um 120° äquivalent. Das Produkt der beiden Drehungen um 120° ist also selbst eine Drehung um 120° , und es bilden ABC ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 13c).

4) Ist $\alpha = \beta = 180^\circ$, so verliert der Satz seine Anwendbarkeit. Da aber für eine Umwendung der Drehungssinn ohne

Bedeutung ist, so tritt in diesem Fall der vorhergehende Satz in Kraft, insbesondere Gleichung 4); das Produkt beider Umwendungen ist also eine Translation, deren Länge $2AB$ ist.

5) Eine letzte Anwendung der Formel 5a) mag die sein, daß wir sie auf *Drehspiegelungen* übertragen. Ersetzen wir $\mathfrak{A}(\alpha)$ und $\mathfrak{B}(\beta)$ durch

$$\bar{\mathfrak{A}}(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha)\mathfrak{S} \text{ und } \mathfrak{B}(\beta) = \mathfrak{S}\mathfrak{B}(\beta),$$

so bleibt (wegen $\mathfrak{S}^2 = 1$) die linke Seite ungeändert, also gilt auch die Gleichung

$$5b) \quad \bar{\mathfrak{A}}(\alpha) \cdot \bar{\mathfrak{B}}(\beta) = \mathfrak{C}(\alpha + \beta).$$

Insbesondere gilt also die obige Folgerung 2) auch in dem Fall, daß die Axen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vierzählige Axen zweiter Art sind. Das Produkt von $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ ist wiederum die Umwendung um die Axe c .

§ 3. Drehungen, deren Achsen sich schneiden. Seien $\mathfrak{A}(\alpha)$ und $\mathfrak{B}(\beta)$

zwei Drehungen, deren Achsen a und b sich schneiden; O sei ihr Schnittpunkt. Von ihnen gilt der folgende Satz:

3. Das Produkt von zwei Drehungen, deren Achsen sich in einem Punkt O schneiden, ist wiederum einer Drehung um eine durch O gehende Achse äquivalent.

Der Beweis kann in der gleichen Weise geführt werden, wie der der vorigen Formeln. Wir gehen jetzt von einer dreiseitigen körperlichen Ecke aus, deren Kanten a, b, c sein mögen; ihre Seitenflächen seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Sind wieder $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ die Spiegelungen an ihnen, so folgern wir genau wie oben

$$\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = 1.$$

Nennen wir die Winkel der dreiseitigen Ecke wiederum $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$, so folgt auch hier

$$\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{A}(\alpha), \quad \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{B}(\beta), \quad \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{C}(\gamma);$$

also auch

$$6) \quad \mathfrak{A}(\alpha) \mathfrak{B}(\beta) \mathfrak{C}(\gamma) = 1^1).$$

¹⁾ Diese Formel wurde von W. Hamilton abgeleitet; vergl. *Lectures on quaternions*, Dublin 1853, § 217 und 344.

Diese Gleichung gibt zu einem ganz analogen Satz Veranlassung, wie die obige Gleichung 5) in § 2. Wir multiplizieren sie wieder mit

$$\mathfrak{C}^{-1}(\gamma) = \mathfrak{C}(2\pi - \gamma)$$

und es ergibt sich weiter, wenn wir $2\pi - \gamma = \gamma_1$ setzen,

$$6a) \quad \mathfrak{A}(\alpha) \cdot \mathfrak{B}(\beta) = \mathfrak{C}(2\pi - \gamma) = \mathfrak{C}(\gamma_1)$$

und das ist unser Satz. Die Art, wie die Achse c durch die Achsen a und b bestimmt ist, wird am anschaulichsten, wenn wir noch um O eine Kugel legen und das sphärische Dreieck ABC betrachten, das sie mit den Achsen bestimmt (Fig. 14). In ihm ist

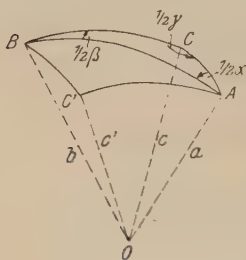


Fig. 14

$$\sphericalangle A = \alpha/2, \sphericalangle B = \beta/2, \sphericalangle C = \gamma/2;$$

der Winkel der resultierenden Drehung $\mathfrak{C}$ (nämlich γ_1) ist daher gleich dem doppelten Außenwinkel des Dreiecks ABC im Punkte C^1 .

Die beiden Drehungen sind im allgemeinen nicht vertauschbar. Sei d die Achse der resultierenden Drehung, wenn erst die Drehung um b und dann die Drehung um a erfolgt. Da jetzt die erste Drehung um b stattfindet, so haben wir die Achse d so zu zeichnen, daß in der aus b, a, d gebildeten Ecke (vgl. Fig. 14) nach Sinn und Größe

$$\sphericalangle (dba) = 1/2\beta \text{ und } \sphericalangle (bad) = 1/2\alpha$$

ist. Diese Gleichungen ergeben, daß d mit c' identisch ist;

¹⁾ Es mag auch noch der folgende geometrische Beweis des Satzes eine Stelle finden. Wir konstruieren die Gerade c' , die das Spiegelbild von c bezüglich der Ebene $\sigma_3 = (ab)$ ist; sie durchdringe die Kugel in C' . Dann ist Bogen $AC = AC'$ und $BC = BC'$ und ferner nach Sinn und Größe

$$\sphericalangle CAC' = \alpha \text{ und } \sphericalangle C'BC = \beta.$$

Wir wollen nun die Bewegungen ins Auge fassen, die die Achse c infolge der Drehungen $\mathfrak{A}(\alpha)$ und $\mathfrak{B}(\beta)$ ausführt. Durch die Drehung $\mathfrak{A}(\alpha)$ kommt sie nach c' und von hier kommt sie durch die Drehung $\mathfrak{B}(\beta)$ wieder nach c zurück. Ihre Endlage fällt also mit ihrer ersten

d. h. c und d sind verschiedene Geraden, und zwar ist d das Spiegelbild von c in bezug auf die durch a und b gehende Ebene.

Dies gestattet auch die Frage zu beantworten, unter welchen Bedingungen die Achsen c und d identisch werden. Es kann offenbar nur für solche Geraden c eintreten, die mit ihrem Spiegelbild zusammenfallen, also nur, wenn die Achse c auf der Ebene (ab) senkrecht steht. Also folgt:

4. Bei der Zusammensetzung von Drehungen hängt die resultierende Drehung im allgemeinen von der Reihenfolge ab, in der die einzelnen Drehungen ausgeführt werden.

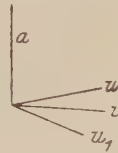


Fig. 15

Ein spezieller Fall dieses Satzes ist der, daß die Drehungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Umwendungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ um zwei Achsen u und v sind. In diesem Fall ist $\alpha_{1/2} = \beta_{1/2} = \pi/2$, und es ist daher die auf der Ebene (uv) senkrechte Gerade a die Achse der resultierenden Drehung (Fig. 15). Dies kann auch leicht direkt bewiesen werden, ganz ebenso, wie das analoge Resultat von Kap. II, § 5, wo die Achsen u und v sich insbesondere rechtwinklig schneiden. Auch der Drehungswinkel läßt sich auf diesem Wege leicht bestimmen. Die Achse

Lage zusammen, und es bedarf in der Tat nur einer Drehung um c , um den Körper S aus der Anfangslage in die Endlage zu bringen. Es ist jetzt noch der Winkel der resultierenden Drehung $\mathfrak{C}$ zu bestimmen. Dazu haben wir Anfangs- und Endlage einer durch O gehenden Geraden ins Auge zu fassen. Wir wählen dazu diejenige Gerade von S , die in der Anfangslage mit der Achse a konzidiert. Bei der Drehung um a bleibt sie in Ruhe, d. h. a und a_1 sind identisch, durch Drehung um b gelangt sie in die Endlage a_2 , so daß — wenn A_2 ihr Schnittpunkt mit der Kugel ist —

$$\sphericalangle ABA_2 = \beta \text{ und Bogen } AB = A_2B$$

ist. Der Winkel der resultierenden Drehung ist daher $\sphericalangle ACA_2 = \gamma$. Ferner sind die Dreiecke ABC und A_2BC kongruent, und so halbiert der Bogen BC den Winkel ACA_2 ; d. h. es ist

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{1}{2}\gamma,$$

in Übereinstimmung mit dem obigen Resultat. Aus dem Dreieck ABC folgt daher noch die symmetrisch gebaute Gleichung

$$\sin bc : \sin ca : \sin ab = \sin \frac{1}{2}\alpha : \sin \frac{1}{2}\beta : \sin \frac{1}{2}\gamma.$$

Auch diese Herleitung zeigt die Überlegenheit der Rechnungsmethoden.

bleibt nämlich bei der Umwendung $\mathfrak{U}$ in Ruhe, durch die Umwendung $\mathfrak{B}$ kommt sie dann in eine Lage u_1 , so daß

$$\angle(uu_1) = 2 \angle(uv)$$

ist. Also folgt:

5. Das Produkt zweier Umwendungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$, deren Achsen u und v sich schneiden, ist eine Drehung $\mathfrak{A}$ um eine zu beiden senkrechte Achse um einen Winkel, der gleich dem doppelten Winkel (uv) ist.

Aus der Gleichung

$$6b) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$$

folgt noch durch linksseitige Multiplikation mit $\mathfrak{U}$, sowie durch rechtsseitige mit $\mathfrak{B}$ — wegen $\mathfrak{U}^2 = 1$ und $\mathfrak{B}^2 = 1$ —

$$6c) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{U}\mathfrak{A}; \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

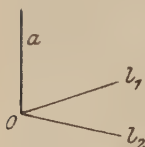


Fig. 16

§ 4. Der Eulersche Satz. Es seien S_1 und S_2 zwei Lagen eines um den festen Punkt O beweglichen Körpers, so sagt der Eulersche Satz aus, daß es stets möglich ist, den Körper S aus der Anfangslage S_1 in die Endlage S_2 durch eine einzige Drehung um eine durch O gehende Achse

überzuführen. Um dies zu beweisen, fassen wir Anfangslage und Endlage irgend einer durch O gehenden Geraden l von S ins Auge und bezeichnen sie durch l_1 und l_2 . Diese Geraden bestimmen (Fig. 16) eine Ebene; sei a die durch O gehende Normale dieser Ebene und α der Winkel $(l_1 l_2)$. Wir nehmen nun den Körper S zunächst in der Anfangslage S_1 an und lassen um die Gerade a eine Drehung $\mathfrak{A}(\alpha)$ vom Winkel α eintreten. Dadurch gelangt offenbar l_1 nach l_2 , d. h. die Gerade l in ihre Endlage; es bedarf daher nur noch einer gewissen Drehung $\mathfrak{Q}$ um die Gerade l_2 , um den Körper S in die Endlage S_2 zu bringen.

Der Übergang des Körpers S aus der Lage S_1 in die Lage S_2 kann daher durch die zwei aufeinander folgenden Drehungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Q}$ vermittelt werden. Diese beiden Drehungen sind aber, wie eben bewiesen, einer einzigen Drehung um eine durch O gehende Achse c äquivalent; so ergibt sich der folgende *Hauptsatz* (Eulerscher Satz):

6. Ein um einen festen Punkt O beweglicher Körper S kann aus einer beliebigen Anfangslage S_1 in eine beliebige Endlage S_2 vermittle einer einzigen Drehung um eine durch O gehende Achse übergeführt werden.

Damit ist zugleich im Sinne von Kap. I, § 1 die einfachste typische Bewegung eines um einen festen Punkt beweglichen Körpers ermittelt. Wir werden nun die gleiche Aufgabe für einen beliebig beweglichen Körper behandeln.

§ 5. Die drei typischen Formen der Bewegungen¹⁾. Seien jetzt S_1 und S_2 irgend zwei Lagen eines Körpers S , und A_1 und A_2 die zwei entsprechenden Lagen eines Punktes A von S . Man lasse zunächst eine Translation $\mathfrak{T}$ eintreten, die vektoriell durch die Strecke $A_1 A_2$ bestimmt ist; sie bringt den Körper S in eine solche Lage, daß der Punkt A_1 auf A_2 fällt, also in seine Endlage gelangt. Um daher den Körper S selbst in die Endlage S_2 zu bringen, bedarf es nur noch einer Drehung $\mathfrak{A}$ um eine durch A_2 gehende Achse a . Für die Bewegung $\mathfrak{R}$, die den Körper aus der Anfangslage in seine Endlage überführt, haben wir also zunächst

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{T}\mathfrak{A}.$$

Nun können wir (Kap. II, § 5) die Translation $\mathfrak{T}$ wieder in zwei andere zerlegen, von denen die eine parallel zur Achse a läuft, die andere senkrecht zu ihr gerichtet ist. Nennen wir sie $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_a$, so besteht die Gleichung

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{T}\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_a \mathfrak{T}_n \mathfrak{A}.$$

Aber nach Satz 1a ist $\mathfrak{T}_n \mathfrak{A}$ einer Drehung $\mathfrak{A}_1$ um eine zu a parallele Achse a_1 äquivalent; folglich ergibt sich schließlich

$$7) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{T}_a \mathfrak{A}_1,$$

d. h.

7. Jede Ortsveränderung allgemeinsten Art kann durch eine Translation und eine Drehung um eine zur Translation parallele Achse vermittelt werden.

¹⁾ Von Figuren ist hier und in § 6 abgesehen worden, da nur die qualitative Bestimmung der Operationen in Frage steht.

Der Herleitung nach hat zuerst die Translation und dann die Drehung einzutreten. Die Aufeinanderfolge beider Bewegungen ist aber, wie in Kap. II, § 5 bewiesen wurde, vertauschbar. Es ist daher auch gestattet, beide Bewegungen gleichzeitig eintreten zu lassen. Gehen sie überdies gleichförmig vor sich, und zwar so, daß sie gleichzeitig beginnen und endigen, so verschmelzen sie zu einer *Schraubung* um die Achse a . Wir gelangen damit zu folgendem *Hauptsatz*:

8. *Jede Ortsveränderung allgemeinsten Art eines Körpers S kann dadurch vermittelt werden, daß man ihn eine bestimmte Schraubenbewegung um eine gewisse Gerade des Raumes als Achse ausführen läßt¹⁾.*

Da die Schraubung sich als allgemeinsten Typus räumlicher Ortsveränderungen herausgestellt hat, so muß sie die speziellen Bewegungen, nämlich Translation und Drehung unter sich enthalten. In der Tat geht sie in die erste und letzte über, wenn der Drehungswinkel ω oder die Translationskomponente t den Wert Null hat.

Wir schließen mit dem zusammenfassenden Satz:

9. *Schraubung, Drehung und Translation sind die drei einzigen einfachen Typen der Bewegungen.*

§ 6. Die typischen Formen der Operationen zweiter Art. Wir beginnen mit solchen, die einen Punkt fest lassen. Seien also S und S' zwei spiegelbildlich gleiche Körper von der Art,

¹⁾ Wenn auch das geometrische Interesse an diesem Hauptsatz hier in den Hintergrund tritt, so soll doch sein geometrischer Inhalt näher erörtert werden. Er ist folgendermaßen zu verstehen. Sind S_1 und S_2 zwei verschiedene Lagen des Körpers S , so ist durch sie eine Achse a , ein Winkel α , eine Strecke t , und damit auch die Ganghöhe p vollständig bestimmt. (Für die Konstruktion dieser Größen verweise ich auf die Lehrbücher über Kinematik und Mechanik.) Man wähle sich nun eine Schraubenmutter nebst Schraubenspindel so aus, daß ihre Ganghöhe die Länge p hat, und bringe sie in eine solche Lage, daß die Schraubenachse mit der Geraden a , zusammenfällt. Wird nun der Körper S_1 mit der Schraubenspindel fest verbunden, wird sodann die Schraubenmutter im Raum festgehalten, dagegen die Schraubenspindel um die letztere herumbewegt, so geht dabei der mit der Schraubenspindel verbundene Körper S_1 nach der Drehung um den Winkel α in den Körper S_2 über.

daß ein Punkt O mit dem entsprechenden Punkt $\bar{O}$ vereinigt liegt. Unterwerfen wir den Körper S zunächst einer Inversion gegen O , so wird er in eine Lage S_1 gelangen, und da jetzt S_1 und S kongruente Figuren sind, so bedarf es nach dem Eulerschen Satz nur noch einer Drehung $\mathfrak{A}(\alpha)$, um S_1 in $\bar{S}$ überzuführen. Das Produkt

$$8) \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{A}$$

führt daher S in $\bar{S}$ über. Gemäß Kap. II, § 5 ist aber dieses Produkt einer Drehspiegelung um a äquivalent; also folgt:

10. *Die allgemeine typische Operation zweiter Art, die einen Punkt fest läßt, ist die Drehspiegelung.*

Wie wir früher schon erwähnten (Kap. I, § 2), schließt sie die Spiegelung und die Inversion als Sonderfälle ein; den Winkelwerten 0 und π entsprechend.

Wir gehen nun zum allgemeinsten Fall über. Seien wieder S und $\bar{S}$ die spiegelbildlich gleichen Körper und sei $\mathfrak{Q}$ eine Operation, die S nach $\bar{S}$ bringt. Seien ferner A und $\bar{A}$ zwei entsprechende Punkte, so erteile man dem Körper S zunächst eine Translation $\mathfrak{T} = A\bar{A}$. Sie führt A nach $\bar{A}$ über, und es bedarf daher, um S mit $\bar{S}$ zur Deckung zu bringen, wie wir eben sahen, nur noch einer Drehspiegelung. Bezeichnen wir sie durch $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$, so ergibt sich für die Gesamtoperation $\mathfrak{Q}$ zunächst, daß sie dem Produkt aus $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ äquivalent ist; es folgt also zunächst

$$9) \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{A}.$$

Damit ist der allgemeine Ausdruck der Operation $\mathfrak{Q}$, die S nach $\bar{S}$ bringt, bereits gewonnen.

Wir erörtern zunächst den Sonderfall, daß der Drehungswinkel $\alpha = 0$ ist. Alsdann hat $\mathfrak{Q}$ den Wert

$$10) \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{T}\mathfrak{S}.$$

Ersetzen wir nun $\mathfrak{T}$ durch zwei andere Translationen $\mathfrak{T}_s$ und $\mathfrak{T}_n$, die parallel und senkrecht zur spiegelnden Ebene σ gerichtet sind, so folgt

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}_s \mathfrak{T}_n \mathfrak{S},$$

und da $\mathfrak{T}_n \mathfrak{S}$ (Kap. II, Gl. 11 a) einer Spiegelung $\mathfrak{S}_1$ an einer zu σ parallelen Ebene σ_1 äquivalent ist, so ergibt sich schließlich

$$11) \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{T}_s \mathfrak{S}_1,$$

wo die Translation $\mathfrak{T}_s$ der spiegelnden Ebene σ_1 parallel läuft. Die Operation $\mathfrak{Q}$ ist also eine *Gleitspiegelung*.

Ist zweitens $\mathfrak{A}$ eine eigentliche Drehung, so kann man genau wie eben, $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ zunächst durch $\mathfrak{T}_s\mathfrak{S}_1$ ersetzen; oder aber auch, da $\mathfrak{T}_s$ und $\mathfrak{S}_1$ vertauschbare Operationen sind (Kap. II, § 5), durch $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_s$ und erhält

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_s\mathfrak{A}.$$

Hier steht $\mathfrak{T}_s$ auf a senkrecht, also können wir $\mathfrak{T}_s\mathfrak{A}$ nach Satz 2) durch $\mathfrak{A}_1$ ersetzen, wo $\mathfrak{A}_1$ eine Drehung um eine gewisse zu a parallele Achse a_1 ist, und finden so

$$12) \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{S}_1\mathfrak{A}_1.$$

Die Operation $\mathfrak{Q}$ ist also eine Drehspiegelung, deren Achse und Ebene a_1 und σ_1 sind. Wir erhalten daher folgendes Gesamtergebnis:

11. Es gibt zwei verschiedene Gattungen von einfachen Operationen zweiter Art. Entweder sind sie solche Operationen zweiter Art, die einen Punkt unverändert lassen¹⁾, oder sie sind einer Spiegelung in Verbindung mit einer zur spiegelnden Ebene parallelen Translation, d. h. einer Gleitspiegelung, äquivalent.

Damit sind wir zu den vier in Kap. I genannten Typen gelangt.

Bemerkung. Die typischen Formen der Operationen zweiter Art stehen denjenigen, die wir für die Bewegungen ermittelt haben, parallel zur Seite. Beide Arten von Operationen teilen sich nämlich in zwei Klassen, in solche, die — mindestens — einen Raumpunkt unverändert lassen, und solche, für die es nicht der Fall ist. Für die Bewegungen wird die erste Klasse aus den Drehungen, die zweite aus den Schraubungen gebildet; für die Operationen zweiter Art gehört in die erste Klasse die Spiegelung, die Inversion und die Drehspiegelung, in die zweite Klasse die Gleitspiegelung. In beiden Fällen bestehen die Operationen der zweiten Klasse aus einer einfachsten Operation der ersten Klasse in Verbindung mit einer Translation; und wie bei der Schraubung die Translationskomponente der Drehungsachse parallel ist, so ist die Translationskomponente der Gleitspiegelung der spiegelnden Ebene parallel. Endlich ist die allgemeinste Operation der zweiten Klasse in beiden Fällen dadurch ausgezeichnet, daß ihre Komponenten vertauschbare Operationen sind. Dies trifft sowohl für die Schraubung wie für die Gleitspiegelung zu.

¹⁾ Er braucht dem oben betrachteten Körper S keineswegs anzugehören.

Kap. IV. Hilfssätze über Operationen erster und zweiter Art¹⁾

§ 1. **Produkte von Operationen erster Art mit Translationen.** Die in Kap. II und III abgeleiteten Sätze über die Zusammensetzung von Operationen bedürfen der Ausdehnung auf Operationen irgendwelcher Art. Wir beginnen mit denen, die die Zusammensetzung mit Translationen betreffen. Bisher wurden nur Produkte von Drehungen mit solchen Translationen erörtert, die auf den Drehungsachsen senkrecht stehen, wir haben aber auch Translationen beliebiger Richtung, sowie auch Schraubungen in Betracht zu ziehen. Alle abzuleitenden Resultate ergeben sich auf Grund einfachster Rechnungen.

Wir knüpfen an die Formel 2b) und 2c) des vorigen Kapitels an. Wir können sie in die Form setzen:

$$1) \quad \mathfrak{T}_n \mathfrak{B}(\omega) = \mathfrak{A}(\omega) \quad \text{und} \quad 1a) \quad \mathfrak{A}(\omega_1) \mathfrak{T}_n = \mathfrak{B}(\omega_1),$$

und zwar sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Drehungen um *parallele* Achsen, und $\mathfrak{T}_n$ ist eine zu den Achsen *senkrechte* Translation. Sei nun $\mathfrak{T}$ eine beliebige Translation, so zerlegen wir sie in die zwei Komponenten $\mathfrak{T}_a$ und $\mathfrak{T}_n$ in der Weise, daß $\mathfrak{T}_n$ zur Achsenrichtung normal ist, und $\mathfrak{T}_a$ zu ihr parallel. Es ist dann

$$2) \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_a \mathfrak{T}_n = \mathfrak{T}_n \mathfrak{T}_a;$$

ferner sei t_a die Länge von $\mathfrak{T}_a$. Wir multiplizieren nun die Gleichung 1) linksseitig und die Gleichung 1a) rechtsseitig mit $\mathfrak{T}_a$ und erhalten wegen 2) unmittelbar

$$3) \quad \mathfrak{T} \mathfrak{B}(\omega) = \mathfrak{T}_a \mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{A}(\omega, t_a) \quad \text{und}$$

$$3a) \quad \mathfrak{A}(\omega_1) \mathfrak{T} = \mathfrak{B}(\omega_1) \mathfrak{T}_a = \mathfrak{B}(\omega_1, t_a),$$

und dies stellt bereits das erste abzuleitende Resultat dar. Wir finden also:

1. *Das Produkt aus einer Drehung und einer beliebigen Translation ist eine Schraubung um eine parallele Achse vom gleichen Winkel.*

¹⁾ Der Inhalt dieses Kapitels kommt erst für die späteren Entwicklungen (Kap. IX ff.) in Betracht.

Wie das vorstehende zeigt, hängt die Lage der resultierenden Achse nur von der zur Achsenrichtung senkrechten Komponente $\mathfrak{T}_n$ ab, und bestimmt sich daher nach den Sätzen von Kap. III, § 1.

Als Beispiel behandeln wir das Produkt einer Umwendung $\mathfrak{U}$ in eine Translation $\mathfrak{T}$ beliebiger Art, die vektoriell durch OT dargestellt sei (Fig. 17). Wir zerlegen $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_u$ und finden

$$3b) \quad \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{T} = \mathfrak{U} \mathfrak{T}_n \cdot \mathfrak{T}_u = \mathfrak{U}_1(\pi, t_u),$$

und zwar ist die Achse u_1 zu u parallel und hat von ihr (Kap. III, § 1) den Abstand $\frac{1}{2} t_n$; sie geht also durch den Halbierungspunkt T_1 von OT hindurch. $\mathfrak{U}_1(\pi, t_u)$ ist daher eine Umschraubung um diese Achse.

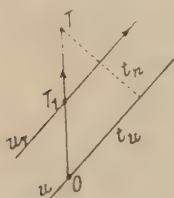


Fig. 17

Man kann die so erhaltenen Formeln noch weiter verallgemeinern; zunächst so, daß man im Satz 1) die Drehung $\mathfrak{A}$ durch eine Schraubung $\mathfrak{A}(\omega, t)$ ersetzt. Man erhält z. B., wenn man an das vorstehende Beispiel anknüpft,

$$\mathfrak{U}(\pi, t) \mathfrak{T}_n = \mathfrak{U} \mathfrak{T}_n \mathfrak{T} = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{T} = \mathfrak{U}_1(\pi, t_u),$$

wo u_1 wieder den Abstand $\frac{1}{2} t_n$ von u hat. Die weiteste Verallgemeinerung erhalten wir, indem wir sofort eine zur Gleichung 4d) von Kap. III analoge Formel ableiten. Seien also $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ beliebige Translationen und sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\omega, t) = \mathfrak{A}(\omega) \cdot \mathfrak{T}$$

irgendeine Schraubung, dann hat man offenbar

$$\mathfrak{T}' \mathfrak{A} \mathfrak{T}'' = \mathfrak{T}'_a \mathfrak{T}'_n \mathfrak{A} \mathfrak{T}_n'' \mathfrak{T}_a'',$$

oder aber, da $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_n''$ vertauschbare Operationen sind,

$$\mathfrak{T}' \mathfrak{A} \mathfrak{T}'' = \mathfrak{T}'_a \mathfrak{T}'_n \mathfrak{A} \mathfrak{T}_n'' \mathfrak{T}_a''.$$

Hieraus folgt gemäß der eben genannten (Gl. 4d) weiter

$$3c) \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}' \mathfrak{A} \mathfrak{T}'' &= \mathfrak{T}'_a \mathfrak{B}(\omega) \mathfrak{T}_a'' \\ &= \mathfrak{B}(\omega, t + t'_a + t''_a), \end{aligned}$$

und zwar sind t'_a und t''_a die zu a parallelen Komponenten von $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$, und die Achse von $\mathfrak{B}$ ist zu a parallel. Ihre Lage hängt wieder nur von den normalen Komponenten t'_n und t''_n von $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ ab. Es folgt also:

1a. Das Produkt aus einer Schraubung und beliebigen Translationen ist eine Schraubung vom gleichen Winkel um eine parallele Achse.

Endlich haben wir auch die Gleichung 5a) von Kap. III auf Schraubungen auszudehnen. Sind $\mathfrak{A}(\alpha, t_a)$ und $\mathfrak{B}(\beta, t_b)$ zwei Schraubungen um parallele Achsen, so folgt zunächst

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{T}_a \mathfrak{A}(\alpha) \cdot \mathfrak{B}(\beta) \mathfrak{T}_b,$$

also gemäß Kap. III, Gl. 5a) weiter

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{T}_a \mathfrak{C}(\alpha + \beta) \mathfrak{T}_b.$$

Hier sind $\mathfrak{T}_a$ und $\mathfrak{T}_b$ zur Achse c parallel, also erhalten wir schließlich

$$3d) \quad \mathfrak{A}(\alpha, t_a) \mathfrak{B}(\beta, t_b) = \mathfrak{C}(\alpha + \beta, t_a + t_b).$$

Die Translationskomponente von $\mathfrak{C}$ ist also gleich der Summe der Translationskomponente von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

§ 2. Produkte von Schraubungen. Wir wollen den Satz über Produkte von Drehungen auf Schraubungen übertragen. Wir gehen von zwei Drehungen $\mathfrak{A}'(\alpha)$ und $\mathfrak{B}'(\beta)$ aus, deren Achsen a' und b' durch einen Punkt O' gehen mögen, so lautet die dortige Gleichung (Kap. III, 6a)

$$4) \quad \mathfrak{A}'(\alpha) \cdot \mathfrak{B}'(\beta) = \mathfrak{C}'(\gamma_1),$$

wo auch c' durch O' geht, und γ_1 gemäß § 3 des vorigen Kapitels von α und β abhängt. Seien nun

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\alpha, t_a) \text{ und } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\beta, t_b) = \mathfrak{B}'(\beta) \cdot \mathfrak{T}_b$$

zwei Schraubungen, deren Achsen a und b zu a' und b' parallel sind, aber im übrigen beliebige Lage haben. Dann ist ihr Produkt jedenfalls eine Bewegung, also gemäß Kap. III, § 5 im allgemeinen eine Schraubung; wir behaupten, daß wir setzen können

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\gamma_1, t_c),$$

wo also die Achse $c \parallel c'$ ist, und γ_1 der in Gleichung 6) enthaltene Winkel¹⁾.

Sei nämlich O' ein Punkt der Achse b und O derjenige Punkt, der durch die Schraubung $\mathfrak{A}$ nach O' gelangt; ferner sei

¹⁾ Vgl. die Anmerkung über den Drehungssinn auf S. 29.

$\mathfrak{T}$ die Translation OO' . Dann stellt das Produkt $\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{U}$ eine Bewegung dar, die den Punkt O' fest läßt; sie ist also eine Drehung, und gemäß § 1 eine Drehung $\mathfrak{U}'(\alpha)$ um eine zu a parallele Achse a' . Wir erhalten daher

$$\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}', \text{ also } \mathfrak{U} = \mathfrak{T}\mathfrak{U}'$$

und finden weiter

$$\mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\mathfrak{U}'(\alpha) \cdot \mathfrak{B}'(\beta)\mathfrak{T}_b.$$

Hier sind $\mathfrak{U}'(\alpha)$ und $\mathfrak{B}'(\beta)$ Drehungen, deren Achsen beide durch O' gehen; es gilt also für sie die Gleichung 6) und wir erhalten

$$5) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\mathfrak{C}'(\gamma)\mathfrak{T}_b.$$

Auf das rechts stehende Produkt haben wir jetzt nur noch den Satz 1a) anzuwenden; es ist nach ihm eine Schraubung $\mathfrak{C}$

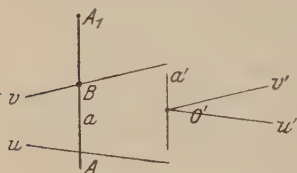


Fig. 18

vom Winkel γ um eine zu c' parallele Achse c . Ihre Translationskomponente bestimmt sich gemäß Satz 1a, ist aber hier ohne Belang. Damit ist unsere Behauptung erwiesen. Wir wollen das Resultat in der folgenden Form aussprechen.

2. *Das Produkt zweier Schraubungen ist wiederum eine Schraubung. Ihre Achsenrichtung und ihr Drehungswinkel bestimmen sich nach den Gleichungen über die Zusammensetzung von Drehungen, sind also von den Gleitungskomponenten der Schraubungen und der besonderen Lage der Schraubenachsen unabhängig.*

Der Satz gilt naturgemäß auch dann, wenn eine oder auch beide Schraubungen Drehungen sind.

§ 3. Ein Beispiel. Seien

$$6) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\pi) \text{ und } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\pi)$$

zwei Umwendungen, deren Achsen u und v windschief zueinander liegen (Fig. 18); der spitze Winkel, den sie bilden, sei ω . Um das Produkt $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ zu bestimmen, haben wir zunächst den entsprechenden Satz für zwei Umwendungen $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{B}'$ in Betracht zu ziehen, deren Achsen u' und v' sich in einem Punkt O' schneiden und zu u und v parallel sind, so daß also $(u'v') = \omega$

ist. Für zwei solche Umwendungen besteht die Gleichung (Kap. III, § 4)

$$7) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'(2\omega),$$

wo die Achse a' auf der Ebene $(u'v')$ senkrecht steht. Nach Satz 2 stellt daher das Produkt $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ eine Schraubung vom Winkel 2ω um eine zu a' parallele Achse a dar. Diese Achse ist noch zu bestimmen. Wir können dies hier direkt ausführen. Es liegt nahe zu vermuten, daß sie in die Gerade kürzesten Abstandes von u und v fällt, und dies trifft auch zu. Diese Gerade ist zunächst zu u und v senkrecht und daher zu a' parallel. Ferner geht sie sowohl durch die Umwendung $\mathfrak{U}$, wie auch durch die Umwendung $\mathfrak{B}$ in sich über; die Bewegung $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ läßt sie daher in sich gleiten, und sie ist mithin wirklich die Achse der resultierenden Schraubung.

Auch die Gleitungskomponente t dieser Schraubung läßt sich im vorliegenden Fall leicht bestimmen. Seien A und B die Schnittpunkte der Schraubenachse a mit u und v . Wir suchen die Endlage des Punktes A . Bei der Umwendung $\mathfrak{U}$ bleibt er in Ruhe, die Umwendung um v bringt ihn an eine Stelle A_1 , so daß

$$AB = BA_1, \text{ also } AA_1 = 2AB = t$$

ist. Es ist also

$$7a) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(2\omega, t) = \mathfrak{A}(2\omega, 2AB); \text{ d. h.}$$

3. Das Produkt zweier Umwendungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$, deren Achsen u und v den spitzen Winkel ω einschließen, ist eine Schraubung vom Winkel 2ω , deren Achse in das gemeinsame Lot von u und v fällt, und deren Gleitungskomponente gleich der doppelten Länge dieses Lotes ist.

§ 4. Produkte von Translationen und Operationen zweiter Art. Zunächst sollen die Formeln 11) und 11a) von Kap. II verallgemeinert werden. Sie lauten, wenn $\mathfrak{T}_n$ die zur spiegelnden Ebene σ senkrechte Translation ist,

$$8) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{T}_n = \mathfrak{S}_1 \text{ und } \mathfrak{T}_n\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}.$$

Sei nun wieder $\mathfrak{T}$ irgendeine Translation. Wir zerlegen sie in die Komponenten $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_\sigma$, wo $\mathfrak{T}_\sigma$ zur Ebene σ parallel ist, so daß also

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_n \mathfrak{I}_\sigma = \mathfrak{I}_\sigma \mathfrak{I}_n$$

ist. Multiplizieren wir dann die vorstehenden Formeln 4) rechtsseitig bezüglich linksseitig mit $\mathfrak{I}_\sigma$, so folgt

$$8a) \quad \mathfrak{S} \mathfrak{I} = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{I}_\sigma = \mathfrak{S}_1(t_\sigma),$$

$$8b) \quad \mathfrak{I} \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{I}_\sigma \mathfrak{S} = \mathfrak{S}(t_\sigma); \text{ d. h.}$$

4. Das Produkt einer Spiegelung mit einer beliebigen Translation ist eine Gleitspiegelung an einer Ebene σ_1 , die zur spiegelnden Ebene parallel ist.

Auch hier hängt die Lage dieser Ebene σ_1 nur von der in $\mathfrak{I}$ enthaltenen Normalkomponente $\mathfrak{I}_n$ ab und bestimmt sich nach den Sätzen von Kap. II, § 4. Die Entfernung beider Ebenen ist also gleich der *Hälfte* dieser Komponente.

Diese Formeln können wir wiederum so verallgemeinern, daß wir die Spiegelung $\mathfrak{S}$ durch eine Gleitspiegelung $\mathfrak{S}(t')$ ersetzen. Wir erhalten, analog zu Gl. 4a), da $\mathfrak{S}(t') = \mathfrak{I}' \mathfrak{S}$ ist, sofort

$$8c) \quad \mathfrak{S}(t') \mathfrak{I} = \mathfrak{I}' \mathfrak{S} \mathfrak{I}_n \mathfrak{I}_\sigma = \mathfrak{I}' \mathfrak{S}_1 \mathfrak{I}_\sigma = \mathfrak{S}_1(t' + t_\sigma),$$

und ebenso ergibt sich die Verallgemeinerung von 4b). Der Satz 4) überträgt sich also auch auf Gleitspiegelungen, und zwar in der Weise, daß die Gleitspiegelungskomponente t' die Lage der Ebene σ_1 nicht beeinflußt.

Endlich haben wir das Produkt aus einer Translation $\mathfrak{I}$ und einer Drehspiegelung $\mathfrak{A}(\omega)$ zu behandeln. Wir erhalten gemäß Gl. 1) und 2) zunächst

$$\mathfrak{I} \mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{I}_a \mathfrak{I}_n \mathfrak{A}(\omega) \mathfrak{S} = \mathfrak{I}_a \mathfrak{B}(\omega) \mathfrak{S}_1,$$

wo $b \parallel a$ und $\sigma_1 \parallel \sigma$ ist, und damit auch b senkrecht zu σ_1 . Nun ist $\mathfrak{I}_a$ mit $\mathfrak{B}(\omega)$ vertauschbar, also folgt weiter (nach Gl. 4)

$$\mathfrak{I} \mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{B}(\omega) \mathfrak{I}_a \mathfrak{S} = \mathfrak{B}(\omega) \mathfrak{S}_1,$$

oder endlich, da b und σ_1 aufeinander senkrecht stehen,

$$9) \quad \mathfrak{I} \mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{B}(\omega).$$

Derselbe Schluß läßt sich für $\mathfrak{A}(\omega) \mathfrak{I}$ durchführen, also folgt:

5. Das Produkt aus einer Translation und einer Drehspiegelung ist eine Drehspiegelung vom gleichen Winkel um eine parallele Achse.

Auf alle vorstehenden Sätze und Formeln übertragen sich die Bemerkungen von Kap. III, § 1 über ihre doppelte Be-

deutung und Anwendbarkeit. Eine gemeinsame Eigenschaft, die in ihnen hervortritt, ist noch die, daß die Lage der Achse b in § 1 und 4 in allen Fällen nur vom Winkel ω und von der Komponente $\mathfrak{T}_n$ abhängt. Dies sprechen wir wie folgt als Satz aus:

6. *Bei der Zusammensetzung einer Drehung, Schraubung oder Drehspiegelung mit einer Translation hängt die Lage der neuen Achse in übereinstimmender Weise vom Drehungswinkel ω und der zur Achse senkrechten Translationskomponente ab.*

§ 5. **Isomorphe Operationen.** In den vorstehenden Sätzen tritt übereinstimmend ein und derselbe eigenartige Umstand hervor. Bei der Multiplikation von Operationen erster und zweiter Art miteinander und mit Translationen kommt den Achsenrichtungen und dem Drehungswinkel, ebenso den Richtungen der spiegelnden Ebenen eine Art bevorzugter Stellung zu; die Translationen und Translationskomponenten sind auf sie ohne Einfluß. Der Inhalt von Satz 2) und 6) hat dem schon einen direkten Ausdruck gegeben. Dies legt die Einführung eines neuen Begriffs nahe, den wir folgendermaßen definieren:

7. *Schraubungen und Drehungen, die in der Achsenrichtung und im Drehungswinkel übereinstimmen, heißen isomorphe Bewegungen. Ihre Achsen heißen isomorphe Achsen.*

7a. *Operationen zweiter Art heißen isomorph, wenn sie in der Achsenrichtung, in der Richtung der spiegelnden Ebene und im Drehungswinkel übereinstimmen. Ihre Achsen und Ebenen heißen isomorphe Achsen und Ebenen.*

Die Inversionen sind hier nur scheinbar ausgeschlossen. Eine Inversion ist nämlich eine Operation vom Winkel π um eine unbestimmte Achse, nach obiger Definition kann ihr also nur eine Operation vom Winkel π um eine gleichfalls unbestimmte Achse isomorph sein, also wieder eine Inversion. D. h.

8. *Alle Inversionen sind isomorphe Operationen und umgekehrt.*

Mittels dieses Begriffs nehmen die bisher abgeleiteten Sätze die folgende einfache Form an:

Wird eine Schraubung oder Drehung $\mathfrak{U}$ mit einer Translation multipliziert, so ist das Produkt eine zu $\mathfrak{U}$ isomorphe Bewegung.

Wird eine Drehspiegelung $\mathfrak{A}$ mit einer Translation multipliziert, so ist das Produkt eine zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Drehspiegelung.

Wird eine Spiegelung oder Gleitspiegelung mit einer Translation multipliziert, so ist das Produkt eine isomorphe Operation.

Besonders wichtig ist die Form, die Satz 2) annimmt. In den Gleichungen 6) und 7) sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, sowie $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, aber auch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ isomorphe Bewegungen; in diesem Fall sind also mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ auch die Produkte $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{A'B'}$ isomorphe Bewegungen.

Dies läßt sich auf Operationen jeder Art und ihr Produkt übertragen. Wir beweisen zuvor den folgenden Hilfssatz:

Das Produkt von zwei isomorphen Operationen von entgegengesetztem Sinn ist eine Translation.

Dieser Satz ist nur ein anderer Ausdruck der verschiedenen, in § 1 und § 4 abgeleiteten Gleichungen. Jede dieser Gleichungen hat die Form

$$\mathfrak{L}\mathfrak{T} = \mathfrak{L}_1 \text{ oder } \mathfrak{T}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1,$$

wo $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ isomorphe Operationen sind. Durch Multiplikation mit $\mathfrak{L}^{-1}$ folgt hieraus

$$\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{T}$$

und dies ist der Satz. Da in den genannten Formeln $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ sowohl Drehungen und Schraubungen, wie Drehspiegelungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen sein können, so ist damit der Satz für alle Arten von Operationen erwiesen.

Seien nun $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ irgendwelche Operationen, und $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{M}_1$ zwei andere, die ihnen isomorph sind; dann haben wir nach unserm Hilfssatz

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{T}_2$$

oder auch

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{T}_2$$

und hieraus folgt weiter

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{T}_2.$$

In der Tat ist also auch $\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1$ isomorph zu $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$; d. h.

9. Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$, ebenso $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ isomorphe Operationen, so sind auch die Produkte $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1$ isomorph.

Kap. V. Der Gruppenbegriff und die Kristallklassen mit bloßer Achsensymmetrie

Vorbemerkung. Die Einteilung der Kristalle nach der Symmetrie wird für das Folgende vorausgesetzt; ebenso die Existenz der Kristallsysteme und ihrer 32 Unterabteilungen (Kristallklassen). Sie beruht auf der erfahrungsgemäß festgestellten Tatsache, daß die kristallographischen Symmetrieachsen nur 2-, 3-, 4- und 6-zählig sind. Wir werden diese Tatsache zunächst gleichfalls zugrunde legen und von ihr aus eine kurze Aufzählung der 32 Klassen vornehmen. Hauptaufgabe der beiden folgenden Kapitel wird es aber sein, die inneren Zusammenhänge dieser Klassen ans Licht zu ziehen, und einen Weg zu suchen, auf dem man nach einheitlicher Methode organisch und genetisch zu ihnen gelangt. Diesen Weg werden wir auch bei der Aufzählung der Strukturbilder zu beschreiten haben.

Darüber hinaus bedürfen wir noch einer Übersicht über die *gesamten* an sich möglichen Verbindungen von Symmetrieeigenschaften, die einer geometrischen Figur eigen sein können; es ist die Frage nach der Gesamtheit *aller Klassen symmetrischer Polyeder*, die hier hineinspielt. Ihre Kenntnis ist uns für die spätere Lösung der strukturellen Fragen ebenfalls notwendig; wir werden daher auch sie in den Bereich unserer Untersuchungen ziehen müssen. Die Beantwortung erfordert keine neuen Hilfsmittel; sie ist auf dem eben genannten Wege in einfacher Weise erreichbar.

§ 1. Symmetriecharakter und Deckoperationen. Jede Symmetrieeigenschaft einer Kristallklasse kommt in einer gewissen Deckoperation der zugehörigen einfachen Kristallform zum Ausdruck; die Deckoperation ist stets eine solche, die den Mittelpunkt der Kristallform fest läßt. Hierfür bestehen die folgenden Gesetze, auf die kurz hingewiesen werden soll:

1) Als Deckoperationen, die einen Punkt festlassen, fanden wir Drehung (typische Operation erster Art) und Spiegelung, Inversion, Drehspiegelung (typische Operationen zweiter Art). Der

Drehung entspricht eine *Symmetrieachse* (Achse erster Art), der Spiegelung eine *Symmetrieebene*, der Inversion ein *Symmetriezentrum* und der Drehspiegelung eine *Symmetrieachse zweiter Art*. Wir unterscheiden sie auch als Symmetrieeigenschaften *erster* und *zweiter* Art.

2) Die Symmetrieachsen unterscheiden wir in *einseitige* und *zweiseitige*. Dieselbe Unterscheidung gilt für jede durch das Zentrum der Kristallform gehende Gerade. Jede Achse und jede Gerade besteht aus zwei Hälften entgegengesetzter Richtung. Sind beide Richtungen kristallographisch gleichwertig, gibt es also Deckoperationen, durch die sie miteinander zur Koinzidenz kommen, so heißt die Achse zweiseitig; ist dies nicht der Fall, so heißt die Achse einseitig.

3) Hat die allgemeine einfache Kristallform N Flächen, so gibt es auch N Deckoperationen der entsprechenden Kristallklasse; jede einzelne dieser Flächen kommt durch die N verschiedenen Deckoperationen genau mit den sämtlichen N Flächen der Kristallform (sie selbst eingeschlossen) zur Deckung.

4) Statt der Flächen der Kristallform kann man auch die N Lote in Betracht ziehen, die man vom Zentrum auf die N Flächen fällen kann. Sie stellen ebenfalls eine geometrische Figur dar, die durch die Deckoperationen in sich übergeht und mit der ihnen entsprechenden Symmetrie behaftet ist.

§ 2. Das mathematische Grundtheorem. Für die Deckoperationen einer und derselben Kristallform bestehen Sätze von *grundlegender Bedeutung*, zu denen wir nun übergehen. Der Einfachheit halber lassen wir die Art der Figur, die durch die Deckoperationen in sich übergeht, ganz außer Betracht. Wir beginnen mit dem folgenden *Hauptsatz*:

1. Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ Deckoperationen einer Figur, so ist auch das Produkt $\mathfrak{LM}$ eine Deckoperation.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition. Lassen wir nämlich die Operation $\mathfrak{L}$ eintreten, so geht die Figur nach Annahme in sich über; tritt nun $\mathfrak{M}$ ein, so findet dasselbe statt; es führt also in der Tat auch das Produkt $\mathfrak{LM}$ die bezügliche Figur in sich über.

Insbesondere erwähnen wir noch als einfache Folge des obigen Satzes:

1a. *Jede Potenz einer Deckoperation ist selbst eine Deckoperation.*

So einfach und durchsichtig der Satz 1 ist, so ist er doch, wie bereits erwähnt wurde, von fundamentaler Bedeutung. Um dies ins rechte Licht zu setzen, erinnern wir daran, daß das Produkt $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ stets einer einzigen, von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ *verschiedenen* Operation $\mathfrak{N}$ äquivalent ist. In ihr werden wir daher im allgemeinen eine *neue* Deckoperation der Figur zu erblicken haben. Nunmehr läßt sich der Satz auf jede der Operationen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ anwenden; wir sehen also, daß durch die Deckoperationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ sofort eine ganze Reihe weiterer Deckoperationen der Figur bestimmt wird.

Betrachten wir z. B. ein gerades Parallelepipeton mit quadratischer Grundfläche und die acht Geraden, die seinen Mittelpunkt mit den acht Ecken verbinden. Das Parallelepipeton gestattet einerseits eine Spiegelung $\mathfrak{S}$ gegen eine Ebene, die parallel zu seiner Grundfläche durch den Mittelpunkt geht, andererseits eine Umwendung $\mathfrak{U}$ um seine Höhe. Es muß daher dem vorstehenden Satze zufolge auch das aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ gebildete Produkt eine Deckoperation sein. Dieses Produkt ist aber (Kap. I, § 2) einer Inversion gegen die Mitte des Parallelepipetons äquivalent, und in der Tat führt die Inversion das Parallelepipeton und die acht Geraden in sich über.

Der grundlegende Charakter unseres Satzes wird damit durchsichtig. Durch ihn werden gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen den Symmetrieeigenschaften einer und derselben Figur bedingt. Wie die Deckoperationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ je eine Symmetrieeigenschaft der Figur definieren, so gilt das gleiche auch für das Produkt $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$, und zwar wird im allgemeinen $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ eine *neue* Symmetrieeigenschaft darstellen, verschieden von denjenigen, die in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ selbst ihren Ausdruck finden; und diese kommt der Figur ebenfalls zu. So entspricht in dem eben betrachteten Beispiel den Operationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ eine zweizählige Symmetriechse und eine zu ihr senkrechte Symmetrieebene, dem Produkt dagegen ein Symmetriezentrum; die beiden ersten Symmetrie-

eigenschaften bedingen also mit Notwendigkeit noch eine dritte. Es ist das *geometrische Grundgesetz der Kristallsubstanz*, das hierin zum Ausdruck kommt.

Diese gegenseitige Bedingtheit der Symmetrieeigenschaften einer und derselben Figur ist es, die *die Untersuchung der Kristallsymmetrie, die Aufzählung aller Kristallklassen und die gesamte Theorie des kristallographischen Aufbaues zu einem mathematischen Problem stempelt*. In ihm tritt ein Teil eines noch allgemeineren geometrischen Problems zu Tage; das Problem, *alle an sich möglichen Verbindungen von Symmetrieeigenschaften zu ermitteln*.

Den einfachsten Teil hiervon bildet die Aufgabe, *alle an sich möglichen Verbindungen von Symmetrieeigenschaften abzuleiten, die einen und denselben Punkt festlassen*. Diese ist es, die uns zunächst angeht. In ihrer allgemeinen Fassung geht auch sie noch über die uns interessierende engere Aufgabe hinaus. Sie stellt das bereits oben gestreifte Problem dar, *alle symmetrischen Polyeder zu bestimmen, also alle, die durch gewisse Deckoperationen in sich übergehen*. Von ihnen bilden diejenigen mit kristallographischer Bedeutung wieder nur einen Bruchteil; den Bruchteil derer, denen gemäß der kristallographischen Erfahrung nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Achsen zukommen. Mit ihnen werden wir uns daher zunächst beschäftigen. Die übrigen werden sich auf der Grundlage, auf die wir uns stützen, von selbst ergeben¹⁾.

§ 3. Die Abhängigkeit der einzelnen Symmetrieeigenschaften voneinander. Wir beginnen damit, die Sätze, die wir im Kap. II und III für die Zusammensetzung von Operationen abgeleitet haben, auf die Symmetrieeigenschaften zu übertragen. Wir brauchen diese Sätze nur auf unsere Deckoperationen anzuwenden und dann von den Deckoperationen zu den durch sie charakterisierten Symmetrieeigenschaften überzugehen.

Da das Produkt von zwei Spiegelungen eine Drehung um die Schnittpunktlinie der Spiegelungsebenen ist (Kap. II, § 4), so folgt:

¹⁾ Der Hinweis auf *alle* symmetrischen Polyeder ist in § 9 enthalten.

2. Die Schnittlinie von zwei Symmetrieebenen ist eine Symmetrieachse¹⁾. Bilden die Ebenen den Winkel $\alpha = \pi/n$ miteinander, so ist die Symmetrieachse n -zählig.

Wir sehen weiter (a. a. O., Satz 10), daß wenn eine Symmetrieebene eine Symmetrieachse enthält, dadurch noch eine zweite durch die Achse gehende Symmetrieebene bedingt ist. Ist die Symmetrieachse n -zählig, so schließen beide Ebenen den Winkel $\alpha = \pi/n$ ein. Indem wir diesen Satz wiederholentlich anwenden, ergibt sich:

3. Geht durch eine n -zählige Symmetrieachse eine Symmetrieebene, so gehen durch sie noch $n-1$ weitere Symmetrieebenen. Je zwei aufeinander folgende Ebenen bilden den Winkel $\alpha = \pi/n$ miteinander.

Im besondern ergibt sich für $n = 2$, daß die Schnittlinie von zwei zueinander senkrechten Symmetrieebenen eine zweizählige Symmetrieachse ist, und daß umgekehrt eine zweizählige Symmetrieachse, die in einer Symmetrieebene liegt, noch eine zweite durch sie gehende Symmetrieebene bedingt, die auf der ersten senkrecht steht, d. h.:

4. Eine zweizählige Symmetrieachse und zwei durch sie gehende senkrechte Symmetrieebenen kommen stets vereinigt vor; d. h. enthält eine Kristallform zwei dieser Symmetrieelemente, so enthält sie auch das dritte.

Ferner erhalten wir schließlich aus den Gleichungen 6, 6a, 6b von § 2, Kap. II den folgenden Satz:

5. Ein Symmetriezentrum, eine Symmetrieebene und eine zu dieser senkrechte geradzählige Symmetrieachse sind drei Symmetrieelemente, die stets verbunden vorkommen; d. h. enthält eine Kristallklasse zwei von ihnen, so enthält sie auch das dritte.

Da nämlich die Symmetrieachse geradzählig ist, so existiert unter den zugehörigen Deckoperationen immer eine Umwendung.

Einen Satz über Symmetrieachsen selbst gewinnen wir unmittelbar aus Satz 5 von Kap. III (§ 3). Nehmen wir den

¹⁾ Hier, wie in den folgenden Sätzen, sind stets Achsen erster Art gemeint.

Winkel $(uv) = \pi/n$ an, so ist die Drehungsachse a des Satzes n -zählig. Aus den Gleichungen 6 b und 6 c folgt daher:

6. *Zwei zweizählige Achsen, die den Winkel π/n miteinander einschließen, bedingen eine zu ihnen senkrechte n -zählige Symmetrieachse; und*

6a. *Eine n -zählige Symmetrieachse und eine zu ihr senkrechte zweizählige Achse bedingen $n-1$ weitere zur n -zähligen Achse senkrechte zweizählige Achsen; je zwei benachbarte bilden den Winkel π/n .*

§ 4. **Der Gruppenbegriff.** Die einer Kristallklasse zukommenden Symmetrieeigenschaften bilden stets eine endliche Anzahl. Das Gesetz, das die für einen Kristall charakteristischen Symmetrieeigenschaften oder Deckoperationen umschließt, läßt sich deshalb auch dahin aussprechen, daß sie einen geschlossenen Kreis bilden von der Art, daß irgend zwei von ihnen immer eine dritte bedingen, die wiederum diesem Kreise angehört. Dieser Umstand bewirkt, daß wir für die hier vorliegenden Aufgaben mit großem Vorteil von einem mathematischen Grundbegriff Gebrauch machen können, der seiner Einfachheit und Anwendbarkeit wegen einen elementaren Charakter besitzt, und daher in unserer Darstellung mit vollem Recht eine Stelle findet. Dieser Begriff ist der „Gruppenbegriff“. Wir knüpfen ihn an die Deckoperationen an und stellen über ihn folgende Definition auf:

7. *Unter einer endlichen Gruppe von Operationen verstehen wir eine endliche Reihe nicht äquivalenter Operationen von der besonderen Beschaffenheit, daß das Produkt von irgend zweien von ihnen stets einer Operation der Reihe äquivalent ist.*

Wie die Fassung der Definition zeigt, soll die Zahl der Operationen, die der Gruppe angehören, eine *endliche* sein. Ferner ist zu beachten, daß alle äquivalenten Operationen wieder als identisch betrachtet werden; sie sind in der Gruppe durch *eine einzige* Operation repräsentiert. Wenn wir also irgend zwei dieser Operationen zusammensetzen, so verlangt die Definition, daß die resultierende Operation selbst in der Gruppe vorkommt.

Denken wir uns nun *alle* Deckoperationen aufgestellt, durch die irgend eine räumliche Figur F , also z. B. eine Kristallform, in sich übergeht¹⁾. Nach Satz 1 ist das Produkt von irgend zweien von ihnen immer wieder einer dieser Deckoperationen äquivalent. Wir schließen daraus, daß die *Gesamtheit aller* Deckoperationen, die die Figur F in sich überführen, stets eine solche Gruppe bilden. In der Tat, enthält die Reihe

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \dots$$

die *sämtlichen* Deckoperationen dieser Art, so muß ja, wenn wir irgend zwei von ihnen multiplizieren, die dem Produkt äquivalente Operation sicher in der obigen Reihe enthalten sein. Diese Tatsache ist die Basis der nachfolgenden Entwicklungen; wir sprechen sie in folgendem Hauptsatz aus:

8. Hauptsatz. Alle (nicht äquivalenten) Deckoperationen, die eine Kristallform in sich überführen, bilden eine endliche Gruppe von Operationen. Ist N ihre Anzahl, so soll sie Ordnung der Gruppe heißen.

Die oben genannte Aufgabe, alle symmetrischen Polyeder, insbesondere alle möglichen Kristallformen zu bestimmen, führt also zunächst auf die Aufgabe, alle endlichen Gruppen von Deckoperationen abzuleiten, die einen Punkt fest lassen. Ihr haben wir uns daher jetzt zuzuwenden; wiederum unter besonderer Bevorzugung der Kristallklassen. Zuvor sei noch auf einige naheliegende Eigenschaften des Gruppenbegriffs, sowie auf die Beziehung zwischen Gruppe und Kristallform näher eingegangen.

Da mit den Operationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ auch das Produkt $\mathfrak{LM}$ der Gruppe angehört, so gilt dies auch, wenn $\mathfrak{M}$ dieselbe Operation ist, wie $\mathfrak{L}$; neben $\mathfrak{L}$ gehören daher auch alle Potenzen von $\mathfrak{L}$ der Gruppe an. Läßt ferner eine Figur eine Operation $\mathfrak{L}$ zu, so läßt sie auch die inverse Operation $\mathfrak{L}^{-1}$ zu und damit auch die Identität (Kap. II, § 3). Ferner handelt es sich bei jeder Gruppe immer nur um die nicht äquivalenten Potenzen; also folgt:

¹⁾ Es handelt sich immer nur um Operationen, die einen Punkt fest lassen.

9. Enthält eine endliche Gruppe von Operationen eine Operation $\mathfrak{L}$, so enthält sie auch alle nicht äquivalenten Potenzen von $\mathfrak{L}$, die zu $\mathfrak{L}$ inverse Operation und die Identität.

Wir gehen nun zu der Beziehung zwischen Gruppe und Kristallform über. Der Weg, den wir bisher gingen, führte von der Kristallform zum Gruppenbegriff; wir wollen jetzt von der Gruppe ausgehen und die zugehörige Kristallform entstehen lassen. Es gilt der Satz:

10. Wird eine Ebene ε (allgemeiner Lage) den N Operationen einer kristallographischen Gruppe unterworfen, so bilden die N so entstehenden Ebenen eine Kristallform der Gruppe.

Dieser Sachverhalt hat zwar die anschauliche Evidenz für sich; da er aber für die Beziehungen zwischen Gruppe und Kristallform grundlegend ist und beim strukturellen Aufbau in analoger Weise wiederkehrt, soll er einen bindenden Beweis erfahren. Es ist offenbar zu zeigen, daß die so gewonnenen N Ebenen durch jede der N Deckoperationen ineinander übergehen, und es sind die formalen Beziehungen anzugeben, auf denen dies beruht.

Dies wollen wir nun ausführen. Seien

$$1) \quad \mathfrak{L}_0 = 1, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots \mathfrak{L}_{N-1}$$

die N Operationen einer Gruppe G , und seien

$$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{N-1}$$

die N Ebenen, die durch die N Operationen der Reihe 1) aus der Ebene ε hervorgehen. Eine von ihnen sei ε_i , irgend eine Operation der Gruppe sei $\mathfrak{L}_k$. Dann ist zu zeigen, daß ε_i durch die Operation $\mathfrak{L}_k$ wieder in eine der N Ebenen übergeht. Nun ist doch das Produkt $\mathfrak{L}_i \mathfrak{L}_k$ einer gewissen Operation der Reihe 1) äquivalent; ist sie $\mathfrak{L}_\nu$, d. h. besteht die Gleichung

$$2) \quad \mathfrak{L}_i \mathfrak{L}_k = \mathfrak{L}_\nu,$$

so werden wir beweisen, daß ε_ν die gesuchte Ebene ist. Die Operation $\mathfrak{L}_\nu$ kann naturgemäß allgemein nicht weiter angegeben werden; wesentlich ist, daß sie in jedem einzelnen Fall eine wohlbestimmte ist. Es ist also auch ν ein durch die Indizes i und k wohlbestimmter Index. Unser Beweis ist leicht

zu führen. Wir erhalten aus 2) durch Multiplikation mit $\mathfrak{L}_i^{-1}$ zunächst die Gleichung

$$\mathfrak{L}_k = \mathfrak{L}_i^{-1} \mathfrak{L}_\nu.$$

Nun werde die Ebene ε_i dem Produkt $\mathfrak{L}_i^{-1} \mathfrak{L}_\nu$ unterworfen, so wird sie durch $\mathfrak{L}_i^{-1}$ zunächst nach ε und dann durch $\mathfrak{L}_\nu$ von ε nach ε_ν gelangen; dasselbe gilt also für die diesem Produkt äquivalente Operation $\mathfrak{L}_k$. Damit aber ist der Beweis geliefert.

§ 5. Die zyklischen Gruppen und die Diëdergruppen. Wir beginnen mit den Gruppen, die nur eine einzige (n -zählige) Achse besitzen. Sie heißen *zyklische Gruppen*. Es gibt, wenn wir die Kristallklasse ohne jede Symmetrie mitzählen, fünf solcher Gruppen; sie entsprechen den Werten $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Die Gruppe ohne Symmetrie bezeichnen wir durch

$$C_1 = \{1\};$$

ihre Deckoperation besteht nur aus der Identität.

Für die einer n -zähligen Achse entsprechende Gruppe hat der Drehungswinkel den Wert $\alpha = 2\pi/n$; die Gruppe enthält daher die n -Drehungen

$$1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}; \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(2\pi/n).$$

Wir bezeichnen diese Gruppen durch

$$3) C_2 = \{\mathfrak{A}(\pi)\}; C_3 = \{\mathfrak{A}(2\pi/3)\}; C_4 = \{\mathfrak{A}(\pi/2)\}; C_6 = \{\mathfrak{A}(\pi/3)\}.$$

Wir gehen zu den Gruppen über, die eine (n -zählige) Hauptachse und außerdem noch zweizählige, auf der Hauptachse senkrechte Nebenachsen enthalten. Existiert eine, so existieren nach Satz 6a) stets n solche zweizählige Achsen; sie bilden gleiche Winkel miteinander. Sind also $u, u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ diese Nebenachsen, so ist

$$\angle(uu_1) = \angle(u_1u_2) \dots = \pi/n.$$

Ist noch a die Hauptachse, so enthält die Gruppe notwendig alle Potenzen von $\mathfrak{A}$, wie auch die n Umwendungen um die Nebenachsen; dies sind die $2n$ Drehungen

$$\begin{aligned} &1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}, \\ &\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots, \mathfrak{U}^{n-1}. \end{aligned}$$

Es scheint zweckmäßig, einen rechnerischen Beweis dafür zu geben, daß diese $2n$ Drehungen wirklich eine Gruppe bilden. Er beruht wesentlich auf den Gleichungen

$$111_1 = \mathfrak{A}, 111_2 = \mathfrak{A}^2, \dots 111_{n-1} = \mathfrak{A}^{n-1},$$

die eine unmittelbare Folge des in Kap. III § 3 bewiesenen Satzes 5) sind. Wir sehen daraus bereits, daß das Produkt von irgend zwei Drehungen der zweiten Reihe wieder eine Drehung der Gruppe ist. Es ist jetzt das gleiche nur noch für eine Drehung der ersten Reihe und eine der zweiten Reihe zu zeigen. Es mag genügen, dies für 11 und die Potenzen von $\mathfrak{A}$ zu tun. Wir multiplizieren dazu die Gleichungen der letzten Reihe linksseitig mit 11 und finden wegen $11^2 = 1$ sofort

$$11_1 = 11\mathfrak{A}, 11^2 = 11\mathfrak{A}_2 \dots 11_{n-1} = 11\mathfrak{A}^{n-1}.$$

Damit ist der Beweis im wesentlichen erledigt. Man sieht noch, daß man die $2n$ Drehungen der Gruppe auch in die Form setzen kann

$$4) \quad \begin{array}{cccc} 1, & \mathfrak{A}, & \mathfrak{A}^2, & \dots & \mathfrak{A}^{n-1} \\ 11, & 11\mathfrak{A}, & 11\mathfrak{A}^2, & \dots & 11\mathfrak{A}^{n-1}. \end{array}$$

Man kann die zweite Zeile auch durch

$$4a) \quad 11, 11\mathfrak{A}, 11\mathfrak{A}^2 \dots 11\mathfrak{A}^{n-1} 11$$

ersetzen, wie ebenso bewiesen wird. Wir bezeichnen diese Gruppe durch

$$5) \quad D_n = \{\mathfrak{A}^{(2\pi/n)}, 11\};$$

sie führt in der Mathematik den Namen der *Diëdergruppe*. Den Werten $n = 2, 3, 4, 6$ entsprechend erhalten wir die vier Gruppen

$$D_2, D_3, D_4, D_6.$$

Die in Gleichung 5) gewählte Bezeichnung soll erkennen lassen, daß die Drehungen $\mathfrak{A}$ und 11 die Bedeutung von *erzeugenden* Operationen für die Gruppe besitzen, worauf wir in § 8 näher zurückkommen. Die Lage der zweizähligen Achsen in der zu a senkrechten Ebene (Zeichnungsebene) für D_3, D_4, D_6 zeigen Figur 19a, 19b, 19c.

Die Gruppe D_2 , die dem Wert $n = 2$ entspricht, hat eine besondere theoretische Bedeutung. Sie ist durch drei Umwen-

dungen charakterisiert, deren Achsen dieselbe Lage zueinander haben, wie drei rechtwinklige Koordinatenachsen. Wir wollen sie (Fig. 10, S. 21) durch u , v , w bezeichnen. Die Gruppe besteht dann aus den vier Operationen

6) $1, \mathbb{I}, \mathbb{B}, \mathbb{B}$.

Diese vier Operationen müssen also die bemerkenswerte Eigenschaft besitzen, daß jedes aus ihnen gebildete Produkt wieder einer von ihnen äquivalent ist. Daß dies wirklich so ist, haben wir in Kap. II, § 5 schon erwiesen.

Wir bezeichnen die Gruppe durch V und nennen sie *Viererguppe*. Die zugehörigen Kristalle besitzen drei zueinander senkrechte, zweizählige Symmetrieachsen.

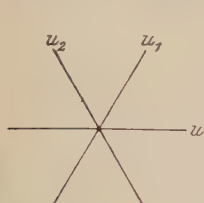


Fig. 19a

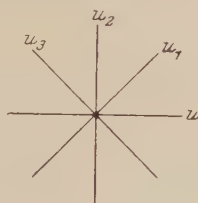


Fig. 19b

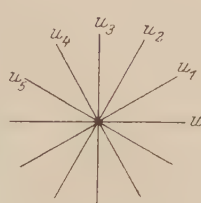


Fig. 19c

§ 6. **Tetraedergruppe und Oktaedergruppe.** Es bleiben noch die beiden Kristallklassen zu erörtern, die dem kubischen System angehören. Ihre Symmetrieachsen sind dieselben wie die des regulären Tetraeders und des Würfels, deshalb mag eine Vorbetrachtung über diese beiden Körper vorangehen.

Sei O die Ecke eines Würfels (Fig. 20). In den drei Würfel-
flächen, die in O zusammenstoßen, ziehen wir von O aus die
Flächendiagonalen OA' , OB' , OC' und verbinden A' , B' , C' unter-
einander. Dadurch entsteht ein reguläres Tetraeder. Ist O' die
Gegenecke von O , so verfahren wir mit ihr ebenso und erhalten
(Fig. 21) das Tetraeder $O'ABC$, es ist das *Gegentetraeder*
zum ersten¹⁾. Geht der Würfel durch eine Deckoperation in
sich über, so geht entweder jedes der beiden Tetraeder in sich

¹⁾ Der Deutlichkeit halber ist für das Gegentetraeder eine besondere Figur gezeichnet worden.

über, oder aber sie gehen wechselseitig ineinander über. Das nähere zeigt die folgende Betrachtung.

Dem Würfel kommen drei vierzählige, vier dreizählige und sechs zweizählige Achsen zu, die sämtlich durch seine Mitte M gehen (Fig. 22 und 22a). Die vierzähligen laufen den Kanten parallel; sie mögen a, b, c heißen. Die dreizähligen sind die vier Würfel-

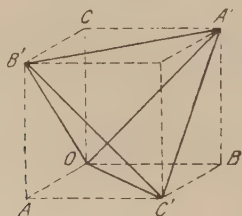


Fig. 20

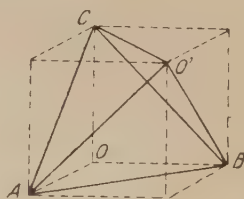


Fig. 21

diagonalen d, d_1, d_2, d_3 , und die sechs zweizähligen verbinden die Mitten von je zwei parallelen Gegenkanten; wir bezeichnen sie durch $u', u'', v', v'', w', w''$ ¹⁾. Von diesen Achsen kommen dem Tetraeder die dreizähligen ebenfalls zu; die vierzähligen Achsen a, b, c sind jedoch für das Tetraeder nur zweizählig, während die sechs zweizähligen ausfallen. Jede der drei Achsen

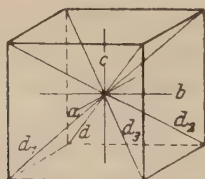


Fig. 22

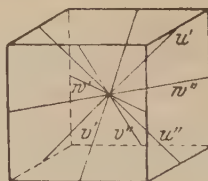


Fig. 22a

a, b, c verbindet die Mitten zweier gegenüberliegender Kanten eines jeden Tetraeders; die Achse c z. B. die Mitten von OC' und $B'A'$, und ebenso diejenigen von $O'C$ und BA . Wir folgern daraus unmittelbar, daß die 12 Drehungen

$$\begin{aligned} & 1, \mathcal{A}^2, \mathcal{B}^2, \mathcal{C}^2 \\ \text{A)} \quad & \mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \\ & \mathcal{D}^2, \mathcal{D}_1^2, \mathcal{D}_2^2, \mathcal{D}_3^2 \end{aligned}$$

¹⁾ Diese Achsen sind in der Fig. 22a besonders gezeichnet.

jedes der beiden Tetraeder *in sich* überführen. Die Drehungen der ersten Zeile entsprechen den zweizähligen Achsen, während die Drehungen der zweiten und dritten Zeile den vier dreizähligen Achsen d, d_1, d_2, d_3 zugehören. Dies gilt für beide Tetraeder. Die durch diese 12 Drehungen bestimmte Gruppe heißt *Tetraedergruppe*; wir bezeichnen sie durch T .

Die vorstehenden 12 Deckoperationen kommen naturgemäß auch dem Würfel zu; zu ihnen treten bei ihm noch 12 andere. Sie entsprechen einerseits den sechs zweizähligen Achsen, andererseits dem Umstand, daß beim Würfel die drei Achsen a, b, c vierzählig sind. Dies liefert genau die 12 neuen Drehungen

$$\begin{array}{l} \mathfrak{U}', \mathfrak{U}'', \mathfrak{U}, \mathfrak{U}^3 \\ \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}^3 \\ \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \mathfrak{C}, \mathfrak{C}^3 \end{array}$$

Sie stellen mit den 12 vorstehenden die 24 Deckbewegungen des Würfels dar. Jede von ihnen hat zugleich die Eigenschaft, Tetraeder und Gegentetraeder miteinander zu vertauschen. Beispielsweise führt die Drehung um c vom Winkel 90° die Punkte $OA'B'C'$ in $ACO'B$ über, ebenso bewirkt die Umwendung $\mathfrak{B}'$ die Vertauschung von $OA'B'C'$ mit $CBAO'$ usw.

Die durch obige 24 Drehungen bestimmte Gruppe heißt *Oktaedergruppe*; wir bezeichnen sie durch O^1 .

Man wird noch einen Beweis dafür verlangen, daß die obigen 12 und 24 Drehungen je eine Gruppe bilden. Er kann auf Grund einer allgemeineren Überlegung geliefert werden; und zwar in der Weise, daß wir für ein jedes regelmäßige Polyeder die Zahl der ihm entsprechenden Deckbewegungen bestimmen. Sei k die Zahl seiner Kanten, so besteht der Satz:

Ein regelmäßiges Polyeder von k Kanten gestattet $2k$ verschiedene Deckbewegungen in sich.

Der Beweis ist der folgende.

Bei allen Deckbewegungen des Polyeders bleibt sein Mittelpunkt M fest; seine Endlage ist daher bestimmt, wenn

1) Würfel und Oktaeder besitzen die gleichen Symmetrieachsen; die geometrische Erörterung läßt sich aber leichter an den Würfel anschließen.

man die Endlage für irgendeine seiner Kanten — sie heiße AB — kennt¹⁾. Die Kante AB fällt natürlich stets wieder mit einer Polyederkante zusammen. Nun kann aber AB mit einer Kante $A'B'$ noch auf zwei verschiedene Arten zur Deckung gebracht werden, nämlich entweder so, daß A auf A' und B auf B' fällt, oder so, daß A auf B' und B auf A' fällt; daher gibt es $2k$ verschiedene Lagen des Polyeders, also auch $2k$ verschiedene Deckbewegungen. Dabei ist natürlich die Identität ebenfalls als eine Deckbewegung gerechnet. Da nun das Tetraeder sechs und der Würfel 12 Kanten hat, so ist damit der verlangte Beweis geliefert.

§ 7. Die transformierte Drehung. Der vorstehende Beweis soll noch durch einen gruppentheoretischen ersetzt werden. Der Gedanke, auf den er sich stützt, wird uns zugleich das Vorbild für die Methoden liefern, die wir später zur Aufzählung der Strukturanordnungen zu benutzen haben. Wir müssen ihn deshalb in eingehender Weise erörtern.

Wir gehen von der oben (§ 4) erwähnten einfachen Beziehung zwischen Kristallform und Gruppe aus; die Beziehung ist die, daß jede Drehung der Gruppe die Kristallform in sich überführt. Mit der Kristallform gehen auch ihre Symmetrieachsen ineinander über und diese Symmetrieachsen sind zugleich die Drehungsachsen für die Gruppe; d. h.

11. *Jede Drehung der Gruppe führt das Achsensystem der Kristallform und damit auch das der Gruppe in sich über.* Wir wollen solche Achsen, die durch die Drehungen der Gruppe ineinander übergehen, als *gleichwertige* Achsen bezeichnen²⁾.

Dieser einfache Tatbestand ist es, an den wir die organische Bildung unserer Gruppen anschließen werden. Doch bedürfen wir zuvor noch eines neuen gruppentheoretischen Hilfsbegriffs, des Begriffs der *transformierten Drehung*. Er knüpft an die

¹⁾ Dies beruht darauf, daß gemäß Kap. III, § 1 die Lage eines jeden Körpers durch die Lage von dreien seiner Punkte bestimmt ist.

²⁾ Bei der Vierergruppe V ist jede Achse nur mit sich selbst gleichwertig. Bei der Gruppe D_3 sind die drei Nebenachsen gleichwertig, bei der Tetraedergruppe die drei Achsen uvw und die vier Achsen d, d_1, d_2, d_3 usw. usw.

eben erwähnte kristallographische Gleichwertigkeit der Achsen an, die durch die Deckoperationen der Gruppe ineinander übergehen, und zeigt ihre gruppentheoretisch-formale Einkleidung. Wir führen ihn auf folgender allgemeinen Grundlage ein.

Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(2\pi/n)}$ eine Drehung um die n -zählige Achse a . Die Achse a werde jetzt irgend einer Drehung $\mathfrak{Q}$ unterworfen, und gelange dadurch in die Lage b . Ferner sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(2\pi/n)}$ die der Achse b entsprechende Drehung vom Winkel $2\pi/n$, so wird behauptet, daß die Drehung $\mathfrak{B}$ durch das Produkt

$$7) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$$

dargestellt wird, oder, mit anderen Worten, es wird behauptet, daß $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{M}$ identisch ist.

Diese wichtige Beziehung läßt sich wie folgt beweisen. Zunächst folgt aus dem Eulerschen Satz (Kap. III, § 4), daß unser Produkt $\mathfrak{M}$ jedenfalls eine Drehung ist. Um ihre Eigenart zu erkennen, ziehen wir die Ortsveränderungen in Betracht, die die Achse b durch die nacheinander eintretenden Operationen $\mathfrak{Q}^{-1}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}$ erleidet. Da die Achse a durch die Operation $\mathfrak{Q}$ nach b gelangt, so gelangt b durch $\mathfrak{Q}^{-1}$ von b nach a . Die dann folgende Drehung $\mathfrak{A}$ läßt a fest und die Operation $\mathfrak{Q}$ bringt alsdann a wieder nach b . Die Achse b hat also infolge der drei Operationen ihren Ort nicht geändert; es ist also in der Tat $\mathfrak{M}$ eine Drehung um b . Wir zeigen jetzt weiter, daß sie n -zählig ist. Wir bilden zunächst

$$\mathfrak{M}^2 = (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q})(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}) = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}^2\mathfrak{Q},$$

ebenso finden wir

$$\mathfrak{M}^3 = (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}^2\mathfrak{Q})(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}) = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}^3\mathfrak{Q}$$

usw.; insbesondere auch

$$\mathfrak{M}^n = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}^n\mathfrak{Q},$$

und wegen $\mathfrak{A}^n = 1$ folgt daraus

$$8) \quad \mathfrak{M}^n = 1 = \mathfrak{A}^n.$$

Dies besagt bereits, daß die Drehung $\mathfrak{M}$ höchstens n -zählig sein kann. Sie kann aber auch nicht von geringerer Zähligkeit

sein. Nehmen wir nämlich an, sie sei m -zählig, so folgt zunächst aus 1), indem man linksseitig mit $\mathfrak{L}$ und rechtsseitig mit $\mathfrak{L}^{-1}$ multipliziert,

$$9) \quad \mathfrak{L} \mathfrak{M} \mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{A}$$

und hieraus ganz ebenso wie vorher

$$10) \quad \mathfrak{A}^m = 1 = \mathfrak{M}^m.$$

Beide Drehungen sind also von *gleicher* Zähligkeit; es ist also in der Tat

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^{(2\pi/n)} = \mathfrak{B}.$$

Sagen wir noch, daß die gemäß 7) definierte Drehung $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ durch Transformation mit $\mathfrak{L}$ hervorgeht, so können wir folgenden Satz aussprechen:

12. *Gelangt eine Achse a durch eine Operation $\mathfrak{L}$ in die Lage b , so wird die um die Achse b stattfindende zu $\mathfrak{A}$ analoge Drehung (die durch Transformation mit $\mathfrak{L}$ aus $\mathfrak{A}$ hervorgeht) durch das Produkt $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{L}$ dargestellt.*

Hiervon machen wir jetzt Anwendung auf die Drehungen und das Achsensystem einer Gruppe. Sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe, und seien

$$11) \quad 1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_{\lambda-1}$$

ihre λ Drehungen. Eine von ihnen wollen wir durch $\mathfrak{A}$ bezeichnen; sie sei eine Drehung um eine Achse a , und es sei jetzt $\mathfrak{L}$ irgendeine Operation, die das Achsensystem der Gruppe in sich überführt (also der Gruppe G nicht anzugehören braucht); die Achse a gehe wiederum durch $\mathfrak{L}$ in b über. Dann ist auch b eine Achse der Gruppe, also gehört auch die Drehung $\mathfrak{B}$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Transformation mit $\mathfrak{L}$ hervorgeht, der Gruppe an, und muß daher in der Reihe 11) vorkommen. Dies gilt für jede Drehung der Gruppe G , also für jede Operation der Reihe 11).

Transformieren wir daher die sämtlichen Drehungen der Reihe 11) mit $\mathfrak{L}$, so gehören sie *sämtlich* der Gruppe G an. Diese Drehungen sind

$$\mathfrak{L}^{-1} 1 \mathfrak{L}, \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{L}, \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{G}_2 \mathfrak{L}, \dots, \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{G}_{\lambda-1} \mathfrak{L},$$

und da sie an Zahl mit denen der Reihe 11) übereinstimmen,

so sind sie in irgendeiner Reihenfolge mit denen der Reihe 11) identisch. Man hat also für jeden Index i

$$12) \quad \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{G}_i \mathfrak{L} = \mathfrak{G}_k,$$

wo $\mathfrak{G}_k$ eine gewisse Operation der Reihe 11) ist, die durch $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{L}$ bestimmt ist, die man aber nicht weiter zu kennen braucht. Multiplizieren wir nun Gleichung 12) einmal linksseitig mit $\mathfrak{L}$ und einmal rechtsseitig mit $\mathfrak{L}^{-1}$, so ergibt sich

$$13) \quad \mathfrak{G}_i \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \mathfrak{G}_k, \quad \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_k \mathfrak{L}^{-1}.$$

Dies sind die abzuleitenden Relationen. Nunmehr können wir zum Hauptsatz übergehen.

§ 8. **Ein allgemeiner Satz über Drehungsgruppen.** Der abzuleitende Satz ist der gruppentheoretische Ausdruck davon, daß sich die Kristallklassen höherer Symmetrie aus denen niederer Symmetrie so ergeben, daß man zu den bereits vorhandenen Symmetrieelementen je ein *geeignetes neues* Symmetrieelement hinzufügt. Bei den Klassen, die nur Achsensymmetrie enthalten, ist dies in den allermeisten Fällen eine zweizählige Achse. Auf diesen Fall wollen wir uns daher zunächst beschränken und den folgenden Satz beweisen:

13. *Ist $\mathfrak{U}$ eine Umwendung, die das Achsensystem einer Gruppe G in sich überführt, so entsteht durch Multiplikation der Gruppe G mit der Umwendung $\mathfrak{U}$ eine neue Gruppe.*

Der hier verwandte Begriff der Multiplikation von G mit $\mathfrak{U}$ soll folgendes bedeuten. Seien wieder

$$14) \quad 1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots \mathfrak{G}_{\lambda-1}$$

die λ Drehungen von G , so wird behauptet, daß diese Drehungen, im Verein mit den weiteren λ Operationen

$$14a) \quad \mathfrak{U}, \mathfrak{U}\mathfrak{G}_1, \mathfrak{U}\mathfrak{G}_2, \dots \mathfrak{U}\mathfrak{G}_{\lambda-1}$$

ebenfalls eine Gruppe bilden. Dies wollen wir in aller Form beweisen. Dazu ist zu zeigen, daß das Produkt von irgend zweien der Operationen 14) und 14a) wiederum in den Reihen 14) und 14a) enthalten ist. Für zwei Operationen der Reihe 14) folgt es unmittelbar aus der Voraussetzung; d. h. sind μ und ν irgend zwei Indizes, so besteht ja stets eine Relation der Form

$$15) \quad \mathfrak{G}_\mu \mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}_\rho,$$

wo ρ ein gewisser, durch μ und ν bestimmter Index ist¹⁾. Sind weiter $\mathfrak{U}\mathfrak{G}_\mu$ und $\mathfrak{U}\mathfrak{G}_\nu$ irgend zwei Operationen der Reihe 14a), so folgt für ihr Produkt gemäß der Formel 13)

$$\mathfrak{U}\mathfrak{G}_\mu \cdot \mathfrak{U}\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}_\kappa \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}_\kappa \mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}_\rho.$$

Unsere Behauptung ist also nur noch für eine Operation der Reihe 14) und eine der Reihe 14a) nachzuweisen. Es ist zunächst

$$\mathfrak{U}\mathfrak{G}_\mu \cdot \mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{G}_\mu \mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{U}\mathfrak{G}_\rho$$

und ebenso folgt mittels Gleichung 13)

$$\mathfrak{G}_\mu \cdot \mathfrak{U}\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}_\mu \cdot \mathfrak{G}_\kappa \mathfrak{U} = \mathfrak{G}_\rho \mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{G}_\sigma,$$

womit der Satz in vollem Umfang bewiesen ist. Wir bezeichnen die so erzeugte Gruppe durch

$$16) \quad G_1 = \{G; \mathfrak{U}\}.$$

Wir machen hiervon zunächst Anwendung auf die Diödergruppen (§ 5). Eine zweizählige Achse, die zu einer n -zähligen Achse a senkrecht ist, führt diese Achse in sich über; nach unserm Satz gibt es daher Gruppen, die durch Multiplikation der zyklischen Gruppen mit $\mathfrak{U}$ entstehen, und dies sind die Diödergruppen, für die sich so auch hier die Bezeichnung

$$D_n = \{C_n, \mathfrak{U}\} = \{\mathfrak{A}^{(2\pi/n)}, \mathfrak{U}\}$$

einstellt. Gemäß unserm Satz enthalten sie die $2n$ Drehungen

$$\begin{array}{c} 1 \quad \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}^2, \quad \dots \quad \mathfrak{A}^{n-1} \\ \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{A}^2, \quad \dots \quad \mathfrak{U}\mathfrak{A}^{n-1} \end{array}$$

in genauer Übereinstimmung mit dem Inhalt von § 5.

Wir haben in Reihe 14a) die Multiplikation mit $\mathfrak{U}$ linksseitig vorgenommen, um dadurch die formale Übereinstimmung mit Gl. 4) von § 5 zu erreichen. Man kann sie aber auch *rechtsseitig vornehmen* und so die Übereinstimmung mit Gl. 4a) § 5 erhalten.

Für die Erzeugung der Oktaedergruppe gibt unser Satz einen neuen Weg an; sie kann durch Multiplikation der Tetra-

¹⁾ Das gleiche gilt für jeden neu auftretenden Index.

edergruppe mit einer der Umwendungen U', U'', V, V'', W, W'' gewonnen werden. Jede dieser Umwendungen führt das Achsen-system der Tetraedergruppe in sich über. Wir erhalten so

$$17) \quad O = \{T, U'\} = \{T, V'\} = \{T, W'\}.$$

Man schließt daraus noch beiläufig, daß die in § 6 enthaltenen Operationen B) aus denen von A) durch Multiplikation mit einer dieser Umwendungen hervorgehen.

Wir schließen mit einem Satz über eine analoge Erzeugung der Tetraedergruppe. Er beruht darauf, daß die drei Achsen u, v, w der Vierergruppe durch Drehung um eine der dreizähligen Achsen des Tetraeders ineinander übergehen und lautet demgemäß:

14. Die Tetraedergruppe T kann in der Weise aus der Vierergruppe V erzeugt werden, daß man die Vierergruppe mit einer dreizähligen Drehung D multipliziert, die das Achsen-system der Vierergruppe in sich überführt.

In diesem Fall wird also behauptet, daß die Drehungen

$$\begin{array}{l} C) \quad \begin{array}{cccc} 1, & U, & V, & W \\ D, & UD, & VD, & WD \\ D^2, & UD^2, & VD^2, & WD^2 \end{array} \end{array}$$

die Tetraedergruppe darstellen. Der Unterschied gegen den zuvor bewiesenen Satz besteht nur darin, daß man hier die Drehungen der Vierergruppe außer mit D auch noch mit D^2 zu multiplizieren hat; was darauf beruht, daß erst $D^3 = 1$ ist, während für U schon $U^2 = 1$ ist, und daß auch D^2 eine zur Achse d gehörige Drehung ist, die die Achsen u, v, w ineinander übergehen läßt. Der Beweis ergibt sich ebenso wie vorher. Will man ihn eingehender durchführen, so ist zu beachten, daß jetzt die vier Operationen der Vierergruppe, nämlich

$$1, U, V, W,$$

sowohl bei der Transformation mit D , wie auch mit D^2 in irgendeiner Reihenfolge in sich übergehen, und daß daher die Gleichungen 12) und 13) nicht nur für D , sondern auch für D^2 als multiplizierende Operationen gelten. Eine ausführliche Darstellung des Beweises kann deshalb unterbleiben. Auch ist es

nicht nötig, zu erörtern, in welcher Reihenfolge die vorstehenden 12 Operationen den 12 Operationen A) in § 6 entsprechen. Die Tatsache, auf die es hier und im folgenden hauptsächlich ankommen wird, ist nur die Erzeugung der Tetraedergruppe aus der Gruppe V und der Drehung $\mathfrak{D}$; wir setzen sie noch in Evidenz durch die Formel

$$18) \quad T = \{V; \mathfrak{D}\}.$$

§ 9. **Aufzählung aller Gattungen endlicher Drehungsgruppen.** Die Aufzählung der kristallographischen Gruppen erster Art (Drehungsgruppen) ist damit erledigt. Sie beruht, wie nochmals hervorgehoben werden mag, auf der Voraussetzung, daß nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Symmetrieachsen auftreten können. Wir haben insgesamt drei Gattungen von Gruppen kennen gelernt: 1) die zyklischen Gruppen; 2) die Diëdergruppen und 3) Tetraedergruppe und Oktaedergruppe.

Gemäß den Ausführungen von § 2 haben wir noch die Frage zu erörtern, was für Drehungsgruppen es im geometrischen Sinn überhaupt geben kann. Wir beschränken uns dabei ausdrücklich auf Drehungen mit dem rationalen Winkel $2\pi/n$. Wir gehen so vor, daß wir (an das vorstehende anschließend) drei verschiedene Gattungen unterscheiden.

1) Die zyklischen Gruppen besitzen eine einzige n -zählige Symmetrieachse; sie existieren daher an sich *für jeden Wert von n* .

2) Die Diëdergruppen lassen sich so definieren, daß sie mehrere Achsen, aber nur *eine* mehr als zweizählige Achse a (Hauptachse) enthalten. Alle Gruppen dieser Art sind zu bestimmen. Ist u eine zweizählige Achse einer solchen Gruppe, so liefert sie nach Satz 11 nur dann mit a zusammen eine neue Gruppe, wenn sie die Hauptachse in sich übergehen läßt. Sie muß daher auf der Hauptachse senkrecht stehen. Gruppen dieses Typus können also nur solche sein, wie wir sie in den Diëdergruppen D_n kennen lernten. Wir sehen weiter, daß sie gleichfalls *für jeden Wert von n* existieren.

3) Es kann also nur noch solche Gruppen geben, die mehr als eine Achse enthalten, die *nicht* zweizählig ist. Solcher

Gruppen gibt es auch in rein geometrischer Hinsicht nur eine sehr beschränkte Zahl. Sie entsprechen, wie wir sehen werden, den regelmäßigen Körpern. Dies haben wir eingehender zu erörtern.

Dazu erinnern wir zunächst an den in § 4 ausgesprochenen Satz 10); er zeigt, wie aus einer Gruppe G eine zugehörige Kristallform hervorgeht. Es ist klar, daß dieser Satz auf jede der hier in Betracht kommenden Gruppen ausgedehnt werden kann; auch wenn ihnen eine kristallographische Bedeutung nicht innewohnt. Immer bilden die $N-1$ Ebenen, die aus einer beliebigen Ebene ε durch die Operationen der Gruppe hervorgehen, mit ε zusammen die N Grenzflächen eines symmetrischen Polyeders, das durch jede der N Operationen von G in sich übergeht. Wir können also sagen:

15. Jeder Drehungsgruppe G entspricht eine Gattung symmetrischer Polyeder, d. h. solcher Polyeder, die durch die Operationen der Gruppe in sich übergehen.

Für die zyklischen Gruppen degenerieren diese Polyeder, wenn sie mit einer einzigen Ausgangsebene ε gebildet werden, in polyedrale n -kantige Ecken; ihre Flächen entstehen aus einer Ebene ε durch die n Drehungen der Gruppe¹⁾. Für die Diödergruppen ergeben sich aus einer Ebene ε bereits $2n$ -flächige eigentliche Polyeder; es sind die sogenannten Trapezoeder. Ganz anders liegen die Dinge, wenn wir zu den Polyedern übergehen, die mehrere nicht zweizählige Symmetrieachsen besitzen. Dies bedarf näherer Prüfung.

Sei G eine Drehungsgruppe dieser Art und seien a und b zwei solche Symmetrieachsen. Es sei a n -zählig und b p -zählig; wir dürfen von vornherein festsetzen, daß keine zwei andere Achsen der Gruppe G einen kleineren Winkel einschließen als a und b ²⁾. Nach § 7 gehören der Gruppe auch diejenigen Achsen $b', b'' \dots b^{(n-1)}$ an, die aus b entstehen, wenn b den Drehungen

¹⁾ Die n -seitige gerade Pyramide und die Doppelpyramide entsteht, wenn man von zwei verschiedenen Flächen ε und ε' ausgeht.

²⁾ Jede Gruppe, die wir zu bestimmen haben, enthält eine endliche Zahl von Drehungen, also auch eine endliche Zahl von Achsen. Das ermöglicht die obige Festsetzung.

um a unterworfen wird, und ebenso gehören ihr die Achsen $a', a'' \dots a^{(p-1)}$ an, die entstehen, wenn a den Drehungen um b unterworfen wird. Wir legen nun um den Schnittpunkt O aller Achsen (Fig. 23)¹⁾ eine Kugel und markieren alle Punkte, in denen sie von den Achsen durchschnitten wird; diese Punkte seien $A, A', A'' \dots$ für die Achsen $a, a', a'' \dots$ und $B, B', B'' \dots$ für die Achsen $b, b', b'' \dots$. Die n Punkte $B, B', B'' \dots$ werden dann auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt A ist. Wir folgern noch, daß es keine Achse von G geben kann, die die Kugel innerhalb dieses Kreises durchdringt, da es sonst eine Achse geben würde, die mit a einen kleineren Winkel einschließt als b . Was aber für die Achse a und den

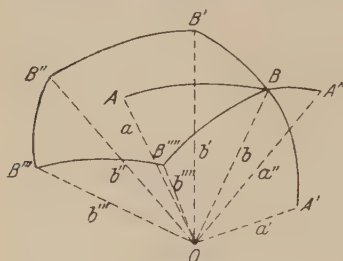


Fig. 23

Punkt A gilt, gilt ebenso für jede Achse $a; a', a'' \dots$ und für jeden der Punkte $A, A', A'' \dots$; denn alle diese Achsen gehen ja aus a durch die Operationen der Gruppe hervor und sind daher mit a gleichwertig. Jeder dieser Punkte $A, A', A'' \dots$ ist also der Mittelpunkt eines Kreises, der n der Punkte $B, B', B'' \dots$ enthält.

Jeder der Punkte $B, B', B'' \dots$ kommt in p solchen Kreisen vor. Um die p -zählige Symmetrieachse b liegen nämlich die p Achsen $a, a', a'' \dots$, die denselben Winkel mit b bilden wie a ; daher kann jeder der zugehörigen Punkte $A, A', A'' \dots$ Mittelpunkt eines Kreises werden, dem der Punkt B angehört; durch B gehen daher wirklich p Kreise. Was für B gilt, gilt aber auch für jeden der Punkte $B', B'' \dots$, und damit ist die Behauptung erwiesen.

Die Verteilung der Punkte $B, B', B'' \dots$ ist daher eine solche, daß je n von ihnen auf einem Kreise liegen, und daß jeder von ihnen p solchen Kreisen angehört. Denken wir uns nun in jedem dieser Kreise je zwei aufeinander folgende Punkte durch eine Gerade verbunden, so entstehen lauter reguläre

¹⁾ Die Figur entspricht den Werten $n = 5, p = 3$.

Polygone von n Seiten, und da keiner der Punkte $B, B', B'' \dots$ im Innern eines solchen Polygons liegt, so umschließen alle diese Polygone einen einfachen Körper. Dieser Körper hat die Eigenschaft, daß jede seiner Flächen n Ecken hat, und in jeder Ecke p Flächen zusammenstoßen; er ist daher einer der sogenannten *einfachen regelmäßigen Körper*.

Was wir eben für die Punkte $B, B', B'' \dots$ abgeleitet haben, läßt sich in derselben Weise auch für die Punkte $A, A', A'' \dots$ beweisen. Auch sie bilden ein regelmäßiges Polyeder, nämlich dasjenige, dessen Begrenzungsflächen p Ecken haben, während in jeder Ecke n Polygone zusammenstoßen.

Damit ist in der Tat nachgewiesen, daß die n -zählige Achse a und die p -zählige Achse b in einer innigen Beziehung zu den regelmäßigen Körpern stehen; die Zahlen n und p können nur solche Werte haben, die bei den regelmäßigen Körpern auftreten. Dies sprechen wir folgendermaßen als Lehrsatz aus:

16. Bei den Drehungsgruppen, die mehr als eine n -zählige Achse haben ($n > 2$), sind die Drehungsachsen stets identisch mit den Symmetrieachsen eines regelmäßigen Polyeders.

Die regelmäßigen Körper sind: das Tetraeder, das Oktaeder und das Hexaeder, das Ikosaeder und das Dodekaeder. Dem Tetraeder entsprechen die Zahlen $n = 3, p = 3$, dem Oktaeder und Hexaeder die Zahlen $n = 3, p = 4$ und umgekehrt, dem Ikosaeder und Dodekaeder die Zahlen $n = 3, p = 5$ und umgekehrt. Dies sind daher die einzigen Werte von n und p , die zu endlichen Drehungsgruppen führen können. Es gibt also nur *drei* solcher Gruppen. Damit sind auch für den dritten Fall die ihm entsprechenden Gruppen und Polyeder sämtlich bestimmt.

Wir sehen zugleich, daß im Fall 1) und im Fall 2) alle Gruppen ohne kristallographische Bedeutung sind, für die n einen andern Wert hat, als 2, 3, 4, 6; und daß im Fall 3) nur die dem Dodekaeder und Ikosaeder entsprechende Gruppe, da sie fünfzählige Achsen hat, kristallographisch ausscheidet.

§ 10. **Tabelle der kristallographischen Drehungsgruppen.** Es folgt hier noch eine Tabelle der kristallographischen Drehungsgruppen, mit ihren Achsen und mit der Angabe, ob die Achsen einseitig oder zweiseitig sind. Hierfür gilt, wie man leicht erkennt, das folgende:

- 1) Die Achsen der zyklischen Gruppen sind einseitig.
- 2) Die n -zählige Hauptachse der Diëdergruppe ist zweiseitig; die zweizähligen Achsen sind einseitig oder zweiseitig, je nach dem n ungerade oder gerade ist. (Also einseitig nur für $n = 3$).
- 3) Bei der Tetraedergruppe sind die zweizähligen Achsen zweiseitig, die dreizähligen einseitig. Die zweizähligen sind nämlich schon bei der Vierergruppe zweiseitig, aus der die Tetraedergruppe entsteht. Würde aber eine dreizählige Achse, z. B. OO' in Fig. 21 zweiseitig sein, so müßte sich durch gewisse Deckoperationen der Tetraedergruppe O mit O' , also Tetraeder und Gegentetraeder vertauschen, was nicht zutrifft.
- 4) Bei der Oktaedergruppe sind *alle* Achsen zweiseitig. Daß es die dreizähligen sind, geht aus dem Vorstehenden hervor; die zweizähligen sind es, weil sie Mitten von Gegenkanten verbinden, die sich durch gewisse Operationen der Oktaedergruppe vertauschen.

Tabelle I

(Die Achsen $u, v, w, \dots u', u'' \dots$ sind sämtlich zweizählig.)

Gruppe	Zahl der Drehungen	Einseitige Achsen	Zweiseitige Achsen
Zyklische Gruppe C_n ($n = 1, 2, 3, 4, 6$)	n	a (n -zählig)	—
Vierergruppe V	4	—	u, v, w
Diëdergruppe D_3	6	u, u_1, u_2	a (dreizählig)
Diëdergruppe D_4	8	—	a (vierzählig) u, u_1, u_2, u_3
Diëdergruppe D_6	12	—	a (sechszählig) $u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$
Tetraedergruppe T	12	d, d_1, d_2, d_3 (dreizählig)	u, v, w
Oktaedergruppe O	24	—	a, b, c (vierzählig) d, d_1, d_2, d_3 (dreizählig) $u', u'', v', v'', w', w''$

Sind alle Operationen einer Gruppe G_1 zugleich unter den Operationen einer Gruppe G enthalten, so soll G_1 eine *Untergruppe* von G heißen; so ist z. B. die Vierergruppe V eine Untergruppe der Tetraedergruppe T . Für jede unserer Gruppen sind im Folgenden die wichtigsten in ihr enthaltenen Untergruppen angegeben.

- 1) V : 3 Gruppen C_2 .
- 2) D_n : C_n und n Gruppen C_2 .
- 3) T : V , 4 Gruppen C_3 .
- 4) O : T , V , 3 Gruppen D_4 , 4 Gruppen D_3 .

Kap. VI. Die Gruppen und Kristallklassen zweiter Art

Vorbemerkung. Wie die Gruppen erster Art sollen auch die Gruppen zweiter Art von einem doppelten Gesichtspunkt aus behandelt werden. Wir werden sie einerseits in ihrer Gesamtheit aufzählen und ihren Symmetriecharakter erörtern, andererseits ist wiederum die Art ihres gruppentheoretischen Zusammenhangs zu klären. Endlich haben wir uns auch die Gewißheit zu schaffen, daß unsere Methoden zu *allen* überhaupt möglichen Symmetriegruppen mit einer endlichen Zahl von Operationen führen.

§ 1. Die Gruppen zweiter Art mit einer Symmetrieachse. Die einfachsten Gruppen dieser Art sind diejenigen, die nur eine Achse zweiter Art als Symmetrieelement besitzen. Die dieser Achse entsprechende Deckoperation ist

$$\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{A}}(^{2\pi/n}) = \mathfrak{A}(^{2\pi/n}) \mathfrak{S};$$

die zugehörigen Gruppen bestehen daher aus den sämtlichen nichtäquivalenten Potenzen von $\bar{\mathfrak{A}}$. Welche Potenzen dies sind, haben wir für $n = 3, 4, 6$ bereits in Kap. II, § 6 erledigt; wir haben die dortigen Resultate nur zu wiederholen. Wir bezeichnen die Gruppen durch

$$1) \quad S_n = \{ \bar{\mathfrak{A}}(^{2\pi/n}) \}; \quad n = 1, 2, 3, 4, 6.$$

Auch die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sind zu erledigen. Ist $n = 1$, so haben wir

$$\bar{\mathfrak{U}}(2\pi) = \mathfrak{U}(2\pi)\mathfrak{S} = \mathfrak{S};$$

dem Wert $n = 1$ entspricht also eine bloße Spiegelung. Wir bezeichnen die zugehörige Gruppe durch

$$2) \quad S_1 = C_1^h = \{\bar{\mathfrak{U}}(2\pi)\} = \{\mathfrak{S}\}^1).$$

Im Fall $n = 2$ haben wir

$$\bar{\mathfrak{U}}(\pi) = \mathfrak{U}(\pi)\mathfrak{S} = \mathfrak{I},$$

ihm entspricht also eine bloße Inversion; die bezügliche Gruppe werde durch

$$3) \quad S_2 = \{\bar{\mathfrak{U}}(\pi)\} = \{\mathfrak{I}\}$$

bezeichnet. Die diesen beiden Gruppen entsprechenden Operationen sind

$$1, \mathfrak{S} \text{ und } 1, \mathfrak{I}.$$

Im Fall $n = 4$ gibt es vier nichtäquivalente Potenzen

$$1, \bar{\mathfrak{U}}, \bar{\mathfrak{U}}^2, \bar{\mathfrak{U}}^3,$$

die sich (a. a. O.) auch in die Form

$$1, \mathfrak{U}^2; \mathfrak{U}\mathfrak{S}, \mathfrak{U}^3\mathfrak{S}$$

setzen ließen; wir bezeichnen die zugehörige Gruppe durch

$$4) \quad S_4 = \{\bar{\mathfrak{U}}(\pi/2)\}.$$

In den Fällen $n = 3$ und $n = 6$ gibt es je sechs nicht äquivalente Potenzen, also

$$1, \bar{\mathfrak{U}}, \bar{\mathfrak{U}}^2, \bar{\mathfrak{U}}^3, \bar{\mathfrak{U}}^4, \bar{\mathfrak{U}}^5.$$

Für $n = 3$ ließen sie sich in die Form setzen

$$1, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}^2, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}\mathfrak{S}, \mathfrak{U}^2\mathfrak{S}; \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(2\pi/3)},$$

für $n = 6$ dagegen in die Form

$$1, \mathfrak{U}^2, \mathfrak{U}^4, \mathfrak{I}, \mathfrak{U}^2\mathfrak{I}, \mathfrak{U}^4\mathfrak{I}; \mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U}^{(2\pi/3)},$$

wo also $\mathfrak{U}^2$ eine Drehung vom Winkel $2\pi/3$ darstellt.

Damit sind die Kristallklassen, deren Symmetrie nur durch das Vorhandensein einer Achse zweiter Art gekennzeichnet ist, erledigt. Wir sehen aber, daß die Symmetrie im

¹⁾ Für die Bezeichnung C_1^h vgl. S. 73, Anmerkung.

Fall $n = 3$ und $n = 6$ auch noch anders beschrieben werden kann. Im Fall $n = 3$ bedeutet die Operation $\mathfrak{S}$ eine zur Achse a senkrechte Symmetrieebene; die Gesamtsymmetrie besteht daher auch in einer dreizähligen Achse erster Art und einer dazu senkrechten Symmetrieebene. Im Fall $n = 6$ bedeutet $\mathfrak{A}^2$ ebenfalls eine Drehung vom Winkel $2\pi/3$, die Gesamtsymmetrie entspricht daher in diesem Fall einer dreizähligen Achse erster Art und einem Symmetriezentrum. Wir bezeichnen die so gewonnenen Gruppen durch

$$5) \quad S_3 = \{\overline{\mathfrak{A}}(2\pi/3)\} = \{\mathfrak{A}(2\pi/3), \mathfrak{S}\} = C_3^h,$$

$$6) \quad S_6 = \{\overline{\mathfrak{A}}(2\pi/3)\} = \{\mathfrak{A}(2\pi/3), \mathfrak{S}\} = C_3^i.$$

Für $n = 4$ ist eine Ersetzung der Symmetrieachse zweiter Art durch einfachere Symmetrieelemente nicht möglich.

Die weiteren Kristallklassen mit einer einzigen Symmetrieachse sollen zunächst in ihrer tatsächlichen Eigenart kurz erörtert werden. Sie enthalten außer der Symmetrieachse noch ein Symmetriezentrum oder auch Symmetrieebenen. Die Symmetrieebenen gehen entweder durch die Achse hindurch oder sie stehen auf ihr senkrecht; die ersteren sollen durch σ_v , die letzteren durch σ_h bezeichnet werden. Denkt man sich die Achse vertikal gerichtet, so liegen die Ebenen σ_h horizontal, und die Ebenen σ_v vertikal. Die ihnen entsprechenden Operationen seien $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_v$.

Man kann zu diesen Kristallklassen bekanntlich so gelangen, daß man zur Drehung $\mathfrak{A}$ noch die Operationen $\mathfrak{S}_v$, $\mathfrak{S}_h$ oder $\mathfrak{S}$ hinzufügt. Dies liefert drei Gruppentypen, die wir folgendermaßen bezeichnen:

$$7) \quad C_n^v = \{\mathfrak{A}(2\pi/n), \mathfrak{S}_v\} = \{C_n, \mathfrak{S}_v\}$$

$$8) \quad C_n^h = \{\mathfrak{A}(2\pi/n), \mathfrak{S}_h\} = \{C_n, \mathfrak{S}_h\}^1)$$

$$9) \quad C_n^i = \{\mathfrak{A}(2\pi/n), \mathfrak{S}\} = \{C_n, \mathfrak{S}\}.$$

Die so definierten Gruppen sind aber, wie sich zeigen wird, nicht sämtlich voneinander verschieden.

¹⁾ Die Gruppe $C_1^h = \{C_1, \mathfrak{S}_h\}$ ist also mit der S. 72 betrachteten Gruppe S_1 identisch.

Die der Gruppe C_n^v entsprechende Kristallklasse enthält außer der n -zähligen Achse bekanntlich noch n verschiedene vertikale Symmetrieebenen; in Übereinstimmung mit Kap. V, Satz 3). Ihre Symmetrie drückt sich durch die $2n$ Operationen

$$10) \quad \begin{array}{c} 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1} \\ \mathfrak{S}_v, \mathfrak{A}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{A}^2\mathfrak{S}_v, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{S}_v \end{array}$$

aus, von denen die erste Zeile die Drehungen darstellt. Die zweite Zeile entspricht den n Symmetrieebenen. Dies ist eine unmittelbare Folge des Satzes 10 von Kap. II, § 4. Diesem Satz gemäß bedeuten ja die Operationen $\mathfrak{A}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{A}^2\mathfrak{S}_v, \dots$ je eine Spiegelung an einer Ebene $\sigma'_v, \sigma''_v, \dots$ von der Art, daß je zwei benachbarte Ebenen einen Winkel von π/n einschließen. Wir können daher die zweite Zeile auch in die Form setzen

$$\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}''_v, \dots, \mathfrak{S}_v^{(n-1)}.$$

Eine solche Gruppe existiert für jeden der Werte $n = 2, 3, 4, 6$.

Von den Gruppen C_n^h sind wir dem Falle $n = 3$ schon oben begegnet; die Gruppe ist identisch mit der Gruppe S_3 , die der Existenz einer dreizähligen Achse zweiter Art entspricht. Die übrigen Gruppen C_n^h stellen neue Arten dar. Allgemein erhalten wir als Deckoperationen unserer Gruppen die n Drehungen

$$11) \quad 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}$$

und die n Operationen zweiter Art

$$11a) \quad \mathfrak{S}_h, \mathfrak{A}\mathfrak{S}_h, \mathfrak{A}^2\mathfrak{S}_h, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{S}_h.$$

Die Gruppen C_n^i dagegen sind unter den bisher betrachteten Gruppen schon *sämtlich enthalten*. Für gerade Werte von n werden wir die Gruppen C_n^i als identisch mit den Gruppen C_n^h erweisen; für diese Werte von n enthalten nämlich die Gruppen C_n^h schon eine Inversion. Für gerades n findet sich nämlich unter den Drehungen der Reihe 11) auch eine Umwendung; für $n = 2$ ist es $\mathfrak{A}$ selbst, für $n = 4$ und $n = 6$ sind es die Potenzen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{A}^3$. Da nun eine Umwendung in Verbindung

mit einer zur Umwendungsachse senkrechten Symmetrieebene eine Inversion ist, so stellen für $n = 2, 4, 6$ die Operationen

$$\mathcal{A}\mathcal{C}_h, \mathcal{A}^2\mathcal{C}_h, \mathcal{A}^3\mathcal{C}_h$$

die Inversion dar. Es kommen daher in der Tat von den obigen Gruppen 9) auch die Fälle $n = 2, 4, 6$ nicht in Betracht. Wir können dem durch die Gleichungen

$$12) \quad C_2^h = \{ C_2, \mathcal{C}_h \} = \{ C_2, \mathfrak{I} \}$$

$$13) \quad C_4^h = \{ C_4, \mathcal{C}_h \} = \{ C_4, \mathfrak{I} \}$$

$$14) \quad C_6^h = \{ C_6, \mathcal{C}_h \} = \{ C_6, \mathfrak{I} \}$$

Ausdruck geben. Die Operationen der Gruppe C_2^h insbesondere lassen sich in die einfache Form setzen

$$1, 11, \mathcal{C}, \mathfrak{I}.$$

Für den Wert $n = 3$ sind wir der Gruppe C_n^i schon oben in Gleichung 6) begegnet; die Gruppen 9) sind daher für *jeden* Wert von n mit einer der übrigen Gruppen identisch.

Auf die gruppentheoretische Stellung und Erzeugung dieser Gruppen kommen wir noch zurück; an der Hand der allgemeinen Sätze, die wir nunmehr darüber ableiten wollen.

§ 2. Allgemeine Sätze über die Gruppen zweiter Art. Die Sätze, die wir abzuleiten haben, tragen zunächst der Tatsache Rechnung, daß bei den Kristallen zwischen den Symmetrieeigenschaften erster und zweiter Art eine volle Gleichwertigkeit besteht. Sie sollen uns außerdem eine Methode an die Hand geben, die uns auf sicherem und eindeutigem Wege zu *allen* uns interessierenden Gruppen führt. Diese Methode unterscheidet sich von der der älteren Kristallographie sehr wesentlich. Früher pflegte man von den holoedrischen Formen auszugehen, und von ihnen durch Tilgung gewisser Symmetrieeigenschaften zu den hemiedrischen usw. *herabzusteigen*. Für unsere Untersuchungen haben wir den umgekehrten Weg einzuschlagen; also von den niederen Klassen zu den höheren *aufzusteigen*. Insbesondere gelangen wir zu den Klassen mit Symmetrieeigenschaften zweiter Art so, daß wir von den Klassen ausgehen, die nur Symmetrieachsen erster Art besitzen, und zu

ihnen in geeigneter Weise Symmetrieelemente zweiter Art hinzufügen. Die Sätze, auf denen dies beruht, werden wir nun ableiten.

1. *Für jede Gruppe zweiter Art bilden die in ihr vorkommenden Drehungen eine Drehungsgruppe.*

Da das Produkt von zwei Operationen zweiter Art einer Drehung äquivalent ist, so ist zunächst klar, daß jede Gruppe zweiter Art auch Drehungen enthält. Es sei $\bar{G}$ eine solche Gruppe, und es seien

$$15) \quad 1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_{\lambda-1}$$

die in ihr enthaltenen λ Drehungen. Das Produkt zweier von ihnen ist wieder eine Drehung und muß daher in $\bar{G}$, also auch in vorstehender Reihe enthalten sein, womit der Satz bewiesen ist.

2. *Jede Gruppe zweiter Art enthält ebenso viele Drehungen, wie Operationen zweiter Art.*

Es seien wieder

$$16) \quad 1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_{\lambda-1}$$

die Drehungen der Gruppe $\bar{G}$, und

$$17) \quad \bar{\mathfrak{S}}, \bar{\mathfrak{S}}_1, \bar{\mathfrak{S}}_2 \dots \bar{\mathfrak{S}}_{\mu-1}$$

die Operationen zweiter Art. Wir beweisen zunächst, daß μ nicht größer sein kann als λ . Nämlich jedes der Produkte, das durch Multiplikation der letzten Reihe mit $\bar{\mathfrak{S}}$ entsteht, d. h.

$$\bar{\mathfrak{S}}^2, \bar{\mathfrak{S}}\bar{\mathfrak{S}}_1, \bar{\mathfrak{S}}\bar{\mathfrak{S}}_2 \dots \bar{\mathfrak{S}}\bar{\mathfrak{S}}_{\mu-1}$$

muß der Gruppe $\bar{G}$ angehören. Sind nun alle Operationen der Reihe 17) verschieden, so müssen offenbar auch alle diese Produkte verschieden sein, da ja in ihnen auf dieselbe Operation $\bar{\mathfrak{S}}$ lauter verschiedene andere Operationen folgen. Jedes dieser Produkte ist aber eine Drehung, und diese Drehungen müssen unter den obigen λ Drehungen enthalten sein; daher kann μ nicht größer sein als λ .

Ebenso erkennt man, daß λ nicht größer sein kann als μ . Nämlich die Operationen, die durch Multiplikation der

Reihe 16) mit irgendeiner Operation zweiter Art, z. B. mit $\bar{\mathcal{E}}$ entstehen, d. h.

$$18) \quad \bar{\mathcal{E}}, \mathcal{G}_1 \bar{\mathcal{E}}, \mathcal{G}_2 \bar{\mathcal{E}} \dots \mathcal{G}_{\lambda-1} \bar{\mathcal{E}}$$

gehören ebenfalls der Gruppe an. Dies sind nun aber lauter Operationen zweiter Art, überdies sind sie sämtlich verschieden, da sie aus derselben Operation $\bar{\mathcal{E}}$ und lauter verschiedenen Bewegungen bestehen; die Gruppe $\bar{G}$ enthält daher sicher λ Operationen zweiter Art, und es kann auch λ nicht größer sein als die Zahl der Operationen von 17), d. h. als μ . Damit ist der Satz bewiesen.

Aus ihm entnehmen wir unmittelbar eine weitere Folgerung. Da die λ Operationen der Reihe 18) *sämtliche* Operationen zweiter Art unserer Gruppe darstellen, so sind sie identisch mit den Operationen 17) und es folgt:

3. *Enthält eine Gruppe zweiter Art $\bar{G}$ eine Operation zweiter Art $\bar{\mathcal{E}}$, so ergeben sich alle ihre Operationen zweiter Art, wenn die Drehungen der in ihr enthaltenen Drehungsgruppe G mit $\bar{\mathcal{E}}$ multipliziert werden.*

Diese Gruppe ist also durch die Drehungen von G und die eine Operation $\bar{\mathcal{E}}$ völlig bestimmt.

4. *Jede einer Gruppe zweiter Art angehörige Operation erster oder zweiter Art führt die Symmetrieachsen der Gruppe ineinander über.*

Daß dieser Satz in den bisher behandelten Fällen zutrifft, ist klar. Er ist auch kristallographisch einleuchtend, soll aber doch einen bindenden Beweis erfahren. Er ergibt sich genau so, wie der analoge Satz 11 von Kap. V.

Sei nämlich $\bar{G}$ eine Gruppe zweiter Art, und $\mathfrak{R}$ die zugehörige einfache Kristallform, so daß also die Achsen von G mit denen von $\mathfrak{R}$ identisch sind. Ferner sei $\mathcal{Q}$ irgendeine Operation von $\bar{G}$. Sie ist eine Deckoperation für die Kristallform und damit auch für ihre sämtlichen Symmetrieachsen. Diese sind aber zugleich die Drehungsachsen der Gruppe, und dies ist der Satz.

Augenscheinlich läßt sich diese Überlegung unmittelbar auch auf jede Symmetrieebene der Gruppe $\bar{G}$ ausdehnen, d. h. es gilt auch

4a. Jede Operation erster oder zweiter Art einer Gruppe G zweiter Art führt die sämtlichen Symmetrieelemente der Gruppe ineinander über.

§ 3. Transformierte Operationen zweiter Art. Ehe wir auf Grund der vorstehenden Sätze an die organische Erzeugung der Gruppen zweiter Art gehen, haben wir den in Kap. V, § 7 eingeführten Begriff der transformierten Drehung auf Operationen zweiter Art auszudehnen. Wir beschränken uns auch hier auf solche, die einen Punkt O festlassen. Dies kann unmittelbar geschehen.

Sei nämlich zunächst $\mathfrak{A}$ eine Drehung und $\bar{\mathfrak{E}}$ eine Operation zweiter Art, die den auf a liegenden Punkt O fest läßt, so folgt genau, wie dort, daß die Operation

$$19) \quad \mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{E}}^{-1} \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{E}}$$

die zu $\mathfrak{A}$ analoge Drehung um diejenige Achse b darstellt, in die die Achse a durch die Operation $\bar{\mathfrak{E}}$ übergeht. Denn für die in § 7 durchgeführten Schlüsse und Rechnungen spielte ja die Art der Operation $\mathfrak{Q}$ keinerlei Rolle; sie kann also auch von der zweiten Art sein. Damit ist bereits gezeigt, daß wir die Operation $\mathfrak{Q}$ auch durch eine Operation der zweiten Art ersetzen können.

Dasselbe ergibt sich auch für die Operation $\mathfrak{U}$; d. h. die Schlüsse von § 7 bleiben auch dann bestehen, wenn wir $\mathfrak{U}$ durch eine Operation $\bar{\mathfrak{E}}$ zweiter Art ersetzen. Wir haben hiervon zwar vorläufig keinen Gebrauch zu machen; doch möge die kurze Überlegung, die dies begründet, eine Stelle finden. Zunächst erhellt, daß — welches auch die Operation $\mathfrak{Q}$ sein mag, ob von erster oder zweiter Art — stets die mit $\mathfrak{Q}$ transformierte Operation

$$20) \quad \bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{Q}^{-1} \bar{\mathfrak{E}} \mathfrak{U}$$

eine Operation zweiter Art ist. Weiter folgt in der gleichen Weise wie dort, daß sie eine Spiegelung, eine Inversion oder Drehspiegelung ist, je nachdem $\bar{\mathfrak{E}}$ es ist. Ist $\bar{\mathfrak{E}}$ z. B. eine Spiegelung an der Ebene σ , so schließen wir genau wie dort, daß bei der transformierten Operation diejenige Ebene σ' fest bleibt, in die σ mittels der Operation $\mathfrak{Q}$ gelangt usw. Endlich

müssen aber auch die Schlüsse in Kraft bleiben, die auf den beiden Gleichungen

$$\bar{M}^n = 1 = \mathfrak{A}^n \text{ und } \mathfrak{A}^m = 1 = \bar{M}^m$$

beruhen, und alles dies zusammen zeigt in der Tat, daß die Operation $\bar{\mathfrak{S}}$ und die transformierte Operation $\mathfrak{L}^{-1}\bar{\mathfrak{S}}\mathfrak{L}$ von gleicher Art und Zähligkeit sind.

§ 4. Die Erzeugung der Gruppen zweiter Art. Nunmehr können wir den folgenden Satz aussprechen, auf dem die Ableitung der Gruppen zweiter Art aus den Gruppen erster Art beruht.

5. Hauptsatz: Ist $\bar{\mathfrak{S}}$ eine Operation zweiter Art, die das Achsensystem einer Drehungsgruppe G in sich überführt, so entsteht durch Multiplikation der Gruppe G mit der Operation $\bar{\mathfrak{S}}$ eine neue Gruppe $\bar{G}$ zweiter Art.

Wir haben diesen Satz aber nur für solche Operationen $\bar{\mathfrak{S}}$ nötig, für die $\bar{\mathfrak{S}}^2 = 1$ ist, und können uns daher auf sie beschränken. Für diesen Fall behauptet unser Satz das folgende: Sind wieder

$$21) \quad 1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_{\lambda-1}$$

die λ Drehungen der Gruppe G , so bilden sie im Verein mit den λ Operationen zweiter Art

$$22) \quad \bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{G}_1\bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{G}_2\bar{\mathfrak{S}}, \dots \mathfrak{G}_{\lambda-1}\bar{\mathfrak{S}}$$

eine Gruppe $\bar{G}$ zweiter Art.

Für den Beweis kann unmittelbar auf den Beweis des analogen Satzes von Kap. V, § 8 verwiesen werden. Dort war $\mathfrak{U}^2 = 1$, hier ist $\bar{\mathfrak{S}}^2 = 1$; hier wie dort besteht derselbe Begriff der transformierten Operation, und daher müssen sich alle dort durchgeführten Rechnungen und Schlüsse direkt auf den vorliegenden Fall übertragen lassen; man hat nur die Drehung $\mathfrak{U}$ durch die Operation $\bar{\mathfrak{S}}$ zu ersetzen.

Wir bedürfen endlich noch eines letzten Satzes. Auch er gibt einer wichtigen Tatsache der kristallographischen Systematik Ausdruck. Die Holoedrie des tetragonalen Systems besitzt außer der Achsensymmetrie sowohl ein Symmetriezentrum, wie eine zur Hauptachse senkrechte Symmetrieebene. Sie kann

also aus der Achsensymmetrie auf zwei Weisen erzeugt werden, sowohl durch Hinzufügung eines Symmetriezentrums, wie einer Symmetrieebene. Beide Bildungen liefern die gleiche Gruppe. Wir haben daher allgemein ein Kriterium nötig, wann zwei auf verschiedene Arten erzeugte Gruppen zweiter Art identisch sind.

Hierüber gilt der folgende Satz:

6. *Führt jede der beiden Operationen $\bar{\mathcal{S}}$ und $\bar{\mathcal{S}}_1$ das Achsensystem einer Gruppe G in sich über, und ist das Produkt $\bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{S}}_1$ einer Drehung von G äquivalent, so sind die beiden mit $\bar{\mathcal{S}}$ und $\bar{\mathcal{S}}_1$ aus G abgeleiteten Gruppen identisch.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar. Wir haben davon auszugehen, daß

$$\bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{G}_\rho$$

ist, wo $\mathcal{G}_\rho$ eine Drehung der Gruppe G ist. Alsdann folgt durch linksseitige Multiplikation mit $\bar{\mathcal{S}}$, da ja in den hier in Betracht kommenden Fällen $\bar{\mathcal{S}}^2 = 1$ ist, stets

$$\bar{\mathcal{S}}_1 = \bar{\mathcal{S}}\mathcal{G}_\rho,$$

und dies bedeutet, daß die Operation $\bar{\mathcal{S}}_1$ der Gruppe $\bar{G}$ angehört. Die Gruppe $\bar{G}$ kann deshalb nach Satz 3 auch durch Multiplikation mit $\bar{\mathcal{S}}$ abgeleitet werden, und dies bedeutet, daß $\bar{G}$ und $\bar{G}_1$ identisch sind.

Die vorstehende Betrachtung zeigte, daß $\bar{\mathcal{S}}_1$ gleich einem Produkt aus $\bar{\mathcal{S}}$ und einer Drehung von G ist. Unser Satz läßt sich deshalb auch so aussprechen, daß zwei aus G mit $\bar{\mathcal{S}}$ und $\bar{\mathcal{S}}_1$ abgeleitete Gruppen zweiter Art *immer dann identisch sind, wenn $\bar{\mathcal{S}}_1$ ein Produkt aus $\bar{\mathcal{S}}$ und einer Drehung von G ist.* Dies wird uns ein Mittel liefern, um jede Gruppe nur einmal aufzustellen.

Durch die vorstehenden Sätze ist uns der Weg vorgeschrieben, der zu den sämtlichen kristallographischen Gruppen zweiter Art führen soll. Drei Tatsachen sind dafür wesentlich. Erstens enthält jede Gruppe $\bar{G}$ zweiter Art eine Drehungsgruppe G als Untergruppe; sie muß naturgemäß eine von kristallographischer Eigenart sein. Zweitens muß die Operation zweiter Art, die wir zu einer Gruppe G hinzufügen, die Achsen von G in sich überführen (Satz 4a) — soll sie G als Unter-

gruppe enthalten, so dürfen eben keine neuen Achsen durch sie hinzukommen. Drittens wollten wir uns auf solche erzeugenden Operationen $\bar{\mathfrak{S}}$ beschränken, für die $\bar{\mathfrak{S}}^2 = 1$ ist, also auf Symmetrieebene und Symmetriezentrum. Daß dies gestattet ist, bedarf freilich erst noch der Begründung. Es ist daher zunächst zu zeigen, daß wir von einer eigentlichen Drehspiegelung als erzeugender Operation $\bar{\mathfrak{S}}$ *absehen* können. Dies beruht auf folgendem.

Wir nehmen an, unsere Operation $\mathfrak{S}$ sei eine Drehspiegelung. Da die Achsen der Gruppe G sich beim Übergang zur Gruppe $\bar{G}$ zweiter Art nicht ändern sollen, so folgt zunächst, daß die Drehspiegelungsachse mit einer Achse von G identisch sein muß; mit anderen Worten, eine n -zählige Achse erster Art geht dabei in eine $2n$ -zählige Achse zweiter Art über. Ist nun die Gruppe G zunächst eine zyklische Gruppe C_n , so stellt sich dadurch eine Gruppe mit einer einzigen Achse zweiter Art ein; dieser Fall ist aber in § 1 bereits erledigt. Ist G eine Diëdergruppe D_n , so könnte die Achse zweiter Art an sich mit der Hauptachse a oder mit einer Nebenachse u zusammenfallen. Ist $\alpha = 2\pi/n$ der Drehungswinkel der Hauptachse, so ist die Drehspiegelung im ersten Fall durch

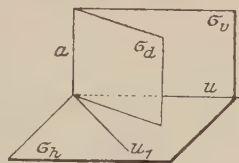


Fig. 24

$$\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(\pi/n)\mathfrak{S}_h$$

dargestellt, wo die Ebene σ_h senkrecht zu a ist (Fig. 24)¹⁾. Die Gruppe D_n enthält aber auch eine Umwendung $\mathfrak{U}$, also gehört ihr auch die Operation

$$\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{U} = \mathfrak{A}(\pi/n)\mathfrak{S}_h \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{A}(\pi/n)\mathfrak{S}_v$$

an, da ja das Produkt $\mathfrak{S}_h\mathfrak{U}$ einer Spiegelung $\mathfrak{S}_v$ an der durch a und u gehenden Ebene σ_v äquivalent ist. Die so erhaltene Form von $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{U}$ ist aber nach Kap. II, Satz 10 eine reine Spiegelung an einer durch a gehenden Ebene σ_d , diese Spiegelung kann daher ebenfalls als erzeugende Operation $\bar{\mathfrak{S}}$ verwendet werden.

¹⁾ Die Gerade u_1 der Figur kommt erst später in Betracht.
Schoenflies, Kristallstruktur

In eine Achse u endlich kann die Drehspiegelungsachse nicht fallen; sie müßte vierzählig von der zweiten Art werden, und würde a nicht in sich überführen.

Es erübrigt noch, die Gruppen T und O zu betrachten. Jede von ihnen hat Gruppen D_n als Untergruppen¹⁾; es trifft daher für sie das gleiche zu, wie für die Gruppen D_n . Unsere Behauptung ist damit als richtig erwiesen; von der Drehspiegelung als erzeugender Operation können wir absehen.

§ 5. Die zyklischen Gruppen und die Diëdergruppen zweiter Art. Nach dem Vorstehenden entsteht jede dieser Gruppen so, daß wir zu einer Gruppe C_n oder D_n eine Symmetrieebene oder ein Symmetriezentrum fügen, das die Achsen der Gruppe in sich überführt. Die zyklischen Gruppen zweiter Art haben wir in § 1 bereits in dieser Weise abgeleitet. Wir haben sie gerade in der Weise erzeugt, daß wir alle diejenigen Spiegelungen und Inversionen gesucht und benutzt haben, die die Achse der Gruppe in sich übergehen lassen. Wir erhalten so nachträglich die Gewißheit, daß wir *alle an sich möglichen zyklischen Gruppen zweiter Art bereits abgeleitet haben*.

Wir gehen nun zur Erzeugung der Diëdergruppen zweiter Art über, und bemerken zuvor, daß wir dafür, wie sich zeigen wird, die Inversion *nicht* in Betracht zu ziehen brauchen. Um also alle Diëdergruppen zweiter Art zu erhalten, genügt es, alle Spiegelungen zu suchen, die die Achsen der Diëdergruppen in sich überführen.

Die spiegelnde Ebene kann entweder horizontal oder vertikal sein. Ist sie horizontal, so enthält sie auch die zweizähligen Nebenachsen; nach Kap. V, Satz 4 geht durch jede Nebenachse und die Hauptachse auch noch eine vertikale Symmetrieebene σ_v . Wir bezeichnen die so bestimmte Gruppe durch

$$23) \quad D_n^h = \{D_n, \mathfrak{S}_h\}.$$

Da die Gruppe D_n^h auch die vertikalen Symmetrieebenen enthält, die durch die Nebenachsen gehen, so kann gemäß Satz 6 die Operation $\mathfrak{S}_v$ nur dann zu einer von D_n^h verschiedenen Gruppe führen, wenn die bezügliche Symmetrieebene

¹⁾ Für die Gruppe T ist $V = D_2$ diese Untergruppe.

den Winkel zweier Nebenachsen halbiert. Indem wir sie in dieser Lage als eine Diagonalebene σ_a auffassen, bezeichnen wir die zugehörige Spiegelung durch $\mathfrak{S}_a$ und die vermittels $\mathfrak{S}_a$ gebildete Gruppe zweiter Art durch

$$24) \quad D_n^a = \{ D_n, \mathfrak{S}_a \}.$$

Die so gebildeten Gruppen wollen wir nun näher betrachten.

Im Fall $n = 2$ ist D_n die Vierergruppe V ; wir wollen sie besonders erörtern. Die beiden aus ihr erzeugbaren Gruppen bezeichnen wir durch

$$25) \quad V^h = \{ V, \mathfrak{S}_h \} \text{ und } V^a = \{ V, \mathfrak{S}_a \}.$$

Die Operationen der Gruppe V^h sind

$$26) \quad \begin{array}{cccc} 1, & \mathfrak{U}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{B}\mathfrak{S}_h, \\ \mathfrak{S}_h, & \mathfrak{U}\mathfrak{S}_h, & \mathfrak{B}\mathfrak{S}_h, & \mathfrak{B}\mathfrak{S}_h\mathfrak{S}_h. \end{array}$$

Sie besitzt drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen und ein Symmetriezentrum. Die Symmetrieebenen entsprechen den drei ersten Operationen der zweiten Zeile, das Symmetriezentrum der Operation $\mathfrak{B}\mathfrak{S}_h$. Da die Gruppe ein Symmetriezentrum besitzt, so kann sie auch durch Multiplikation mit $\mathfrak{J}$ aus V erhalten werden, was in der Gleichung

$$25a) \quad V^h = \{ V, \mathfrak{S}_h \} = \{ V, \mathfrak{J} \}$$

zum Ausdruck kommt.

Dagegen sind die Operationen der Gruppe V^a

$$27) \quad \begin{array}{cccc} 1, & \mathfrak{U}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{B}\mathfrak{S}_a, \\ \mathfrak{S}_a, & \mathfrak{U}\mathfrak{S}_a, & \mathfrak{B}\mathfrak{S}_a, & \mathfrak{B}\mathfrak{S}_a\mathfrak{S}_a. \end{array}$$

Die Ebene σ_a der Spiegelung $\mathfrak{S}_a$ geht durch die w -Achse, ohne eine der andern Achsen zu enthalten. In diesem Fall gibt es daher nur noch *eine* zweite Symmetrieebene σ^1_a ; sie geht ebenfalls durch w und steht auf σ_a senkrecht.

Wir gehen nun zu den Fällen $n = 3, 4, 6$ über. Die Operationen der Gruppe D_n^h sind

$$28) \quad \begin{array}{ccccccc} 1, & \mathfrak{A} \dots \mathfrak{A}^{n-1}, & \mathfrak{U}, & \mathfrak{U}_1 \dots \mathfrak{U}_{n-1}, \\ \mathfrak{S}_h, & \mathfrak{A}\mathfrak{S}_h \dots \mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{S}_h, & \mathfrak{U}\mathfrak{S}_h, & \mathfrak{U}_1\mathfrak{S}_h \dots \mathfrak{U}_{n-1}\mathfrak{S}_h. \end{array}$$

Gemäß Kap. V, Satz 4 existieren außer der horizontalen Symmetrieebene σ_h noch n vertikale, die durch die Hauptachse

und je eine Nebenachse geben. Da die erste Zeile für gerades n auch je eine Umwendung um die Hauptachse enthält, so gehört der Gruppe für $n = 4$ und $n = 6$ auch je ein Symmetriezentrum an.

Wir kommen endlich zu den Gruppen D_n^d ; sie kommen aber, wie wir sofort sehen werden, nur noch für $n = 3$ in Frage. Für $n = 4$ und $n = 6$ verlieren sie ihre kristallographische Bedeutung. Den gruppentheoretischen Grund zeigt der folgende Satz.

7. Wird die Diédergruppe D_n mit einer Spiegelung $\mathfrak{S}_d$ erweitert, so wird die n -zählige Hauptachse dadurch eine $2n$ -zählige Symmetrieachse zweiter Art.

Die Symmetrieebene σ_d von $\mathfrak{S}_d$ halbiert, wie wir oben sahen, den Winkel zweier benachbarter Nebenachsen; es sei der Winkel (uu_1) (Fig. 24, S. 81); die Größe dieses Winkels ist

$$\angle(uu_1) = \pi/n.$$

Wir betrachten das Produkt $\mathfrak{U}\mathfrak{S}_d$. Ist $\mathfrak{S}_h$ wieder eine horizontale Spiegelung, $\mathfrak{S}_v$ eine vertikale, deren Ebene durch u geht, so ist gemäß Kap. II, § 4

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_h \mathfrak{S}_v,$$

folglich ist

$$\mathfrak{U}\mathfrak{S}_d = \mathfrak{S}_h \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_d,$$

und da die Ebenen von $\mathfrak{S}_v$ und $\mathfrak{S}_d$ einen Winkel $\pi/2n$ einschließen, so folgt weiter (Kap. II, Gl. 12)

$$\mathfrak{U}\mathfrak{S}_d = \mathfrak{S}_h \mathfrak{A}(\pi/n).$$

Das Produkt $\mathfrak{U}\mathfrak{S}_d$ ist daher in der Tat einer solchen Drehspiegelung um die Achse a äquivalent, daß die Achse a dadurch eine $2n$ -zählige Symmetrieachse zweiter Art wird.

Damit ist in der Tat bewiesen, daß die vorstehenden Gruppen für $n = 4$ und $n = 6$ keine kristallographische Bedeutung mehr haben; wirkliche Kristallklassen können ihnen nur für $n = 2$ und $n = 3$ entsprechen.

Es ist also nur noch die Gruppe

$$29) \quad D_3^d = \{D_3, \mathfrak{S}_d\}$$

zu erörtern. Ihre Operationen sind

$$30) \quad \begin{array}{cccccc} 1, & \mathfrak{U}, & \mathfrak{U}^2, & \mathfrak{S}_a, & \mathfrak{U}\mathfrak{S}_a, & \mathfrak{U}^2\mathfrak{S}_a, \\ \mathfrak{U}, & \mathfrak{U}_1, & \mathfrak{U}_2, & \mathfrak{U}\mathfrak{S}_a, & \mathfrak{U}_1\mathfrak{S}_a, & \mathfrak{U}_2\mathfrak{S}_a. \end{array}$$

Die Symmetrieebene, welche der Spiegelung $\mathfrak{S}_a$ entspricht, enthält die Hauptachse a , es gibt daher drei solcher Symmetrieebenen σ_a ; sie schneiden die Ebene σ_h in den drei Geraden s , s_1 , s_2 (Fig. 25). Da die Ebene σ_a auf einer zweizähligen Nebenachse senkrecht steht, existiert auch ein Symmetriezentrum.

Für ungerades n besitzt also die Gruppe D_3^a ein Symmetriezentrum, für gerades n jede der Gruppen D_n^h ; es braucht daher in der Tat die Inversion nicht zur Erzeugung von Diédergruppen zweiter Art benutzt werden. Die so erkannte doppelte Erzeugbarkeit dieser Gruppen kommt in folgenden Gleichungen zum Ausdruck:

$$31) \quad D_3^a = \{D_3, \mathfrak{S}_a\} = \{D_3, \mathfrak{S}\}$$

$$32) \quad D_4^a = \{D_4, \mathfrak{S}_h\} = \{D_4, \mathfrak{S}\}$$

$$33) \quad D_6^a = \{D_6, \mathfrak{S}_h\} = \{D_6, \mathfrak{S}\}.$$

Dem Satz 7 entnehmen wir noch die Folgerung, daß in der Gruppe V^a die Achse w vierzählig von der zweiten Art ist; und in der Gruppe D_3^a die Hauptachse a sechszählig von der zweiten Art. In der Formel 30)

entsprechen die Operationen der ersten Zeile der sechszähligen Achse, und stellen also die Operationen von S_6 dar (§ 1). Die der zweiten Zeile entstehen aus ihnen durch Multiplikation mit $\mathfrak{U}$; wir können demgemäß D_3^a auch in die Form

$$34) \quad D_3^a = S_6^u = \{S_6, \mathfrak{U}\}$$

setzen. In der Gruppe V^a sind, wie man leicht sieht,

$$1, \mathfrak{U}\mathfrak{S}_a, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}\mathfrak{S}_a$$

die der vierzähligen Achse zweiter Art entsprechenden Operationen; aus ihnen entstehen die übrigen wieder durch Multiplikation mit $\mathfrak{U}$; demgemäß können wir V^a auch durch

$$35) \quad V^a = S_4^u = \{S_4, \mathfrak{U}\}$$

darstellen. Das Auftreten der vierzähligen und sechszähligen Achse zweiter Art tritt dadurch in Evidenz.

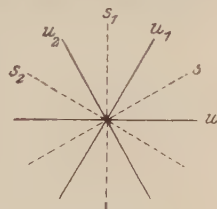


Fig. 25

§ 6. Tetraedergruppen zweiter Art. Es ist noch übrig, mit der Tetraedergruppe und Oktaedergruppe Gruppen zweiter Art zu bilden. Nach Kap. V enthält die Tetraedergruppe auch die Achsen u, v, w einer Vierergruppe¹⁾. Soll daher eine Spiegelung sämtliche Achsen der Tetraedergruppe in sich überführen, so muß sie jedenfalls auch die Achsen u, v, w in sich überführen. Es können daher höchstens die oben zur Erzeugung von V^h und V^d benutzten Spiegelungen $\mathcal{S}_h$ und $\mathcal{S}_d$ die Eigenschaft haben, das gesamte Achsensystem der Tetraedergruppe mit sich zur Deckung zu bringen. Dies ist aber auch wirklich der Fall. Wie die Figur 22 (S. 58) erkennen läßt, ist sowohl die Ebene von $\mathcal{S}_h$ eine Symmetrieebene dieses Achsensystems, wie auch die Ebene von $\mathcal{S}_d$; sie ist für den Würfel eine auf der Grundfläche senkrechte Diagonalebene.

Die mit $\mathcal{S}_h$ und $\mathcal{S}_d$ aus der Tetraedergruppe abgeleiteten Gruppen zweiter Art sind voneinander verschieden. Das Produkt von $\mathcal{S}_h$ und $\mathcal{S}_d$ ist nämlich einer Umwendung um die Gerade äquivalent, die den Winkel der Achsen u und v halbiert, also der Tetraedergruppe nicht angehört, womit nach Satz 6 die Behauptung erwiesen ist. Wir bezeichnen die so definierten Gruppen durch

$$36) \quad T^h = \{T, \mathcal{S}_h\} \text{ und } T^d = \{T, \mathcal{S}_d\}.$$

Die Operationen von $\mathcal{T}^h$ sind gemäß Kap. V, § 6²⁾

$$\begin{array}{llll} 1, & \mathcal{U}, & \mathcal{V}, & \mathcal{W} & \mathcal{S}_h, & \mathcal{U}\mathcal{S}_h, & \mathcal{V}\mathcal{S}_h, & \mathcal{W}\mathcal{S}_h, \\ \mathcal{D}, & \mathcal{D}_1, & \mathcal{D}_2, & \mathcal{D}_3 & \text{und} & \mathcal{D}\mathcal{S}_h, & \mathcal{D}_1\mathcal{S}_h, & \mathcal{D}_2\mathcal{S}_h, & \mathcal{D}_3\mathcal{S}_h, \\ \mathcal{D}^2, & \mathcal{D}_1^2, & \mathcal{D}_2^2, & \mathcal{D}_3^2 & & \mathcal{D}^2\mathcal{S}_h, & \mathcal{D}_1^2\mathcal{S}_h, & \mathcal{D}_2^2\mathcal{S}_h, & \mathcal{D}_3^2\mathcal{S}_h. \end{array}$$

Wie bei der Vierergruppe ist jede der drei von u, v, w gebildeten Ebenen eine Symmetrieebene und ebenso existiert ein Symmetriezentrum. Diese Symmetrieelemente entsprechen wieder den Operationen der ersten Zeile rechts. Die andern Operationen zeigen, daß die vier dreizähligen Achsen d, d_1, d_2, d_3 gleichzeitig als *sechszählige Symmetrieachsen zweiter Art* aufzufassen sind.

¹⁾ Es sind die Achsen a, b, c von Fig. 22, S. 58.

²⁾ Die Bezeichnungen $\mathcal{U}^2, \mathcal{V}^2, \mathcal{W}^2$ von § 6 sind gemäß § 8C durch $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ ersetzt worden.

Dagegen sind die Operationen von T^d

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & U, & V, & W, & & \mathcal{C}_d, & U\mathcal{C}_d, & V\mathcal{C}_d, & W\mathcal{C}_d, \\ \mathcal{D}, & \mathcal{D}_1, & \mathcal{D}_2, & \mathcal{D}_3 & \text{und} & \mathcal{D}\mathcal{C}_d, & \mathcal{D}_1\mathcal{C}_d, & \mathcal{D}_2\mathcal{C}_d, & \mathcal{D}_3\mathcal{C}_d, \\ \mathcal{D}^2, & \mathcal{D}_1^2, & \mathcal{D}_2^2, & \mathcal{D}_3^2 & & \mathcal{D}^2\mathcal{C}_d, & \mathcal{D}_1^2\mathcal{C}_d, & \mathcal{D}_2^2\mathcal{C}_d, & \mathcal{D}_3^2\mathcal{C}_d. \end{array}$$

Diese Gruppe enthält in der ersten Zeile die sämtlichen Operationen der Gruppe V^d . Wie bei der Gruppe V^d schneiden sich daher zwei Symmetrieebenen in der w -Achse; also auch in der u - und v -Achse. Jede dieser Symmetrieebenen enthält überdies, wie aus den bekannten Eigenschaften der regelmäßigen Körper folgt, zwei von den dreizähligen Achsen.

Ferner ist, ebenfalls wie bei V^d , die Achse w gleichzeitig als *vierzählige Symmetrieachse zweiter Art* zu betrachten; dasselbe gilt daher für die u - und v -Achse. Ein Symmetriezentrum dagegen kann, was ausdrücklich zu bemerken ist, in der Gruppe T^d nicht vorkommen; sonst würden ja T^h und T^d identisch sein.

§ 7. Die Oktaedergruppe zweiter Art. Die Oktaedergruppe enthält auch die Achsen der Tetraedergruppe. Für sie können daher nur solche Spiegelungen in Frage kommen, die die Tetraedergruppe in sich überführen, also ebenfalls $\mathcal{C}_h$ und $\mathcal{C}_d$. Beide bringen in der Tat sämtliche Achsen der Oktaedergruppe zur Deckung. Aber in diesem Fall ist das Produkt $\mathcal{C}_h\mathcal{C}_d$ einer in der Oktaedergruppe enthaltenen Umwendung äquivalent, denn die Schnittlinie der horizontalen Symmetrieebene σ_h und der zu ihr senkrechten Diagonalebene σ_d ist eine der beiden Achsen w' , w'' . Es gibt daher gemäß Satz 6) nur eine Gruppe zweiter Art, die sich mittels der Oktaedergruppe bilden läßt; wir bezeichnen sie durch

$$37) \quad O^h = \{O, \mathcal{C}_h\}.$$

Ihre 48 Operationen sind

I.	II.
1 $\mathcal{U}^2$ $\mathcal{V}^2$ $\mathcal{C}^2$	U' U'' $\mathcal{U}$ $\mathcal{U}^3$
$\mathcal{D}$ $\mathcal{D}_1$ $\mathcal{D}_2$ $\mathcal{D}_3$	$\mathcal{V}'$ $\mathcal{V}''$ $\mathcal{V}$ $\mathcal{V}^3$
$\mathcal{D}^2$ $\mathcal{D}_1^2$ $\mathcal{D}_2^2$ $\mathcal{D}_3^2$	$\mathcal{W}'$ $\mathcal{W}''$ $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}^3$
III.	IV.
$\mathcal{C}$ $\mathcal{U}^2\mathcal{C}$ $\mathcal{V}^2\mathcal{C}$ $\mathcal{C}^2\mathcal{C}$	$U'\mathcal{C}$ $U''\mathcal{C}$ $\mathcal{U}\mathcal{C}$ $\mathcal{U}^3\mathcal{C}$
$\mathcal{D}\mathcal{C}$ $\mathcal{D}_1\mathcal{C}$ $\mathcal{D}_2\mathcal{C}$ $\mathcal{D}_3\mathcal{C}$	$\mathcal{V}'\mathcal{C}$ $\mathcal{V}''\mathcal{C}$ $\mathcal{V}\mathcal{C}$ $\mathcal{V}^3\mathcal{C}$
$\mathcal{D}^2\mathcal{C}$ $\mathcal{D}_1^2\mathcal{C}$ $\mathcal{D}_2^2\mathcal{C}$ $\mathcal{D}_3^2\mathcal{C}$	$\mathcal{W}'\mathcal{C}$ $\mathcal{W}''\mathcal{C}$ $\mathcal{C}\mathcal{C}$ $\mathcal{C}^3\mathcal{C}$

Da die Gruppe, wie wir eben sahen, sowohl die Spiegelung $\mathfrak{S}_h$ als auch $\mathfrak{S}_a$ enthält, so besitzt sie offenbar sämtliche Symmetrieelemente, die in T^h und T^a vorkommen, also die drei Symmetrieebenen, die die vierzähligen Achsen verbinden, und die sechs andern, in denen je zwei der zweizähligen Symmetriechsen der Oktaedergruppe liegen; es sind die sechs Diagonalebene des Würfels. Ein Symmetriezentrum ist auch vorhanden, und daher ist jede der dreizähligen Achsen zugleich als *sechszählige Symmetriechse* zweiter Art zu betrachten.

Der Tatsache, daß T^h und O^h ein Symmetriezentrum enthalten, geben wir noch durch die Gleichungen Ausdruck

$$38) \quad T^h = \{T, \mathfrak{S}_h\} = \{T, \mathfrak{I}\}$$

$$39) \quad O^h = \{O, \mathfrak{S}_h\} = \{O, \mathfrak{I}\}.$$

Wir schließen mit folgender Bemerkung. Da die Gruppe O^h alle Symmetrieeigenschaften enthält, die den Gruppen T^h und T^a zugehören, so müssen sich die Operationen der Gruppen T^h und T^a unter den Operationen von O^h vorfinden. In der Tat erkennt man zunächst leicht, daß die mit I und III bezeichneten Operationen genau die Operationen der erweiterten Tetraedergruppe T^h darstellen. Ferner bilden I und IV die Operationen der Gruppe T^a ; was jetzt unmittelbar daraus folgt, daß die Operationen zweiter Art von T^h und T^a sämtlich voneinander verschieden sein müssen¹⁾.

Die Ableitung der kristallographischen Gruppen zweiter Art ist damit beendet. Auf Grund unserer organischen Erzeugungsmethode sind damit die 32 Kristallklassen — immer auf Grund davon, daß nur 2, 3, 4, 6-zählige Symmetriechsen auftreten — als die einzig möglichen nachgewiesen.

Die in Kap. V gestreifte Frage nach den sämtlichen symmetrischen Polyedern würde verlangen, nun auch die nicht

¹⁾ Es ist leicht, für jede der 48 Operationen das ihr entsprechende Symmetrieelement anzugeben. Z. B. bedeuten $\mathfrak{W}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{W}''\mathfrak{S}$ zwei zur Grundfläche senkrechte Symmetrieebenen, $\mathfrak{W}^2\mathfrak{S}$ das Symmetriezentrum usw. usw.

kristallographischen Gruppen zweiter Art anzugeben. Dies ist an sich leicht zu machen; die in § 4 enthaltene Grundlage der Ableitung bleibt für jedes n in Kraft und führt für jedes n zu allen vorhandenen Gattungen. *Es ist aber nicht erforderlich, näher darauf einzugehen.* Die in Kap. V gewonnene Kenntnis aller Gruppen mit *Achsensymmetrie* ist für die späteren Zwecke, für die diese allgemeine Übersicht notwendig ist, bereits ausreichend.

§ 8. **Tabelle der Gruppen zweiter Art.** Die Tabelle von S. 90 soll der Erzeugungsart der Gruppen, sowie der Art ihrer Symmetrieachsen (einseitig, zweiseitig, erster oder zweiter Art) besonderen Ausdruck geben. Hierfür gilt folgendes:

1) Jede Symmetrieachse zweiter Art ist an sich zweiseitig.

2) Die Existenz eines Symmetriezentrums macht *jede* Achse zu einer zweiseitigen; ebenso eine auf ihr senkrechte Symmetrieebene.

3) Die Hauptachse kann daher nur bei den Gruppen C_n^v einseitig sein; sie ist es aber auch.

4) Von Gruppen, die kein Symmetriezentrum enthalten, sind außer den eben genannten Gruppen C_n^v nur noch solche in Betracht zu ziehen, die aus Drehungsgruppen mit *einseitigen* Achsen hervorgehen; also aus D_3 und T . Es bedürfen also nur die beiden Gruppen D_3^h und T^d der Erörterung. Bei D_3^h kann die Symmetrieebene σ_h die Art der Nebenachsen u , u_1 , u_2 nicht ändern, da sie in ihr liegen. Sie bleiben also einseitig. Dasselbe gilt aus dem gleichen Grunde bei T^d für die dreizähligen Achsen d , d_1 , d_2 , d_3 . Zwei von ihnen liegen in der Ebene σ_d und behalten daher ihre Eigenart; bei den andern beiden muß es aus Symmetriegründen ebenso sein.

Die Tabelle enthält auch die Angabe aller Achsen, die von der zweiten Art sind; ihre Zähligkeit ist stets das Doppelte von derjenigen Zähligkeit, die ihnen in der Drehungsgruppe entspricht, mit der die Gruppe zweiter Art erzeugt ist.

Tabelle II

(C bedeutet ein Symmetriezentrum; $u, v, u_1, u', \dots$ sind zweizählige Achsen; a_n eine n -zählige Achse, a_{2n} eine $2n$ -zählige Achse zweiter Art; d, d_1, d_2, d_3 sind die dreizähligen Würfeldiagonalen.)

Gruppe	Zahl der Operationen	Achsen erster Art		Achsen zweiter Art	Zentrum und Ebenen der Symmetrie	
		einseitig	zweiseitig			
$C_1^h = S_1$	2	—	—	—	—	σ_h
S_2	2	—	—	—	C	—
S_4	4	—	—	$\bar{a}_4$	—	—
$S_6 = C_3^i$	6	—	a_3	$\bar{a}_6$	C	—
C_n^v	$2n$	a_n	—	—	—	n -Ebenen σ_v
C_n^h	$2n$	—	a_n	—	C für gerades n	σ_h
V^h	8	—	u, v, w	—	C	$\sigma_h, \sigma_u, \sigma_v$
$V^d = S_4^u$	8	—	u, v, w	$\bar{w}_4$	—	σ_d, σ_d'
D_3^h	12	u, u_1, u_2	a_3	—	—	σ_h ; 3 Ebenen σ_v
$D_3^d = S_6^u$	12	—	a_3 u, u_1, u_2	$\bar{a}_6$	C	$\sigma_d, \sigma_d', \sigma_d''$
D_4^h	16	—	a_4 u, u_1, u_2, u_3	—	C	σ_h ; 4 Ebenen σ_v
D_6^h	24	—	a_6 $u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$	—	C	σ_h ; 6 Ebenen σ_v
T^d	24	d, d_1, d_2, d_3	u, v, w	$\bar{u}_4, \bar{v}_4, \bar{w}_4$	—	6 Ebenen σ_d
T^h	24	—	u, v, w d, d_1, d_2, d_3	$\bar{d}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$	C	3 Ebenen σ_h
O^h	48	—	a_4, b_4, c_4 d, d_1, d_2, d_3 $u', u'', v', v'', w', w''$	$\bar{d}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ 6 zählig	C	3 Ebenen σ_h 6 Ebenen σ_d''

§ 9. Die Kristallsysteme und ihre Unterabteilungen.

Die 32 Kristallklassen haben wir von gruppentheoretischen Gesichtspunkten aus aufgestellt. Ihre kristallographisch praktische Gliederung ist eine andere. Diese soll auch Erwähnung finden. Sie werden in Systeme geschieden, deren Unterabteilungen sie bilden, und die hier folgen. Wir haben bei der Aufzählung aller vorhandenen regelmäßigen Anordnungen davon Gebrauch zu machen, und lassen sie in der Form folgen, die diesem Zweck entspricht.

I. *Triklines System (Triklone Syngonie)*

Gruppen: S_2 , C_1 .

II. *Monoklines System (Monogonale Syngonie)*

Gruppen: C_2^h , C_2 , C_1^h .

III. *Rhombisches System (Digonale Syngonie)*

Gruppen: V^h , V , C_2^v .

IV. *Rhomboedrisches System (Trigonale Syngonie)*

Gruppen: D_3^d , D_3 , C_3^v , C_3^i , C_3 .

V. *Tetragonales System (Tetragonale Syngonie)*

Gruppen: D_4^h , D_4 , C_4^h , C_4^v , C_4 , V^d , S_4 .

VI. *Hexagonales System (Hexagonale Syngonie)*

Gruppen: D_6^h , D_6 , C_6^h , C_6^v , C_6 , D_3^h , C_3^h .

VII. *Kubisches System (Kubische Syngonie)*

Gruppen: O^h , O , T^h , T^d , T .

Die Aufstellung eines rhomboedrischen Systems entspricht den obengenannten formalen Zwecken der Strukturtheorien, und ist für sie näherliegend. Wesentlich ist noch, daß alle 32 Klassen in den sieben Systemen eine Stelle haben und jede nur einmal. Die erste Gruppe entspricht immer der Holoedrie, die andern Gruppen den Unterabteilungen der Holoedrien. Die erste Gruppe soll *Hauptgruppe* oder *Vollgruppe* des Kristallsystems heißen; die andern sind *Untergruppen* von ihr. Näher auf diese Verhältnisse und sonstige Fragen der Systematik einzugehen, ist hier nicht nötig.

Kap. VII. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte

§ 1. Problemstellung und Formeln für die Lösung. Durch die N Deckoperationen einer Gruppe gehen aus einem Raumpunkt P noch $N-1$ neue Lagen $P_1, P_2 \dots$ hervor; sie bilden mit P zusammen ein *System gleichwertiger Punkte*; ihre Verbindungslinien mit O bilden ein *System gleichwertiger Richtungen* $g, g_1, g_2 \dots$. Wird P auf der Fläche einer einfachen Kristallform angenommen, so fallen die übrigen Punkte in die $N-1$ andern Flächen der Kristallform und zwar an lauter entsprechende Stellen. Wir haben die Koordinaten dieser N Punkte für jede der 32 Kristallklassen aufzustellen.

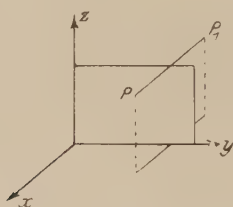


Fig. 26

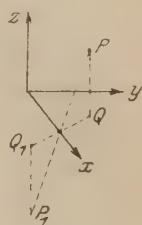


Fig. 27

Dazu sind zunächst die Formeln abzuleiten, die die Wirkung der verschiedenen Deckoperationen auf einen Punkt P ausdrücken. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z mit O als Mittelpunkt zugrunde und wollen der Einfachheit halber

$$\bar{x} \bar{y} \bar{z} \text{ statt } -x, -y, -z$$

schreiben.

Man erkennt unmittelbar (Fig. 26 und 27) die Richtigkeit der folgenden Regeln: Die Spiegelung an der (yz) Ebene läßt y und z ungeändert und verwandelt x in $\bar{x}$; die Umwendung um die x -Achse läßt x ungeändert und verwandelt y und z in $\bar{y}$ und $\bar{z}$; also folgt:

1. Aus xyz entstehen durch Spiegelung an den drei Koordinatenebenen (yz, zy, xy) die Punkte

$$\bar{x} y z, x \bar{y} z, x y \bar{z}.$$

2. Aus xyz entstehen durch Umwendung um die x , y , z -Achse

$$x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z.$$

3. Aus xyz entsteht durch Inversion

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Die aus xyz so hervorgehenden Punkte lassen folgende einfache Charakterisierung zu. Sie sind gleichliegende Punkte der acht Oktanten, in die der gesamte Raum durch die Koordinatenebenen zerlegt wird. Sie ergeben sich formal auch so, daß wir xyz mit den acht Vorzeichenkombinationen

$$\begin{array}{cccc} ++ +, & - ++, & +- +, & +++ \\ ---, & +--, & -+-, & --- \end{array}$$

versehen. Die ersten vier stellen den Punkt xyz selbst dar nebst den drei Punkten, die aus ihm durch die Spiegelungen entstehen; die letzten vier geben die durch die Inversion und die Umwendungen entstehenden Punkte.

Einigen weiteren Regeln schicken wir folgende Bemerkungen voran.

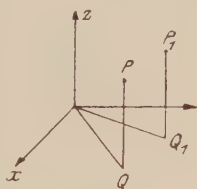


Fig. 28

Bei den Kristallklassen, die eine Hauptachse besitzen (den zyklischen Gruppen und den Diädergruppen), soll die Hauptachse in die z -Achse fallen. Dann sind folgende Operationen in Betracht zu ziehen: Erstens Drehungen um die Hauptachse und Spiegelungen gegen vertikale Symmetrieebenen σ_v ; zweitens Umwendungen um Nebenachsen, die in der xy -Ebene liegen, Spiegelungen und Drehspiegelungen gegen die xy -Ebene und Inversionen. Die Scheidung aller Operationen in diese zwei Klassen hat folgenden Anlaß: Bei den ersten beiden Arten von Operationen geht z in sich über, bei den folgenden in $\bar{z}$. Es sind daher nur noch die Formeln abzuleiten, die die x , y -Werte betreffen. Folgende Vorbetrachtungen schicken wir dazu voraus.

a) Es handle sich zunächst um eine Drehung um die z -Achse vom Winkel α , und es sei (Fig. 28) Q die Projektion des Punktes P in der xy -Ebene. Geht aus P durch die Drehung der Punkt P_1 hervor und ist Q_1 seine Projektion in der xy -Ebene,

so geht auch Q_1 aus Q durch eine Drehung um den Winkel α hervor; d. h. es ist $QOQ_1 = \alpha$.

b) Sei u eine zweizählige Achse der xy -Ebene; es gelange durch sie (Fig. 29) der Punkt P nach P_1 , und es seien wieder Q und Q_1 die Projektionen von P und P_1 . Dann liegen Q und Q_1 spiegelbildlich zur Achse u und es gelangt Q durch Umwendung um sie nach Q_1 .

c) Sei σ_v eine Symmetrieebene durch die z -Achse und u ihre Schnittlinie mit der xy -Ebene. Liegen dann P und P_1 spiegelbildlich zu σ_v , so liegen die Projektionen Q und Q_1 spiegelbildlich zu u (Fig. 30).

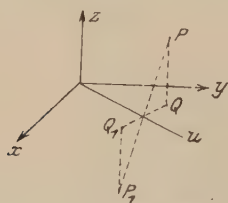


Fig. 29

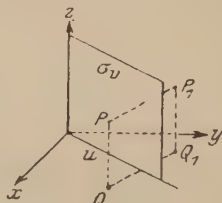


Fig. 30

In allen diesen Fällen besteht also zwischen den Koordinaten $x_1 y_1$ und $x y$ von Q_1 und Q die analoge Beziehung wie zwischen denen von P_1 und P . Demgemäß ergeben sich für die Fälle a), b), c) die folgenden Formeln:

4. Findet eine Drehung $\mathfrak{A}(\alpha)$ um die z -Achse statt, so haben wir¹⁾ (Fig. 31) für die Punkte $Q(x y)$ und $Q_1(x_1 y_1)$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{und}$$

$$x_1 = r \cos(\varphi + \alpha), \quad y_1 = r \sin(\varphi + \alpha)$$

oder aber

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y_1 = y \cos \alpha + x \sin \alpha.$$

5. Es möge die zweizählige Achse u den Winkel der positiven x - und y -Achse halbieren, dann folgt aus Fig. 32 unmittelbar

$$x_1 = y, \quad y_1 = x.$$

Die Koordinate z geht, wie wir schon erwähnten, in $\bar{z}$ über. Wir drücken dies kurz so aus, daß der Punkt

¹⁾ Die Figuren 31), 32), 32a) enthalten nur die Verhältnisse in der xy -Ebene.

$$xyz \text{ in } yx\bar{z}$$

übergehe. Halbiert die Achse u die andern Achsenwinkel, so finden wir analog, daß

$$xyz \text{ in } \bar{y}\bar{x}\bar{z}$$

übergeht (Fig. 32a).

6. Sei die Ebene σ_v insbesondere eine Ebene σ_d , die den

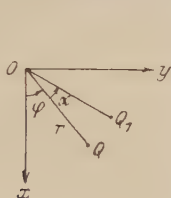


Fig. 31

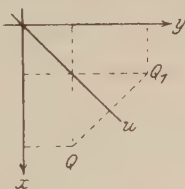


Fig. 32

Winkel der Koordinatenebenen halbiert, so daß sie die xy -Ebene in der vorgenannten Geraden u schneidet. Dann liegen Q und Q_1 wie in Fig. 32 und wir sehen sofort, daß durch sie

$$xyz \text{ in } yxz$$

übergeht.

7. Eine letzte Formel knüpft sich an die dreizählige Achse d des Würfels, die in der Tetraedergruppe auftritt. Wir denken

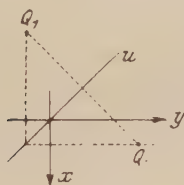


Fig. 32a

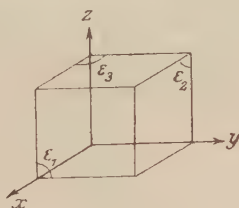


Fig. 33.

sie so liegend, daß sie den von der positiven x , y , z -Achse gebildeten Oktanten durchdringt, also in die Gerade OO' von Fig. 22 fällt (S. 58). Durch die ihr entsprechende Drehung möge die x -Achse in die y -Achse, diese in die z -Achse, und die z -Achse in die x -Achse übergehen. Wir werden sehen, daß dieser zyklischen Vertauschung der Koordinatenachsen auch eine

zyklische Vertauschung der Koordinaten entspricht; und zwar in der Weise, daß

$$x y z \text{ in } z x y$$

übergeht. Um dies zu zeigen, wollen wir (Fig. 33) den Punkt P als Schnittpunkt der drei Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ betrachten, die auf den x, y, z -Achsen senkrecht stehen und auf ihnen die Koordinatenwerte von P abschneiden. Gelangen dann diese drei Ebenen infolge der Drehung $\mathfrak{D}$ in drei Lagen $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$, so ist deren Schnittpunkt P' (x', y', z') derjenige, der aus P durch $\mathfrak{D}$ entsteht. Geht nun die x -Achse in die y -Achse über, so geht die zur x -Achse senkrechte Ebene ε_1 in die zur y -Achse senkrechte Ebene ε_2' über, und es ist daher $y' = x$; ebenso sieht man, daß $z' = y, x' = z$ ist; wir erhalten also

$$x' = z, y' = x, z' = y$$

und dies ist die obige Behauptung. Die Drehung $\mathfrak{D}^2$ führt diese zyklische Vertauschung zweimal aus; es sind daher

$$x y z, z x y, y z x$$

die drei Punkte, die durch die Drehung $\mathfrak{D}$ ineinander übergehen.

Mittels dieser einfachen Regeln vermögen wir die gestellten Aufgaben zu lösen.

§ 2. Das triklin und monokline System. Die Gruppen, die wir zu betrachten haben, sind

$$C_1, S_2, C_1^h, C_2, C_2^h.$$

Für sie ergeben sich die gesuchten Koordinatenwerte ohne weiteres aus den Regeln 1), 2) und 3); und zwar in der Form

$$\begin{aligned} C_1: & \quad x y z \\ S_2: & \quad x y z \text{ und } \bar{x} \bar{y} \bar{z} \\ C_1^h: & \quad x y z \text{ und } x y \bar{z} \\ C_2: & \quad x y z \text{ und } \bar{x} \bar{y} z \\ C_2^h: & \quad x y z, \bar{x} \bar{y} z, x y \bar{z}, \bar{x} \bar{y} \bar{z}. \end{aligned}$$

Die vier Punkte von C_2^h entsprechen ihren vier Operationen 1, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ (Kap. VI, § 1).

§ 3. **Das rhombische System.** Auch für das rhombische System ergeben sich die Koordinatenwerte noch unmittelbar aus den Regeln 1), 2), 3). Wir setzen dabei voraus, daß die u, v, w -Achse in die x, y, z -Achse fällt. Die Gruppen sind

$$C_2^v, V, V^h.$$

Die Gruppe C_2^v besitzt die z -Achse als Umwundungsachse und die xz - und yz -Ebene als Symmetrieebenen; also ergeben sich ihre gleichwertigen Punkte aus 1) und 2) in der Form

$$C_2^v: xyz, \bar{x}\bar{y}z, x\bar{y}z, \bar{x}yz.$$

Die Gruppe V enthält die Koordinatenachsen als Umwundungsachsen; ihre gleichwertigen Punkte sind also gemäß 1)

$$V: xyz, \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{x}yz, x\bar{y}\bar{z}.$$

Der Gruppe V^h gehören alle Punkte an, die nach den Regeln 1), 2), 3) sich aus xyz ergeben, also

$$V^h: xyz, \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{x}yz, x\bar{y}\bar{z}, \\ \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}yz, x\bar{y}z, xyz.$$

Die Reihenfolge dieser Punkte entspricht dem Bildungsgesetz $V^h = \{V, \mathfrak{I}\}$, das V^h aus V durch Multiplikation mit $\mathfrak{I}$ hervorgehen läßt. Demgemäß enthält die erste Zeile die Punkte von V und die zweite Zeile diejenigen, die aus jedem dieser Punkte durch Inversion entstehen. Man sieht beiläufig, daß die Gruppe V^h durch alle 8 Vorzeichenkombinationen charakterisiert ist.

§ 4. **Das rhomboedrische System.** Wird die z -Achse als Hauptachse gewählt, so ergeben sich aus den Formeln 4) von § 1 für $\varphi = 2\pi/3$ und $4\pi/3$ die Werte

$$x_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\sqrt{3}, \quad y_1 = \frac{1}{2}x\sqrt{3} - \frac{1}{2}y \\ x_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\sqrt{3}, \quad y_2 = -\frac{1}{2}x\sqrt{3} - \frac{1}{2}y.$$

Diese Werte lassen keine weitere vereinfachende Schreibweise zu.

Die zu betrachtenden Gruppen sind

$$C_3, C_3^i, C_3^v, D_3, D_3^d.$$

Wir lassen die Ebene σ_v von C_3^v in die yz -Ebene fallen; dann ergeben sich für C_3, C_3^i und C_3^v gemäß Regel 1) und 3) die folgenden Koordinatenwerte

$$C_3: xyz, x_1 y_1 z, x_2 y_2 z,$$

$$C_3^i: xyz, x_1 y_1 z, x_2 y_2 z; \bar{x} \bar{y} \bar{z}, \bar{x}_1 \bar{y}_1 \bar{z}, \bar{x}_2 \bar{y}_2 \bar{z},$$

$$C_3^v: xyz, x_1 y_1 z, x_2 y_2 z; \bar{x} y z, \bar{x}_1 y_1 z, \bar{x}_2 y_2 z.$$

Die Gruppe $D_3 = \{C_3, \mathbb{I}\}$ denken wir uns so erzeugt, daß die zweizählige Achse u in die x -Achse falle. Ihr entspricht nach Regel 2) der Übergang von xyz in $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$. Die Gruppe $D_3^d = \{D_3, \mathfrak{J}\}$ entsteht aus D_3 durch Hinzufügen eines Symmetriezentrums und demgemäß erhalten wir

$$D_3: xyz, x_1 y_1 z, x_2 y_2 z; \bar{x} \bar{y} \bar{z}, \bar{x}_1 \bar{y}_1 \bar{z}, \bar{x}_2 \bar{y}_2 \bar{z}.$$

$$D_3^d: xyz, x_1 y_1 z, x_2 y_2 z; \bar{x} \bar{y} \bar{z}, \bar{x}_1 \bar{y}_1 \bar{z}, \bar{x}_2 \bar{y}_2 \bar{z}, \\ \bar{x} y z, \bar{x}_1 y_1 z, \bar{x}_2 y_2 z; \bar{x} y \bar{z}, \bar{x}_1 y_1 \bar{z}, \bar{x}_2 y_2 \bar{z}.$$

Die Ebene σ_v und die Achse u hat in allen Gruppen die gleiche Lage zum Koordinatensystem; daher enthält die Gruppe D_3^d ein jedes Symmetrieelement, das in einer der anderen Gruppen vorkommt. Es müssen sich daher die gleichwertigen Punkte einer jeden dieser Untergruppen von D_3^d in D_3^d vorfinden. Dies ist leicht zu bestätigen. Wir wollen die beiden Reihen von D_3^d durch I und II bezeichnen, die ersten drei Koordinatentripel durch Ia und IIa, die letzten drei durch Ib und IIb. Dann sind die Untergruppen folgendermaßen charakterisiert:

$$D_3: Ia \text{ und } Ib; \quad C_3^v: Ia \text{ und } IIb,$$

$$C_3^i: Ia \text{ und } IIa; \quad C_3: Ia.$$

Für die vorstehenden Gruppen leiten wir noch ein zweites Formelsystem ab. Oftmals ist es zweckmäßig, die Hauptachse nicht in die z -Achse zu legen, sondern sie symmetrisch gegen die drei Koordinatenachsen anzunehmen. Sie fällt dann mit der in § 1, 7 benutzten Geraden d zusammen, verläuft also im positiven Oktanten und bildet mit den drei positiven Achsen gleiche Winkel. Alsdann sind, wie wir a. a. O. zeigten,

$$xyz; zxy, yzx$$

die Koordinaten der ihr entsprechenden Punkte. Die Nebenachse kann man zweckmäßig so annehmen, daß sie in die xy -Ebene fällt; sie halbiert alsdann den Winkel der x - und

y -Achse und verläuft im zweiten und vierten Quadranten, fällt also mit der Geraden w'' von Fig. 22 zusammen; sie bewirkt, wie wir in § 1, 5 ausführten, den Übergang von

$$xyz \text{ in } \bar{y}\bar{x}\bar{z}.$$

Weiter bedürfen wir noch der Formeln für die Spiegelung gegen eine Ebene, die durch die z -Achse geht und den Winkel zwischen der positiven x - und y -Achse halbiert. Aus § 1, 6 ergibt sich unmittelbar, daß

$$xyz \text{ und } yxz$$

die Koordinaten der ihr entsprechenden gleichwertigen Punkte sind. Für die Inversion gilt auch hier die Regel von § 1, 3; wir erhalten daher das folgende Resultat:

$$\begin{aligned} C_3: & \quad xyz, \quad zxy, \quad yzx, \\ C_3^i: & \quad xyz, \quad zxy, \quad yzx; \quad \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \quad \bar{z}\bar{x}\bar{y}, \quad \bar{y}\bar{z}\bar{x}, \\ C_3^v: & \quad xyz, \quad zxy, \quad yzx; \quad yxz, \quad xzy, \quad zyx, \\ D_3: & \quad xyz, \quad zxy, \quad yzx; \quad \bar{y}\bar{x}\bar{z}, \quad \bar{x}\bar{z}\bar{y}, \quad \bar{z}\bar{y}\bar{x}, \\ D_3^d: & \quad xyz, \quad zxy, \quad yzx; \quad \bar{y}\bar{x}\bar{z}, \quad \bar{x}\bar{z}\bar{y}, \quad \bar{z}\bar{y}\bar{x}, \\ & \quad \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \quad \bar{z}\bar{x}\bar{y}, \quad \bar{y}\bar{z}\bar{x}; \quad yxz, \quad xzy, \quad zyx. \end{aligned}$$

Die Gruppe D_3^d enthält also alle sechs Vertauschungen und die Vorzeichenumdrehungen; die Gruppe C_3^v enthält nur die sechs Permutationen.

§ 5. Das tetragonale System. Das tetragonale System enthält die Gruppen

$$S_4, V^a, C_4, C_4^v, C_4^h, D_4, D_4^h.$$

Wir haben zunächst die Formeln für die Drehung um die z -Achse als vierzählige Achse abzuleiten. Sie ergeben sich aus den Formeln § 1, 4) für die Werte $\varphi = \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Nennen wir die ihnen entsprechenden Punkte der xy -Ebene Q_1, Q_2, Q_3 , so folgt für sie

$$x_1 = -y_1, y_1 = x; \quad x_2 = -x, y_2 = -y; \quad x_3 = y, y_3 = -x,$$

oder kürzer

$$yx, \quad \bar{x}\bar{y}, \quad y\bar{x}.$$

Liegt statt der Drehung eine Drehspiegelung vor, so ist noch z durch $\bar{z}$ zu ersetzen. Damit sind die vorbereitenden Betrachtungen erledigt, und wir erhalten zunächst die Formeln:

$$S_4: xyz, \bar{y}x\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, y\bar{x}\bar{z},$$

$$C_4: xyz, \bar{y}xz, \bar{x}\bar{y}z, y\bar{x}z.$$

Die Punkte von V^d ergeben sich, wenn wir zur Gruppe V die Spiegelung $\mathfrak{S}_d$ hinzufügen; sie bewirkt bei jedem Punkt von V die in § 1, 6 erwähnte Vertauschung. Wir erhalten also:

$$V^d: xyz, x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}z,$$

$$yxz, \bar{y}x\bar{z}, y\bar{x}\bar{z}, \bar{y}x\bar{z}.$$

Um die Punkte von C_4^v und $C_4^h = \{C_4, \mathfrak{S}\}$ zu erhalten, haben wir die Punkte von C_4 einerseits mit der Spiegelung an einer Ebene σ_v , andererseits mit der Inversion zu kombinieren.

Als Ebene σ_v wählen wir die yz -Ebene; die Spiegelung an ihr bewirkt den Übergang der ersten Koordinate x in $\bar{x}$, die Inversion den von xyz in $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$; also ergibt sich:

$$C_4^v: xyz, \bar{y}xz, \bar{x}\bar{y}z, y\bar{x}z$$

$$\bar{x}\bar{y}z, yxz, x\bar{y}z, \bar{y}\bar{x}z,$$

$$C_4^h: xyz, \bar{y}xz, \bar{x}\bar{y}z, y\bar{x}z$$

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{y}\bar{x}\bar{z}, xyz, y\bar{x}z.$$

Es bleiben noch die Gruppen D_4 und D_4^h zu erörtern. Wir haben auszugehen von $D_4 = \{C_4, \mathfrak{U}\}$ und $D_4^h = \{D_4, \mathfrak{S}\}$. Wir stellen sofort alle der Gruppe D_4^h entsprechenden Koordinatentripel zusammen. Für die Umwendungsachse u , mittels deren wir D_4 aus C_4 ableiten, können wir die in der xy -Ebene liegende in § 1, 5) benutzte Achse wählen. Sie bewirkt die Vertauschung von x und y und den Übergang von z in $\bar{z}$. Dies ist also bei den Punkten von C_4 auszuführen. Dann ist noch für jedes Tripel der der Inversion entsprechende Übergang von xyz in $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ vorzunehmen. So ergibt sich für D_4^h die Tabelle

$$D_4^h: \begin{array}{l} \text{I. } xyz, \bar{y}xz, \bar{x}\bar{y}z, y\bar{x}z \\ \text{II. } yxz, x\bar{y}z, \bar{y}\bar{x}z, \bar{x}\bar{y}z, \\ \text{III. } \bar{x}\bar{y}z, \bar{y}\bar{x}z, xyz, y\bar{x}z \\ \text{IV. } \bar{y}xz, \bar{x}\bar{y}z, yxz, x\bar{y}z. \end{array}$$

Die Reihen I und II entsprechen nach dem Vorstehenden der Gruppe D_4 . Es sind aber auch die den anderen Untergruppen von D_4^h entsprechenden Koordinatentripel sämtlich unter denen von D_4^h enthalten. Die Wahl der erzeugenden Symmetrieelemente ist nämlich auch in diesem Fall immer so geschehen, daß der Gruppe D_4^h jedes Symmetrieelement zukommt, das eine der anderen Gruppen besitzt. Im besonderen ergibt sich:

D_4 : Reihen I und II, C_4 : Reihe I,
 C_4^h : Reihen I und III, C_4^v : Reihen I und IV.

Endlich sei auf folgendes formale Gesetz hingewiesen: Die Gruppe D_4^h ist durch die Vertauschungen der ersten beiden Koordinaten und alle 8 Vorzeichenkombinationen charakterisiert. Die Gruppe enthält 16 Operationen und 16 Punkte; 8 entstehen durch die Vorzeichenkombinationen aus xyz , 8 andere aus yxz , und das ist die Behauptung¹⁾.

Für die Gruppe C_4^v sei noch eine zweite Ableitung erwähnt; sie ergibt sich, wenn wir die Ebene σ_v so legen, daß sie den Winkel der positiven x - und y -Achse halbiert. Sie bewirkt nach § 1, 6) den Übergang von xyz in yxz und wir finden daher für C_4^v folgende Koordinatenwerte:

$$C_4^v: \quad xyz, \quad \bar{y}xz, \quad \bar{x}\bar{y}z, \quad y\bar{x}z \\
\quad \quad yxz, \quad x\bar{y}z, \quad \bar{y}\bar{x}z, \quad \bar{x}yz.$$

Sie stimmen, wie nötig, mit den obigen überein; nur hat sich ihre Reihenfolge durch die neue Wahl von σ_v etwas geändert.

§ 6. Das hexagonale System. Für die Gruppen C_3^h und D_3^h ist die Hauptachse noch dreizählig. Die Spiegelung gegen σ_h führt nur z in $\bar{z}$ über; wir erhalten daher aus den Formeln für C_3 und D_3 unmittelbar

$$C_3^h: \quad xyz, \quad x_1 y_1 z, \quad x_2 y_2 z, \quad x\bar{y}\bar{z}, \quad x_1 \bar{y}_1 \bar{z}, \quad x_2 \bar{y}_2 \bar{z}, \\
D_3^h: \quad xyz, \quad x_1 y_1 z, \quad x_2 y_2 z, \quad x\bar{y}\bar{z}, \quad x_1 \bar{y}_1 \bar{z}, \quad x_2 \bar{y}_2 \bar{z} \\
\quad \quad x y \bar{z}, \quad x_1 y_1 \bar{z}, \quad x_2 y_2 \bar{z}, \quad x\bar{y}z, \quad x_1 \bar{y}_1 z, \quad x_2 \bar{y}_2 z.$$

¹⁾ Ähnliche nicht ganz so einfache Regeln kann man auch für die anderen Gruppen bilden, insbesondere für D_4 , C_4^v und V^d .

Für die weiteren Gruppen haben wir zunächst die Koordinatenwerte abzuleiten, die den Drehungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}^3$, $\mathfrak{A}^4$, $\mathfrak{A}^5$ entsprechen. Nun ist $\mathfrak{A}^3$ eine Umwendung; ihre Wirkung in der xy -Ebene ist also einer Inversion äquivalent; sie läßt $x\ y$ in $\bar{x}\ \bar{y}$ übergehen. Wir haben daher nur die Werte für $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ zu ermitteln und dann noch den der Inversion entsprechenden Übergang vorzunehmen.

Es wird

$$\begin{aligned} x_1 &= {}^{1/2}x - {}^{1/2}y \sqrt{3}, & y_1 &= {}^{1/2}x \sqrt{3} + {}^{1/2}y \\ x_2 &= - {}^{1/2}x - {}^{1/2}y \sqrt{3}, & y_2 &= {}^{1/2}x \sqrt{3} - {}^{1/2}y \end{aligned}$$

und es ergeben sich daher zunächst für die sechszählige z -Achse die sechs gleichwertigen Punkte

$$x\ y\ z, \quad x_1\ y_1\ z, \quad x_2\ y_2\ z, \quad \bar{x}\ \bar{y}\ z, \quad \bar{x}_1\ \bar{y}_1\ z, \quad \bar{x}_2\ \bar{y}_2\ z.$$

Die Spiegelungsebene σ_v legen wir wieder in die yz -Ebene und wählen die x -Achse als zweizählige Achse u . Der Spiegelung entspricht der Übergang von x in $\bar{x}$, der Umwendung um die x -Achse der Übergang von $y\ z$ in $\bar{y}\ \bar{z}$.

Damit sind wieder die entsprechenden Koordinatenwerte unmittelbar gegeben. Wir stellen auch hier zunächst die sämtlichen der Gruppe D_6^h entsprechenden Koordinatenwerte zusammen; sie sind

$$\begin{aligned} D_6^h: \quad & \text{I. } x\ y\ z, \quad x_1\ y_1\ z, \quad x_2\ y_2\ z, \quad \bar{x}\ \bar{y}\ z, \quad \bar{x}_1\ \bar{y}_1\ z, \quad \bar{x}_2\ \bar{y}_2\ z \\ & \text{II. } x\ \bar{y}\ \bar{z}, \quad x_1\ \bar{y}_1\ \bar{z}, \quad x_2\ \bar{y}_2\ \bar{z}, \quad \bar{x}\ y\ z, \quad \bar{x}_1\ y_1\ z, \quad \bar{x}_2\ y_2\ z \\ & \text{III. } \bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}, \quad \bar{x}_1\ \bar{y}_1\ \bar{z}, \quad \bar{x}_2\ \bar{y}_2\ \bar{z}, \quad x\ y\ z, \quad x_1\ y_1\ z, \quad x_2\ y_2\ z \\ & \text{IV. } \bar{x}\ y\ z, \quad \bar{x}_1\ y_1\ z, \quad \bar{x}_2\ y_2\ z, \quad x\ \bar{y}\ \bar{z}, \quad x_1\ \bar{y}_1\ \bar{z}, \quad x_2\ \bar{y}_2\ \bar{z}, \end{aligned}$$

und zwar entspricht die Reihe II den Punkten, die aus der Reihe I durch die Umwendung um die x -Achse hervorgehen; Reihe III und IV sind diejenigen, die sich aus I und II durch Inversion ergeben. Die aus II durch Inversion hervorgehende Reihe IV entsteht wiederum aus I mittels der Operation $\mathfrak{S}_v$. Daher erhalten wir folgende Tabelle:

$$\begin{aligned} C_6: & \text{Reihe I,} & C_6^v: & \text{Reihe I und IV,} \\ C_6^h: & \text{Reihe I und III,} & D_6: & \text{Reihe I und II.} \end{aligned}$$

§ 7. **Das kubische System.** Auch für die Herstellung der Systeme gleichwertiger Punkte im kubischen System sind die nötigen Hilfsmittel in § 1 vollständig enthalten. Wir gelangen durch die Formel $T = \{V, \mathfrak{D}\}$ von der Vierergruppe zur Tetraedergruppe, haben also die 4 Punkte der Vierergruppe den zyklischen Änderungen zu unterwerfen, die nach § 1 den Drehungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^2$ entsprechen. Wir legen den Anfangspunkt des Koordinatensystems in die Würfecke O und erhalten für die Tetraedergruppe die Tabelle¹⁾

$$\begin{array}{cccc} xyz, & x\bar{y}\bar{z}, & \bar{x}y\bar{z}, & \bar{x}\bar{y}z \\ T: & yzx, & \bar{y}z\bar{x}, & \bar{y}\bar{z}x \\ & zxy, & \bar{z}x\bar{y}, & \bar{z}\bar{x}y. \end{array}$$

Aus der Tetraedergruppe ergibt sich die Oktaedergruppe mittels der Formel $O = \{T, \mathfrak{B}'\}$ von Kap. V, § 8. Wir legen die Achse w so, daß sie in die xy -Ebene fällt und die Winkel des zweiten und vierten Quadranten halbiert, also der Achse w'' in Fig. 22a entspricht²⁾. Gemäß § 1 bewirkt sie für jeden Punkt den Übergang von

$$xyz \text{ in } \bar{y}\bar{x}\bar{z};$$

ihn haben wir also in den Koordinatenwerten von T auszuführen. Fügen wir noch die Inversion hinzu, was die Umkehrung der Vorzeichen bei allen Koordinatenwerten bewirkt, so sind damit alle Koordinatenwerte der Gruppe O^h gebildet. Wir erhalten also die 48 gleichwertigen Punkte

$$\begin{array}{ll} xyz, x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, & \bar{y}\bar{x}\bar{z}, y\bar{x}z, \bar{y}xz, yxz \\ \text{I) } yzx, \bar{y}z\bar{x}, \bar{y}\bar{z}x, yz\bar{x}, & \text{II) } \bar{z}\bar{y}\bar{x}, z\bar{y}\bar{x}, \bar{z}yx, zy\bar{x} \\ zxy, \bar{z}x\bar{y}, \bar{z}\bar{x}y, z\bar{x}y, & \bar{x}zy, \bar{x}zy, xzy, xzy \\ \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{x}yz, x\bar{y}z, x\bar{y}\bar{z}, & yxz, \bar{y}xz, \bar{y}\bar{x}z, \bar{y}\bar{x}\bar{z} \\ \text{III) } \bar{y}z\bar{x}, yz\bar{x}, \bar{y}zx, yzx, & \text{IV) } zy\bar{x}, \bar{z}\bar{y}\bar{x}, \bar{z}yx, zy\bar{x} \\ \bar{z}\bar{x}y, zxy, zxy, \bar{z}xy, & xzy, xzy, \bar{x}zy, \bar{x}zy. \end{array}$$

¹⁾ Die zweite Zeile entspricht der Drehung $\mathfrak{D}^2$, die dritte Zeile der Drehung $\mathfrak{D}$; was aus formalen Gründen geschehen ist.

²⁾ Man kann den Koordinatenanfangspunkt auch in die Mitte M des Würfels legen; beides kommt auf dasselbe hinaus.

Hierin müssen die Koordinatenwerte von O , T^h , T^a und T wiederum enthalten sein. Der Gruppe O entsprechen gemäß dem vorstehenden Bildungsgesetz die Tabellen I und II. Der Gruppe $T^h = \{T, \mathfrak{F}\}$ entsprechen die Tabellen I und III, da III aus I durch Inversion hervorgeht. Endlich gehören der Gruppe $T^a = \{T, \mathfrak{S}_a\}$ die Tabellen I und IV an. Dies ist leicht zu zeigen. Es entsteht IV aus II durch Inversion und II aus I durch die Umwendung um die zweizählige Achse w'' der xy -Ebene. Deren Produkt liefert die Spiegelung $\mathfrak{S}_a$ an einer diagonalen Ebene σ_a durch die z -Achse und daher entsteht in der Tat IV aus I durch die Spiegelung $\mathfrak{S}_a$. Also folgt:

O : Tabelle I und II, T : Tabelle I,
 T^h : Tabelle I und III, T^a : Tabelle I und IV.

Folgende formale Sätze mögen noch eine Stelle finden. Die Gruppe O^h ist durch alle Permutationen von xyz , sowie durch alle möglichen acht Zeichenkombinationen charakterisiert. Dies kann man auch direkt zeigen. Es gibt nämlich sechs Permutationen von xyz und aus jeder lassen sich durch die acht Vorzeichenkombinationen acht Koordinatentripel bilden, nämlich

$$xyz, x\bar{y}z, x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}yz, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}^1).$$

So entstehen im Ganzen 48 Koordinatentripel, die sämtlich verschieden sind. Da nun jedem der 48 Punkte ein derartiges Koordinatentripel entspricht, so müssen sie mit den 48 Koordinatentripeln der Tabelle identisch sein.

Die Gruppe T ist durch die zyklischen Vertauschungen von xyz und die Zeichenkombinationen

$$+++ , +-+ , -+- , --- +$$

charakterisiert.

Die Zeichenkombinationen entsprechen nämlich der Vierergruppe und die zyklischen Vertauschungen der Drehung $\mathfrak{D}$.

Die Gruppe T^h ist durch die zyklischen Vertauschungen in Verbindung mit allen möglichen acht Zeichenkombinationen

¹⁾ Es sind die 8 Tripel der Gruppe V^h (§ 3).

charakterisiert. Unter den 24 Koordinatentripeln von I und III treten nämlich drei mit lauter positiven Größen auf, und zwar xyz , yzx , zxy ; die andern entstehen aus ihnen durch bloße Vorzeichenvertauschung. Auf diese Weise müssen sich daher aus jeder von ihnen sieben neue bilden.

Die Gruppe T^d ist durch alle Permutationen von xyz sowie durch die vier Zeichenkombinationen

$$+++ , +--, -+-, ---$$

charakterisiert. In der Tat enthalten I und IV einerseits alle Permutationen von xyz , anderseits, wie die erste Zeile von I zeigt, neben dem Punkt xyz die Punkte $x\bar{y}\bar{z}$, $\bar{x}y\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}z$ ¹⁾.

Kap. VIII. Punktreihen, Punktnetze und Punktgitter

§ 1. Die regelmäßigen Punktreihen. Eine Gerade g sei Träger einer Reihe von Punkten, von denen je zwei benachbarte gleichen Abstand besitzen, so bilden diese Punkte eine *regelmäßige Punktreihe* (kürzer *Punktreihe*). Ist O

(Fig. 34) ein Punkt der Punktreihe,

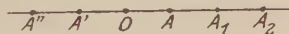


Fig. 34

ist A der ihm in positiver Richtung zunächst liegende, und wird $OA = 2\tau$

gesetzt²⁾, so werden die Abszissen aller dieser Punkte $O, A, A_1, \dots A', \dots$ durch die Gleichung

$$x = 2m\tau$$

dargestellt, wenn m alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft. Eine solche beiderseits unbegrenzte Punktreihe hat die folgenden evidenten Eigenschaften:

1) Die Punktreihe geht durch eine Translation von der Länge 2τ in sich über; ebenso durch die inverse Translation.

2) Sie geht auch durch wiederholte Translation von der Länge 2τ in sich über, also auch durch jede Translation $2m\tau$,

¹⁾ Auch für die Gruppe O gibt es ein solches, wenn auch nicht so einfaches Gesetz.

²⁾ Der Faktor 2 hat den Zweck, bei den späteren Rechnungen möglichst die Brüche zu vermeiden.

wo m wieder alle positiven und negativen ganzen Zahlenwerte annehmen kann.

3) Andere Translationen, die die Punktreihe in sich überführen, gibt es nicht.

Wir bezeichnen diese Translationen auch als *Deckschiebungen* der Punktreihe.

Auf diese Deckschiebungen können wir den Gruppenbegriff ausdehnen. Irgend zwei Deckschiebungen der Punktreihe, nacheinander ausgeführt, liefern nämlich wieder eine Deckschiebung. Ist die Länge der ersten $2\tau'$, die Länge der zweiten $2\tau''$, so wird die resultierende Deckschiebung durch

$$2\tau = 2\tau' + 2\tau''$$

dargestellt¹⁾. Die Gesamtheit der Deckschiebungen, die die Punktreihe in sich überführen, nennen wir ihre *Translationengruppe*. Die damit eintretende Verallgemeinerung des früher eingeführten Gruppenbegriffs besteht nur in dem Übergang vom Endlichen zum Unendlichen. Die Gruppen von Kap. V und VI enthielten nur eine *endliche* Zahl von Operationen, während es *unendlich viele* Deckschiebungen der Punktreihe in sich gibt. Wir erwähnten bereits, daß in der Gruppe neben der Translation 2τ auch ihre *inverse* -2τ vorhanden ist; ihr Produkt liefert die Identität, diese gehört also gleichfalls der Gruppe an. Da alle Translationen dieser Gruppe in dieselbe Gerade fallen, heißt sie insbesondere eine *lineare Translationengruppe*.

Wir können die Beziehung, die zwischen den Punkten der Punktreihe und den sämtlichen Translationen $2m\tau$ der Gruppe besteht, durch folgenden evidenten Satz darstellen:

1. Wird ein Punkt P sämtlichen Translationen $2m\tau$ einer linearen Translationengruppe unterworfen, so entsteht dadurch eine regelmäßige Punktreihe.

Man nennt deshalb die Translation 2τ auch die *erzeugende (primitive) Translation*²⁾.

¹⁾ Werden die Deckschiebungen durch $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I}''$ bezeichnet, so schreibt sich die obige Gleichung $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'\mathfrak{I}''$.

²⁾ Bravais sagt *Parameter*.

Der vorstehende Satz läßt auch eine Umkehrung zu; eine jede lineare Gruppe von Translationen bestimmt eine regelmäßige Punktreihe, deren Deckschiebungen sie darstellt. Gemäß dem Zweck und dem Rahmen dieser Schrift beschränken wir uns aber hier und im folgenden ausdrücklich auf Translationen, die *nicht beliebig klein werden können*, die also sämtlich oberhalb einer gewissen endlichen Länge bleiben¹⁾. Dann läßt sich der Beweis wie folgt, führen.

¹⁾ Über die mathematische Eigenart des allgemeinen Gruppenbegriffs sei folgendes bemerkt.

1. Es widerspricht nicht dem Gruppenbegriff, anzunehmen, daß in der Gruppe auch die Translationen τ , $\tau/2$, $\tau/4$, $\tau/8$ usw. usw. enthalten sind. Um ein Beispiel zu bilden, betrachte man die Reihe der Translationen

$$\tau, \tau/2, \tau/4, 3\tau/4, \tau/8, 3\tau/8, 5\tau/8, 7\tau/8, \dots$$

nebst ihren entgegengesetzten, so besitzen sie durchaus Gruppencharakter. Jede einzelne von ihnen ist endlich, zu jeder existiert ihre inverse, und die Summe von zwei Translationen gehört der Reihe stets an. Der Identität entsprechend fügen wir noch die Translation der Länge Null hinzu. Die Endpunkte aller dieser von O aufgetragenen Translationen fallen offenbar sämtlich in die Strecke τ , und zwar in alle die Punkte, die man durch fortgesetztes Halbieren aller entstehenden Teilstrecken erhält. *Sie bilden keine Punktreihe mehr.*

Dieser Umstand macht die obige Festsetzung nötig. Die Translationen, die für die Zwecke dieses Buches in Betracht zu ziehen sind, sind mögliche Deckbewegungen einer regulären Anordnung *isolierter* Punkte, und können daher nicht unter eine gewisse Größe sinken.

2. Ein zweiter Hinweis ist der folgende. Man denke sich unendlich viele Strecken, deren jede größer als 1 sein soll, so ist es weder selbstverständlich noch richtig, daß es unter ihnen stets eine kleinste gibt. Beispielsweise gibt es unter den Strecken, deren Längen durch den Ausdruck

$$1 + \frac{1}{2^n}; n = 1, 2, 3, \dots$$

dargestellt sind, auch solche, die der Länge 1 beliebig nahe kommen; aber eine Strecke der Länge 1 selbst ist unter ihnen nicht enthalten und nur diese würde dem Begriff einer kleinsten Strecke entsprechen. Anders ist es, wenn die Strecken, mit denen man es zu tun hat, eine Gruppe bilden, wie z. B. unsere Translationen. Wenn man von solchen Strecken weiß, daß jede von ihnen oberhalb einer gewissen Größe bleibt, *dann kann man beweisen, daß es unter ihnen notwendig eine*

Wir denken uns alle Translationen der Gruppe von einem Punkt O aus aufgetragen; ihre Endpunkte fallen dann nach Voraussetzung in eine Gerade g , und die Verteilung dieser Endpunkte auf g ist das, was in Frage steht. Sei $OA = 2\tau$ eine kleinste Translation der Gruppe)¹, so existieren in der Gruppe auch alle Translationen $2m\tau$. Deren Endpunkte bilden nach Satz 1 eine regelmäßige Punktreihe mit 2τ als primitiver Translation. Es ist nun noch zu zeigen, daß es andere Endpunkte von Translationen nicht gibt. Gäbe es nämlich eine Translation $2\tau' = OT$, deren Endpunkt zwischen zwei benachbarte Punkte P und Q fiele, so ist auch (Fig. 35)



Fig. 35

$$PO + OT = PT$$

eine Translation der Gruppe, und dies ist, da $PT < PQ = OA$ ist, unmöglich. Also:

2. Eine lineare Gruppe von Translationen, deren Translationen nicht unter eine endliche Länge sinken, bestimmt eine regelmäßige Punktreihe von der Art, daß die Gruppe aus allen Deckschiebungen dieser Punktreihe besteht. Alle Translationen sind durch $2m\tau$ darstellbar.

kleinste gibt. Dieser Beweis soll hier kurz angedeutet werden. Wir nehmen an, es gäbe keine kleinste. Ferner sei OT die untere Schranke für alle Translationen und OT' eine Translation, die nur wenig größer ist als OT . Da sie nach Annahme nicht eine kleinste Translation darstellt, so gibt es auch eine Translation $OT'' < OT'$ und zwar muß T'' ein Punkt der kleinen Strecke TT' sein. Nun sollen die Translationen eine Gruppe bilden; daher ist auch die Summe $T''O + OT' = T''T'$ eine Translation der Gruppe. Diese würde aber sicher kleiner als OT ausfallen und dies widerspricht der Festsetzung, daß OT die untere Schranke ist. Damit ist der Beweis geliefert.

Ähnliche Sätze bestehen für eine ebene und eine räumliche Translationengruppe; wir haben von ihnen in § 4 und § 6 Gebrauch zu machen.

Im Interesse der Exaktheit des Textes werden wir daher die hier zu betrachtenden Translationengruppen, wo es nötig ist, durch den Zusatz „von kristallographischer Verwendbarkeit“ charakterisieren.

¹) Daß es wirklich eine kleinste gibt, bedarf, genau genommen, eines mathematischen Beweises; hier soll nur auf ihn hingewiesen werden.

§ 2. **Das Punktnetz.** Wir gehen von zwei Geraden g und h aus, die wir als Achsen eines Koordinatensystems betrachten; ihr Schnittpunkt sei O (Fig. 36). Auf g und h nehmen wir von O ausgehend je eine regelmäßige Punktreihe an, auf g die Punkte $O, A, A_1, \dots, A', A'', \dots$ und auf h die Punkte $O, B, B_1, \dots, B', B'', \dots$. Ziehen wir dann durch diese Punkte die Parallelen zu den Achsen h und g , so zerlegen sie die Ebene in *kongruente Parallelelogramme*. Wir bezeichnen sie als *Netz von Parallelelogrammen* und ihre Ecken als *Punktnetz* $\mathfrak{N}$. Das Parallelelogramm $OACB$ soll *primitives Parallelelogramm* oder auch die *Stammfigur* π_o des Netzes $\mathfrak{N}$ heißen.

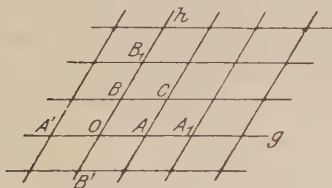


Fig. 36

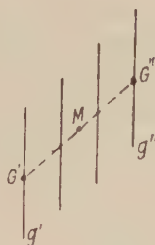


Fig. 37

Setzen wir

$$1) \quad OA = 2\tau_1, \quad OB = 2\tau_2,$$

so stellen die Gleichungen

$$2) \quad x = 2m_1\tau_1, \quad y = 2m_2\tau_2$$

die Koordinaten aller Netzpunkte dar, wenn m_1 und m_2 unabhängig voneinander alle positiven und negativen *ganzen* Zahlen durchlaufen.

Jedes Punktnetz besitzt Deckoperationen; zu ihnen gelangen wir folgendermaßen. Wir bezeichnen die Schaar aller zu g parallelen Geraden durch $\{g\}$, ebenso alle zu h parallelen Geraden durch $\{h\}$. Die geometrische Eigenart dieser Schaaren ist die, daß ihre Geraden in gleichen Abständen aufeinander folgen. Wir wollen nun zunächst nur die Schaar $\{g\}$ ins Auge fassen; zwei ihrer Geraden (Fig. 37) seien g' und g'' . Auf g'

nehmen wir den Punkt G' und auf g'' einen Punkt G'' beliebig an, so folgt unmittelbar:

3. Eine Translation, die nach Länge und Richtung (also vektoriell) gleich $G'G''$ oder $G''G'$ ist, führt die Schaar $\{g\}$ in sich über.

3a. Eine Inversion gegen die Mitte M von $G'G''$ führt ebenfalls die Schaar $\{g\}$ in sich über. Der Punkt M fällt entweder in eine Gerade g oder in die Mitte zwischen zwei benachbarte Geraden; was davon abhängt, ob zwischen g' und g'' eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Geraden g liegt¹⁾.

Dem letzten Satz läßt sich noch eine andere Form geben. Errichtet man auf der Ebene der Schaar $\{g\}$, also auf der Zeichnungsebene, in M ein Lot l , so geht die Schaar auch durch Umwendung um l in sich über; für die Ebene stimmt der Erfolg der Umwendung um l mit dem Erfolg der Inversion überein. D. h.

3b. Ein Lot l , das in der Mitte M von $G'G''$ auf der Ebene der Schaar $\{g\}$ senkrecht steht, ist eine zweizählige Symmetrieachse für die Schaar.

Das gleiche gilt für die Schaar $\{h\}$.

Wir gehen jetzt zum Netz $\mathfrak{N}$ zurück. Seien P' und P'' zwei Punkte des Netzes, und zwar sei P' Schnitt von g' und h' , und P'' Schnitt von g'' und h'' . Dann geht durch eine Translation, die vektoriell gleich $P'P''$ ist, und die wir wieder durch 2τ bezeichnen wollen, sowohl die Schaar $\{g\}$, wie auch die Schaar $\{h\}$ in sich über, also auch die Gesamtheit ihrer Schnittpunkte, d. h. das Netz. Also folgt:

4. Die Verbindungslinie zweier Netzpunkte ist stets eine Deckschiebung des Punktnetzes.

Insbesondere ist also $2\tau_1$ wie auch $2\tau_2$ eine Deckschiebung; wir wollen sie die erzeugenden Deckschiebungen (Translationen) nennen. Ferner ist auch eine jede Verbindungslinie des Punktes O mit einem Netzpunkt P eine Deckschiebung. Sie führt die Stammfigur $\pi_0 = OABC$ in ein Parallelogramm π_1

¹⁾ Die Figur entspricht dem zweiten Fall.

über, dessen einer Eckpunkt P ist. Analog gilt aber auch umgekehrt:

5. Ist π_1 ein Netzparallelogramm, so existiert eine Deck-schiebung des Punktnetzes, die π_1 in die Stammfigur π_0 überführt.

Dieser an sich evidente Satz mag insofern eine nähere Erörterung erfahren, als wir die Translation, die π_1 in π_0 überführt, wirklich bestimmen wollen. Alle Geraden g und h werden durch die obigen Gleichungen 2) dargestellt. Jedes Netz-Parallelogramm liegt (Fig. 38) zwischen je zwei solchen benachbarten Geraden g und h^1). Diese Geraden h mögen den

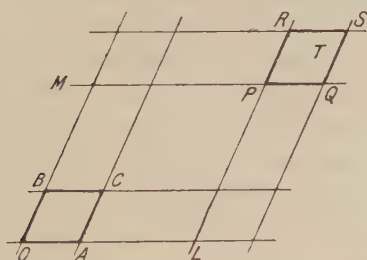


Fig. 38

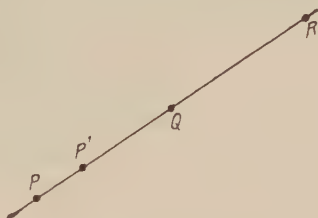


Fig. 39

Werten μ und $\mu + 1$ von m_1 in den Gleichungen 2) entsprechen, die Geraden g den Werten ν und $\nu + 1$ von m_2 . Die Gleichungen dieser Geraden sind also

$$\begin{aligned} x &= 2\mu\tau_1, & x &= 2(\mu + 1)\tau_1 \text{ und} \\ y &= 2\nu\tau_2, & y &= 2(\nu + 1)\tau_2. \end{aligned}$$

Ist nun P der Punkt mit den Koordinaten

$$x = 2\mu\tau_1, \quad y = 2\nu\tau_1,$$

so geht $OABC$ durch die Translation OP in π_1 über, also π_1 durch die inverse Translation in $OABC$. Dies gilt in gleicher Weise für positive und negative Zahlenwerte von μ und ν .

Aus dem Satz 4 fließen noch einige weitere Folgerungen. Seien (Fig. 39) P und Q zwei Netzkpunkte, $2\tau = PQ$ die durch sie

¹⁾ Der Punkt T der Figur kommt erst später in Betracht.

bestimmte Deckschiebung und k die sie enthaltende Gerade. Bei dieser Deckschiebung geht die Gerade k in sich über, und der Punkt Q kommt dadurch in eine Lage R , so daß $PQ = QR$ ist. Da aber auch das Netz in sich übergeht, so ist R ein Netzpunkt. Diesen Schluß kann man beliebig oft wiederholen, und somit folgt bereits, daß auf k unendlich viele Netzpunkte liegen.

Da P und Q beliebige Netzpunkte waren, so kann es zwischen P und Q möglicherweise noch andere Netzpunkte geben. Derjenige, der am nächsten zu P liegt, sei P' . Dann gelten die vorstehenden Schlüsse insgesamt auch für P und P' , und es stellt also auch $PP' = 2\tau'$ eine Translation der Punktreihe und des Netzes dar. Sie ist zugleich im Sinn von § 1 die

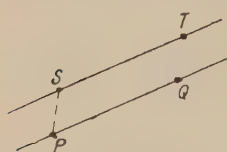


Fig. 40

erzeugende oder primitive Translation der auf k vorhandenen Punktreihe und es kann daher außer den Punkten dieser Punktreihe keine andern Netzpunkte auf k geben; d. h.

6. Jede Verbindungslinie zweier Netzpunkte enthält unendlich viele Netzpunkte, die eine regelmäßige Punktreihe bilden. Wir nennen sie eine Netzgerade.

Sei endlich (Fig. 40) S ein Netzpunkt, der nicht auf der Geraden k liegt, so gibt es eine Deckschiebung des Netzes, die P nach S bringt. Sie bringt das Netz mit sich zur Deckung, bringt Q in einen Punkt T und die auf k vorhandene Punktreihe in eine auf der Geraden ST vorhandene. Wir können daher folgern:

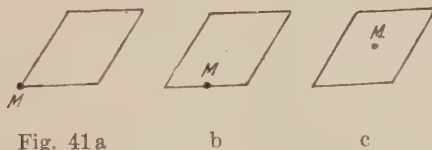
7. Punktfolgen des Netzes, die auf parallelen Netzgeraden liegen, sind einander kongruent.

Im Anschluß an den Satz 3a gehen wir jetzt zu den Deckoperationen über, die keine Translationen sind. Sei der Punkt M wiederum die Mitte von $P'P''$, so folgt aus Satz 3a, daß er ein Inversionszentrum sowohl für die Schaar $\{g\}$, wie für die Schaar $\{h\}$ ist; damit ist er ein solches Zentrum auch wieder für das Netz. Wie man leicht sieht, sind für die Lage

des Punktes M zum Netz drei Fälle möglich (Fig. 41 a, b, c): Fällt er nämlich auf eine Gerade g und zugleich auch auf eine Gerade h , so ist er ein Eckpunkt eines Parallelogramms, also ein Netzknoten. Fällt der Punkt M nur auf eine Gerade g oder h (z. B. auf eine Gerade g , aber zwischen zwei Geraden h), so ist er Kantenmitte eines Parallelogramms, und fällt er weder auf eine Gerade g noch auf eine Gerade h , und damit in die Mitte zwischen je zwei benachbarte Geraden g und h , so ist er ein Zentrum eines Parallelogramms. D. h.:

8. Die Ecken, Kantenmitteln und Flächenmitteln sämtlicher Parallelogramme sind Inversionszentra für das Punktnetz.

Diesem Satz können wir wieder die zu 3a analoge Form 3b geben und erhalten:



8a. Die Lote, die man in den Ecken, Kantenmitteln und Flächenmitteln eines Punktnetzes auf seiner Ebene errichten kann, sind zweizählige Symmetrieachsen für das Netz.

§ 3. Die geometrische Addition der Translationen. Jede Translation ist ein Vektor, also eine Strecke von bestimmter Richtung. Es ist deshalb zweckmäßig, auf die Zusammensetzung der Translationen die *geometrische Addition der Vektoren* anzuwenden¹⁾. Deren Hauptregeln sollen hier kurz folgen.

Sind OA und OB zwei vom Punkte O ausgehende Vektoren, so versteht man unter ihrer *geometrischen (vektoriellen) Summe* den Vektor OC (Fig. 38, S. 111), also die von O aus-

¹⁾ Wir erhalten also für die Zusammensetzung der Translationen einen doppelten Algorithmus; den allgemeinen von Kap. II, der dazu den Produktbegriff benutzt, und den obenstehenden, der die Addition verwendet. Beides soll und kann nebeneinander verwendet werden, je nach Bedürfnis und Zweckmäßigkeit.

gehende Diagonale des durch OA und OB bestimmten Parallelogramms. Man drückt dies durch die Gleichung

$$3) \quad OA + OB = OB + OA = OC$$

aus. Die Definition zeigt, daß der Vektor OC nach Länge und Richtung von der Reihenfolge der Vektoren OA und OB unabhängig ist. Alle Vektoren, die einander gleich und parallel sind, werden als *gleichwertig* betrachtet und können für einander gesetzt werden. Es bestehen daher auch die Gleichungen

$$\begin{aligned} OA + AC &= OC \\ OB + BC &= OC. \end{aligned}$$

Wird also ein Streckenzug so gezeichnet, daß seine beiden Strecken den Vektoren OA und OB gleich sind, und der Endpunkt C mit O verbunden, so stellt OC die Summe beider Vektoren dar. Es ist klar, daß gleiche und entgegengesetzt gerichtete Vektoren, wenn sie in derselben Summe vorkommen, sich gegenseitig aufheben, d. h. es ist

$$AB + BA = 0.$$

Die Gleichungen 2) können also auch in die Form

$$\begin{aligned} OA + AC + CO &= 0 \\ OB + BC + CO &= 0 \end{aligned}$$

gesetzt werden; d. h. die Summe der drei Vektoren eines Dreiecks, wenn dasselbe in einem bestimmten Sinn durchlaufen wird, ist gleich Null.

Aus den vorstehenden Gleichungen ergeben sich durch wiederholte Anwendung die folgenden beiden allgemeinen Sätze.

9. Wenn in einer Summe von Vektoren beliebige von ihnen durch andere ihnen gleiche und gleich gerichtete Vektoren ersetzt werden, oder wenn die Reihenfolge der Vektoren beliebig geändert wird, so behält doch die Summe stets den gleichen Wert.

10. Ein im Punkt O beginnender Streckenzug, dessen einzelne Strecken gewissen Vektoren gleich sind, liefert in dem Vektor, der O mit dem Endpunkt des Streckenzuges verbindet, die vektorielle Summe dieser einzelnen Vektoren.

Betrachten wir z. B. den Punkt P des Punktnetzes (Fig. 38, S. 111) mit den Koordinaten OL und OM , so ist zunächst

$$4) \quad OL + OM = OL + LP = OM + MP = OP.$$

Ausser diesen drei Ausdrücken für OP gibt es aber noch unzählige andere. Jede Summe von Vektoren, die in O beginnt, in P endigt, und im übrigen auf den Geraden des Punktnetzes verläuft, ist nach vorstehendem Satze gleich OP .

Man schließt hieraus noch, daß *die Summe der Vektoren, die in die Seiten eines geschlossenen Polygons fallen, immer den Wert Null hat*. Wie oben für das Dreieck ist auch hier die Richtung aller Vektoren so zu verstehen, wie sie dem Durchlaufen des Polygons in einem bestimmten Sinn entspricht.

Von diesen allgemeinen Sätzen machen wir jetzt Anwendung auf die Translationen eines Netzes. Ist wieder P der Netzpunkt mit den Koordinaten

$$x = OL = 2m_1\tau_1, \quad y = OM = 2m_2\tau_2,$$

und setzen wir $OP = 2\tau$, so haben wir gemäß Gleichung 4)

$$5) \quad OP = 2\tau = 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2.$$

Wir erkennen daraus, daß *jede* Deckschiebung des Netzes durch den Ausdruck 5) dargestellt wird, wenn m_1 und m_2 irgend welche ganze Zahlen sind. Jede Deckschiebung des Netzes ist nämlich durch den Netzpunkt P , in den sie den Punkt O übergehen läßt, eindeutig bestimmt, also auch durch den Vektor OP , und dies ist die Behauptung.

§ 4. Die Translationengruppe des Punktnetzes. Den Deckschiebungen eines Punktnetzes kommt in demselben Sinn und aus denselben Gründen der Gruppencharakter zu, wie den Deckschiebungen einer Punktreihe. Zwei hintereinander ausgeführte Deckschiebungen des Netzes stellen immer wieder eine Deckschiebung dar; mit $P'P''$ ist auch die inverse Translation $P''P'$ eine Deckschiebung. Wir können also sagen:

11. *Alle Deckschiebungen eines Punktnetzes bilden eine Gruppe von Translationen; zu jeder Translation existiert auch die inverse.*

Bezeichnen wir die erzeugenden Translationen $2\tau_1$ und $2\tau_2$ des Netzes jetzt als ein *primitives Paar* von Translationen der Gruppe, so folgt aus dem Schluß von § 3 weiter:

12. Sind $2\tau_1$ und $2\tau_2$ ein primitives Paar von Translationen der Gruppe, so ist jede Translation 2τ der Gruppe in dem Ausdruck

$$2\tau = 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2$$

enthalten, wo m_1 und m_2 unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Wir nennen die so bestimmte Gruppe insbesondere eine ebene Gruppe von Translationen. Jedem Punktnetz $\mathfrak{N}$ entspricht also eine ebene Translationengruppe. Es trifft aber auch — und dies ist ein höchst wichtiger Satz — in gewissem Sinn das umgekehrte zu; eine ebene Translationengruppe bestimmt durch die Endpunkte der in ihr enthaltenen Translationen ein Punktnetz.

Zunächst beachte man folgendes: Unsere dem Netz $\mathfrak{N}$ entsprechende Gruppe stellt sich als der Inbegriff aller Translationen von der vektoriellen Länge OP dar. Trägt man also jede Translation dieser Gruppe von O aus vektoriell auf, so bilden ihre Endpunkte das Punktnetz. Wir wollen beweisen, daß ein analoger Satz für eine jede ebene Gruppe von Translationen immer dann gilt, wenn wir

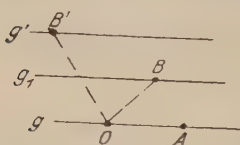


Fig. 42

es mit *kristallographisch verwendbaren* Gruppen zu tun haben¹⁾. Wir denken uns also die Translationen der gegebenen Gruppe von einem Punkt O aus vektoriell gezeichnet und setzen voraus, daß ihre Endpunkte sämtlich in eine Ebene ε fallen. Sei g eine Gerade durch O , in die ebenfalls gewisse Translationen fallen. Sie bilden im Sinn von § 1 eine lineare Gruppe. Ist $2\tau_1 = OA$ die kleinste von ihnen, so gehören der Gruppe alle Translationen $2m_1\tau_1$ an, und es bilden ihre Endpunkte auf g eine regelmäßige Punktreihe. Die Endpunkte aller anderen Translationen fallen außerhalb g . Ist $2\tau' = OB'$ irgend eine von ihnen, so enthält die Gruppe auch alle Translationen $2\tau' + 2m_1\tau_1$; ihre Endpunkte fallen gemäß § 3 in diejenige Gerade g' , die man parallel zu g durch B' ziehen kann (Fig. 42). Im Hinblick auf die kristallographische Verwendbarkeit der Gruppe nehmen wir

¹⁾ Vgl. die Anmerkung 1, S. 107.

aber an, daß es eine zu g nächste Parallele g_1 gibt, der die gleiche Bedeutung im Netz zukommt, wie g' . Sei $OB = 2\tau_2$ eine Translation, deren Endpunkt B auf g_1 liegt. Es sind dann jedenfalls alle Translationen

$$2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2$$

in der Gruppe enthalten; ihre Endpunkte bilden das mit $2\tau_1$ und $2\tau_2$ als primitivem Translationenpaar bestimmte Punktnetz. Es wird nun behauptet, daß es weitere Endpunkte von Translationen nicht gibt. In der Tat führt die Annahme, es liege ein Endpunkt T einer Translation OT in einem Netzparallelogramm $\pi = PQRS$, auf einen Widerspruch (Fig. 38, S. 111). Sei nämlich OP , wie in § 2, diejenige Translation, die bewirkt, daß $\pi = PQRS$ auf die Stammfigur $\pi_0 = OABC$ fällt. Da nun OP und OT Translationen der Gruppe sind, so ist auch $PO + OT = PT$ eine Translation der Gruppe, und es müßte daher, wenn wir den Vektor OT' gleich PT construieren, der Punkt T' im Parallelogramm $OABC$ an entsprechender Stelle liegen, wie T in $PQRS$. Nach der Festsetzung über die Gerade g_1 kann aber der Punkt T' nicht zwischen die Geraden OA und BC fallen; er könnte also höchstens auf BC liegen. Da aber BC der primitiven Translation $2\tau_1$ gleich ist, so ist auch dies unmöglich. Also folgt:

13. Für jede ebene Gruppe von Translationen (von kristallographischer Verwendbarkeit) stellt ein Ausdruck

$$2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2$$

die sämtlichen Translationen der Gruppe dar. Die Gruppe bestimmt ein Punktnetz, dessen Deckschiebungen von den Translationen der Gruppe gebildet werden.

Ein Punktnetz $\mathfrak{N}$ und eine ebene Translationengruppe stellen also sachlich dasselbe mathematische Gebilde dar. Wir können die sämtlichen Endpunkte aller Translationen einer Gruppe als Punktnetz auffassen und ebenso umgekehrt die Punkte eines Netzes als Endpunkte der zu ihm gehörigen Translationen. Wir können daher beliebig bald die eine, bald die andere Auffassung unseren Untersuchungen zugrunde legen.

§ 5. Die Punktgitter. Die Resultate der vorigen Paragraphen übertragen sich sinngemäß in einfacher Weise auf den Raum. Wir gehen von drei Ebenen α , β , γ aus, die wir als Ebenen eines räumlichen Koordinatensystems ansehen. Sei wieder O ihr Schnittpunkt; ihre Schnittlinien seien (Fig. 43)

$$g = (\beta\gamma), h = (\alpha\gamma), k = (\alpha\beta).$$

Auf g , h , k nehmen wir die Punkte A , B , C an, konstruieren die durch sie und O bestimmten regelmäßigen Punktreihen und legen durch ihre Punkte Schaaren paralleler Ebenen; sie sollen durch $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$ bezeichnet werden. Diese Ebenenschaaren zerlegen den Raum in lauter *kongruente Parallelepipede* und die

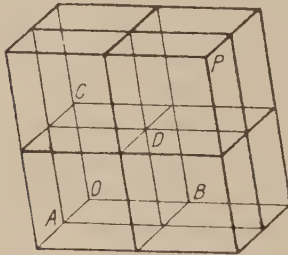


Fig. 43

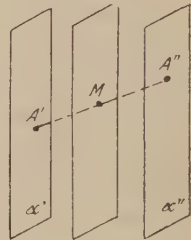


Fig. 44

Gesamtheit ihrer Ecken ist das, was wir ein *parallelepipedisches Gitter* oder kürzer *Punktgitter* nennen. Setzen wir

$$6) \quad OA = 2\tau_1, OB = 2\tau_2, OC = 2\tau_3,$$

so sind die sämtlichen Gitterpunkte gegeben durch die Gleichungen

$$x = 2m_1\tau_1, y = 2m_2\tau_2, z = 2m_3\tau_3,$$

wenn m_1 , m_2 , m_3 unabhängig voneinander alle positiven und negativen *ganzen* Zahlenwerte annehmen. Das durch die Kanten OA , OB , OC bestimmte Parallelepipede soll die *Stammfigur* Π_0 des Punktgitters heißen.

Seien nun α' und α'' zwei Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$, sei A' ein Punkt von α' und A'' ein Punkt von α'' , so erhält, wenn wir die Betrachtungen über die Punktnetze auf die Gitter übertragen, unmittelbar das Folgende (Fig. 44):

1) Eine Schiebung, die vektoriell gleich $A'A''$ oder gleich $A''A'$ ist, führt die Ebenenschar $\{\alpha\}$ in sich über.

2) Eine Inversion gegen die Mitte M von $A'A''$ führt ebenfalls die Schar $\{\alpha\}$ in sich über. Der Punkt M kann wiederum entweder in eine Ebene α oder aber in die Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgende Ebenen fallen.

Dasselbe gilt für die Scharen $\{\beta\}$ und $\{\gamma\}$ und daraus folgt ganz analog wie in § 2:

14. Die Verbindungslinie zweier Gitterpunkte P und Q stellt vektoriell eine Deckschiebung des Gitters dar.

Jede solche Deckschiebung möge wieder durch 2τ bezeichnet werden; zu ihnen gehören insbesondere auch $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$. Jede dieser Deckschiebungen $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ heiße wieder erzeugende oder primitive Deckschiebung des Punktgitters; sie bilden zusammen ein primitives Tripel.

Jede Deckschiebung führt die Stammfigur $OABCD = \Pi_0$ in ein anderes Gitterparallelepiped über. Analog wie in § 2 wollen wir die Schiebung bestimmen, die einem bestimmten Parallelepiped Π_1 entspricht.

Ein solches Parallelepiped liegt wieder zwischen je zwei benachbarten Ebenen α, β, γ ; haben diese Ebenen die Gleichungen

$$x = 2\lambda\tau_1, y = 2\mu\tau_2, z = 2\nu\tau_1$$

$$x = 2(\lambda + 1)\tau_1, y = 2(\mu + 1)\tau_2, z = 2(\nu + 1)\tau_1,$$

und ist P der Punkt mit den Koordinaten

$$x = 2\lambda\tau_1, y = 2\mu\tau_2, z = 2\mu\tau_3,$$

so geht $OABCD$ durch die Schiebung OP in Π über, also Π durch die inverse Schiebung in Π_0 ; d. h.

15. Jedes Parallelepiped des Punktgitters geht durch eine bestimmte Schiebung in die Stammfigur über.

Wie in § 2 folgern wir weiter, daß die Mitte M von PQ ein Inversionszentrum für das Gitter ist. Für die Lage von M zum Gitter können hier drei verschiedene Fälle eintreten; je nachdem M bezüglich der Schaaren $\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}$ in eine Ebene hineinfällt, oder in die Mitte zwischen zwei Ebenen. Dies liefert vier Möglichkeiten; es kann M ein Eckpunkt des

Gitters sein, oder eine Kantenmitte, oder eine Flächenmitte oder endlich die Mitte eines Parallelepipeds. Der eine oder andere dieser vier Fälle tritt ein, je nachdem M für alle drei Schaaren, oder nur für zwei, oder für eine oder für gar keine in eine Ebene selbst hineinfällt (Fig. 45 a, b, c, d). Also:

16. Die Ecken, die Kantenmitten, die Flächenmitten und die Körpermitten sämtlicher Parallelepipede sind Inversionszentra für das Punktgitter.

Sei f die durch P und Q bestimmte Gerade. Sie geht bei der Schiebung PQ in sich über, und wir folgern wie in § 2:

17. Die Verbindungslinie zweier Gitterpunkte P und Q enthält unendlich viele Gitterpunkte, die eine regelmäßige Punkt-

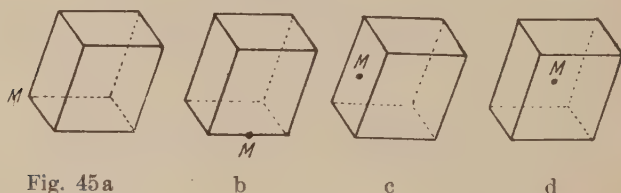


Fig. 45 a

b

c

d

reihe bilden. Punktreihen, die auf parallelen Geraden liegen, sind einander kongruent.

Wir nennen die Verbindungslinie von P und Q eine *Gittergerade*. Die primitive Deckschiebung $2\tau'$ der auf ihr liegenden Punktreihe kann wieder von $PQ = 2\tau$ verschieden sein; es ist dann $2\tau = 2m\tau'$.

Seien jetzt P, Q, R drei Gitterpunkte, die eine Ebene ε bestimmen, so zeigen wir:

17a. Jede Verbindungsebene von drei Gitterpunkten enthält unendlich viele Gitterpunkte, die ein Punktnetz bilden.

Sind nämlich e und f die Verbindungsgeraden von P mit Q und R , so ist sowohl $PQ = 2\tau'$, wie auch $PR = 2\tau''$ eine Deckschiebung des Gitters. Beide führen zugleich die Ebene ε in sich über. Dasselbe gilt also auch von allen Translationen

$$2\tau = 2m'\tau' + 2m''\tau'',$$

und deshalb bestimmen diese Translationen ein in ε enthaltenes Netz von Gitterpunkten. Enthält die Ebene ε keine andern

Gitterpunkte, so ist damit der Satz bewiesen. Sie enthält dann das durch $2\tau'$ und $2\tau''$ bestimmte Netz.

Liegen in ε noch weitere Gitterpunkte, so geht der Beweis folgendermaßen weiter. Jede Verbindungslinie zweier Gitterpunkte, die in ε liegen, ist eine Deckschiebung des Gitters und führt die Gesamtheit aller in ε vorhandenen Gitterpunkte in sich über. Alle diese Deckschiebungen bilden daher eine Gruppe und zwar eine ebene Translationengruppe; bestimmen also ebenfalls gemäß § 4 ein in ε liegendes Punktnetz; und dies ist der Satz.

Wir beweisen noch, analog wie im vorigen Paragraphen:

17b. Punktnetze, die auf parallelen Ebenen liegen, sind zueinander kongruent.

§ 6. Die Translationengruppe des Punktgitters. Die geometrische Addition der Vektoren läßt sich sinngemäß auf den Raum ausdehnen. Sind OA , OB , OC drei Vektoren, die eine räumliche Ecke bilden, so stellt die Diagonale OD des durch sie bestimmten Parallelepipeds ihre geometrische Summe dar; wir schreiben wieder (Fig. 43, S. 118)

$$OA + OB + OC = OD.$$

Durchlaufen wir von O aus drei Kanten des Parallelepipeds, die vektoriell den drei Strecken OA , OB , OC gleichwertig sind, so gelangen wir stets zum Punkt D , welche Reihenfolge der Kanten wir auch wählen. Wir erhalten also den Vektor OD auch so, daß wir von O aus einen Streckenzug zeichnen, dessen drei Strecken in irgendeiner Reihenfolge den drei Vektoren OA , OB , OC gleich sind, und dann den Punkt O mit dem Endpunkt des Streckenzuges verbinden. Damit haben wir die Grundlage gewonnen, um die Sätze von § 3 auf den Raum zu übertragen. Insbesondere folgt:

18. Ein im Punkt O beginnender Streckenzug, dessen einzelne Strecken in beliebiger Reihenfolge gewissen gegebenen Vektoren gleich sind, liefert in der Verbindungslinie von O mit dem Endpunkt des Streckenzuges den Vektor, der die Summe der gegebenen darstellt.

Sei nun P ein Gitterpunkt mit den Koordinaten

$$x = 2m_1\tau_1, \quad y = 2m_2\tau_2, \quad z = 2m_3\tau_3,$$

wo m_1, m_2, m_3 bestimmte ganzzahlige Werte haben. Zeichnerisch gelangen wir so zu ihm, daß wir einen Streckenzug zeichnen, dessen Strecken den drei Koordinaten x, y, z vektoriell gleich sind. Daher können wir gemäß dem Vorstehenden schreiben

$$OP = 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3$$

und wir folgern, wie in § 3, daß jede Deckschiebung des Gitters sich in der Form

$$7) \quad 2\tau = 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3$$

darstellt. Jede einzelne Deckschiebung ist ja durch Angabe des Punktes P bestimmt, in den O übergeht, also auch durch den Vektor OP , und damit auch durch die vorstehende Gleichung.

Wie die geometrische Addition der Vektoren, können wir auch den Gruppenbegriff unmittelbar auf den Raum und die Gitter übertragen. Die sämtlichen Deckschiebungen eines Punktgitters bilden also in dem in § 4 dargestellten Sinn eine Gruppe von Translationen; auch existiert zu jeder Translation ihre inverse. Die in § 5 eingeführten primitiven Deckschiebungen $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ des Gitters sollen auch wieder ein *primitives Tripel* der Gruppe heißen, und es gelten daher die beiden Sätze:

19. *Bilden $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ ein primitives Tripel der zu einem Punktgitter gehörigen Translationengruppe, so ist jede Translation der Gruppe in dem Ausdruck*

$$2\tau = 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3$$

enthalten, mit m_1, m_2, m_3 als beliebigen positiven oder negativen ganzen Zahlen.

19a. *Trägt man von einem Punkt O aus die sämtlichen Translationen der Gruppe vektoriell auf, so bilden ihre Endpunkte das Punktgitter.*

Der vorstehende Satz gestattet in demselben Sinne eine Umkehrung, wie der analoge Satz 12 beim Punktnetz. Wir gehen von einer Gruppe irgendwelcher Translationen aus, und denken uns wieder alle Translationen von einem Punkt O aus ge-

zeichnet. Seien g und h irgend zwei von O ausgehende Geraden, in die Translationen der Gruppe hineinfallen, und sei ε die durch sie bestimmte Ebene (Fig. 46). Alle in diese Ebene fallenden Translationen bilden dann eine *ebene* Translationsgruppe; sie sind daher sämtlich in dem Ausdruck

$$2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2$$

enthalten, wenn $OA = 2\tau_1$ und $OB = 2\tau_2$ ein primitives Paar bilden. Sei nun $2\tau' = OC'$ irgendeine Translation, die *nicht* in die Ebene ε fällt. Zur Gruppe gehören dann auch alle Translationen

$$2\tau' + 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2;$$

ihre Endpunkte erfüllen ein in einer Ebene ε' liegendes Netz, wenn ε' parallel zu ε durch C' verläuft. Die Forderung der kristallographischen Verwendbarkeit unserer Gruppe bedingt nun wieder¹⁾, daß es auch eine solche Ebene ε_1 kleinsten Abstandes von ε gibt. Sei $2\tau_3 = OC$ eine Translation, deren Endpunkt C in dieser Ebene liegt; dann sind jedenfalls alle Translationen

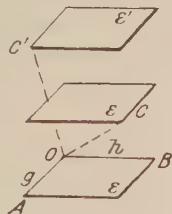


Fig. 46

$$2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3$$

in der Gruppe enthalten, und ihre Endpunkte bilden ein Raumgitter $\mathfrak{B}$. Wie in § 4 zeigen wir nun wieder, daß es andere Translationen in der Gruppe nicht gibt. Wäre nämlich $2\tau = OT$ eine Translation, deren Endpunkt T nicht in eine Gitterecke fiel, sondern in das Innere oder auf die Oberfläche eines Parallelepipeds Π , so könnten wir ebenso, wie in § 4 schließen, daß auch in die Stammfigur Π_0 ein analog in ihr liegender Punkt T' fiel, und dies kann genau so wie dort als unmöglich erwiesen werden. Also folgt:

20. Für jede räumliche Translationsgruppe (von kristallographischer Verwendbarkeit) stellt ein Ausdruck

$$2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3$$

die sämtlichen Translationen der Gruppe dar. Die Gruppe

¹⁾ Vgl. die Anmerkung auf S. 107.

bestimmt ein Punktgitter, dessen Deckschiebungen von den Translationen der Gruppe gebildet werden.

Punktgitter und räumliche Translationengruppe stellen also sachlich das gleiche mathematische Gebilde dar; wir können deshalb bei der weiteren Untersuchung beliebig die eine oder die andere Auffassung zugrunde legen.

Wir beweisen endlich noch den folgenden Satz:

21. Die Schnittlinie zweier durch denselben Gitterpunkt P gehenden Netzebenen eines Gitters ist stets eine Gittergerade.

Seien ε und ε' die beiden Netzebenen, in ihnen beiden rechnen wir die Translationen vom Punkt P aus. Wie der eben geführte Beweis erkennen läßt, können wir ein primitives Tripel von Translationen des Gitters $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ so wählen, daß wir zwei von ihnen irgend einer Ebene entnehmen. Sei dies die Ebene ε und seien $2\tau_1$ und $2\tau_2$ das primitive Paar für sie. Dann sind alle Netzkpunkte von ε in

$$8) \quad 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2$$

enthalten; für beliebige ganzzahlige m_1 und m_2 . Seien ferner $2\tau'$ und $2\tau''$ ein primitives Paar von Translationen für das in ε' liegende Punktnetz. Wir können dann $2\tau'$ und $2\tau''$ durch $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ ausdrücken; es sei

$$2\tau' = 2\mu_1\tau_1 + 2\mu_2\tau_2 + 2\mu_3\tau_3$$

$$2\tau'' = 2\nu_1\tau_1 + 2\nu_2\tau_2 + 2\nu_3\tau_3,$$

wo jetzt $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ bestimmte Zahlen sind. Ferner sind alle Netzkpunkte von ε' in dem Ausdruck

$$9) \quad 2m'\tau' + 2m''\tau'' = 2\tau_1(m'\mu_1 + m''\nu_1) + 2\tau_2(m'\mu_2 + m''\nu_2) + 2\tau_3(m'\mu_3 + m''\nu_3)$$

enthalten, wo m' und m'' wieder beliebige ganzzahlige Werte haben. Soll nun die Schnittlinie der Ebenen ε und ε' Gitterpunkte enthalten, so muß es unter den Netzkpunkten der Ebene ε' auch solche geben, die in die Ebene ε fallen, die also in dem Ausdruck 8) enthalten sind. Die sämtlichen Netzkpunkte der Ebene ε' sind aber durch den Ausdruck 9) gegeben; soll er sich für gewisse Werte m' und m'' auf die Form 8) reduzieren, so muß

$$m' \mu_3 + m'' v_3 = 0; \quad m' : m'' = - v_3 : \mu_3$$

sein. Alle ganzzahligen Werte von m' und m'' , die dieser Gleichung genügen, erfüllen die Bedingung. Solcher Werte gibt es unendlich viele; die ihnen entsprechenden Gitterpunkte liegen in beiden Netzebenen, und das war zu beweisen.

Ein einfacher analytischer Beweis ist der folgende. Zunächst ist ersichtlich, daß man sich auf Netzebenen durch den Anfangspunkt O des Koordinatensystems beschränken kann. Ferner treffen wir die vereinfachende Festsetzung, die Längeneinheit für jede Koordinatenachse *besonders* zu wählen, und zwar $2\tau_1$ für die x -Achse, $2\tau_2$ für die y -Achse und $2\tau_3$ für die z -Achse. Dann stellen sich die Koordinaten eines jeden Gitterpunktes in der Form

$$x = m_1, \quad y = m_2, \quad z = m_3$$

dar, mit ganzzahligen m_1, m_2, m_3 . Die Gleichung einer Ebene durch O und zwei Punkte (m_1, m_2, m_3) und (n_1, n_2, n_3) ist dann

$$\begin{vmatrix} x, & m_1, & n_1 \\ y, & m_2, & n_2 \\ z, & m_3, & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder aber

$$ax + by + cz = 0,$$

wo a, b, c ganze Zahlen sind. Ist die Gleichung der zweiten Netzebene

$$a'x + b'y + c'z = 0,$$

so ergeben sich die Koordinaten der Schnittlinie durch Auflösung in der Form

$$x : y : z = l : m : n,$$

wo l, m, n ganze Zahlen sind. Dieser Gleichung wird durch unendlich viele ganzzahlige Werte x, y, z genügt, und diese gehören zu lauter Gitterpunkten.

§ 7. Systeme primitiver Translationen. Die in § 4 und § 6 geführten Beweise der Sätze 13) und 20) lassen erkennen, daß man das primitive Translationenpaar eines Punktnetzes $\mathfrak{N}$ und das primitive Tripel eines Punktgitters $\mathfrak{P}$ auf mannigfache

Es ist klar, daß durch jeden Netzpunkt sowohl eine Gerade d , wie eine Gerade e hindurch geht; das durch $\{d\}$ und $\{e\}$ erzeugte Netz $\mathfrak{N}'$ enthält daher jedenfalls *alle* Punkte des Ausgangsnetzes $\mathfrak{N}$. Es enthält aber noch mehr Punkte. Die Flächenmitte eines jeden Netzparallelogramms von $\mathfrak{N}$ ist ebenfalls Schnittpunkt je einer Geraden d und e , aber nicht einer Geraden g und h . Nun ist für das durch die Schaaren $\{d\}$ und $\{e\}$ erzeugte Netz $\mathfrak{N}'$ sowohl jede Gerade g wie auch jede Gerade h eine Diagonalgerade. Im Netz $\mathfrak{N}'$ gibt es also in der Tat zwei Schaaren von Diagonalgeraden, die nicht seine sämtlichen Punkte als Schnittpunkte liefern. Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Wir werden daher solchen Diagonalschaaren $\{d'\}$ und $\{d''\}$, die *genau das nämliche Netz liefern*, wie die Schaaren $\{g\}$ und $\{h\}$, eine bevorzugte Bedeutung beizulegen haben. Wir nennen sie deshalb ein Paar *primitiver* Schaaren und bezeichnen auch die beiden ihnen entsprechenden primitiven Translationen $2\tau'$ und $2\tau''$ zusammen als ein *primitives Paar von Translationen*. Wir definieren also:

22. *Zwei primitive Translationen $2\tau'$ und $2\tau''$ eines Netzes (einer ebenen Translationengruppe) sollen ein primitives Paar heißen, wenn das durch sie bestimmte Punktnetz mit dem Ausgangsnetz identisch ist.*

Damit hat der Begriff des primitiven Paares einen einfachen geometrischen Inhalt gewonnen. Wir können ihn auch so aussprechen, daß die Translationen $2\tau'$ und $2\tau''$ immer und nur dann ein primitives Paar bilden, wenn die Ausdrücke

$$2m'\tau' + 2m''\tau'' \text{ und } 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2$$

dieselbe Punktgesamtheit darstellen; nämlich alle Punkte des Punktnetzes $\mathfrak{N}$ und damit auch alle seine Deckschiebungen. Insbesondere müssen sich daher sowohl $2\tau'$ und $2\tau''$ ganzzahlig durch $2\tau_1$ und $2\tau_2$, wie auch $2\tau_1$ und $2\tau_2$ ganzzahlig durch $2\tau'$ und $2\tau''$ ausdrücken lassen.

In ähnlicher Weise läßt sich der geometrische Charakter des primitiven Tripels für ein Gitter $\mathfrak{B}$ angeben. Eine Verbindungsebene dreier Gitterpunkte soll eine *Diagonalebene* und

eine Verbindungslinie zweier Gitterpunkte *Diagonalgerade* heißen. Es ist klar, daß sie eine analoge Bedeutung für das Punktgitter besitzen, wie die Diagonalgeraden für das Punktnetz. Auch beim Gitter können die erzeugenden Ebenenschaaren $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$ und damit die drei Richtungen g , h , k in mannigfacher Weise durch andere Ebenenschaaren und Geradenrichtungen ersetzt werden. Sind z. B. d und e (Fig. 48) zwei Diagonalen in der Grundfläche der Stammfigur und d' und e' die analogen Diagonalen der Gegenfläche, so stellen

$$\delta = (dd') \text{ und } \varepsilon = (ee')$$

zwei solche Diagonalebenen dar. Denjenigen Schaaren von Diagonalebenen, die *dasselbe* Gitter $\mathfrak{P}$ erzeugen wie die Schaaren $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, kommt wiederum eine bevorzugte Stellung zu; wir nennen sie ein System *primitiver* Schaaren. Das zu ihnen gehörige Parallelepipedon haben wir ebenfalls als ein *primitives* zu betrachten; seine Kanten liefern ein *primitives* Tripel von Deckschiebungen des Gitters.

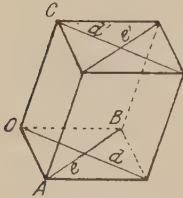


Fig. 48

Ein primitives Tripel $2\tau'$, $2\tau''$, $2\tau'''$ ist also wiederum dadurch ausgezeichnet, daß die

Ausdrücke

$$2m'\tau' + 2m''\tau'' + 2m'''\tau''' \text{ und } 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3$$

dieselbe Punktgesamtheit darstellen, nämlich alle Punkte des Gitters $\mathfrak{P}$, von dem wir ausgingen, und alle ihm zugehörigen Translationen. Insbesondere müssen daher wieder $2\tau'$, $2\tau''$, $2\tau'''$ ganzzahlig durch $2\tau_1$, $2\tau_2$, $2\tau_3$ und ebenso $2\tau_1$, $2\tau_2$, $2\tau_3$ ganzzahlig durch $2\tau'$, $2\tau''$, $2\tau'''$ darstellbar sein. Wir definieren somit:

23. *Drei primitive Translationen $2\tau'$, $2\tau''$, $2\tau'''$ eines Punktgitters (einer Translationengruppe) sollen ein primitives Tripel heißen, wenn das durch sie bestimmte Gitter mit dem Ausgangsgitter identisch ist.*

§ 8. **Eigenschaften primitiver Paare und Tripel.** Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Wir denken uns, wie immer,

das Netz oder das Gitter mit den Translationen $2\tau_1$, $2\tau_2$ resp. $2\tau_1$, $2\tau_2$, $2\tau_3$ erzeugt. Sei $OT = 2\tau$ irgend eine Translation des Netzes oder Gitters. Die durch OT bestimmte Gerade enthält, wie wir sahen, unendlich viele Punkte des Netzes oder Gitters, die eine regelmäßige Punktreihe bilden. Diese besitzt eine primitive Translation $2\tau'$; ist sie nicht mit OT identisch, so ist OT ein Vielfaches von ihr.

Nun stellt sich eine *jede* Translation $OT = 2\tau$ eines Netzes immer in der Form dar

$$10) \quad 2\tau = 2p_1\tau_1 + 2p_2\tau_2;$$

ist sie nicht primitiv, so ist gemäß dem vorstehenden $2\tau = \lambda \cdot 2\tau'$, und es folgt

$$2\tau' = 2\frac{p_1}{\lambda}\tau_1 + 2\frac{p_2}{\lambda}\tau_2.$$

Nun muß sich aber $2\tau'$ ganzzahlig durch $2\tau_1$ und $2\tau_2$ darstellen, es müssen deshalb p_1 und p_2 durch λ teilbar sein, also einen gemeinsamen Teiler haben. Dies ist die Folge der Annahme, daß 2τ nicht primitiv ist. Umgekehrt folgt daher, haben p_1 und p_2 keinen gemeinsamen Teiler, so ist 2τ eine primitive Translation des Netzes. Dieselben Schlüsse lassen sich für das Gitter und seine Translationengruppe durchführen: Also folgt:

24. Eine Netztranslation $2p_1\tau_1 + 2p_2\tau_2$ und eine Gittertranslation $2p_1\tau_1 + 2p_2\tau_2 + 2p_3\tau_3$ sind primitiv, wenn p_1 und p_2 resp. p_1 , p_2 , p_3 keinen gemeinsamen Teiler enthalten.

Wir besitzen damit eine arithmetische Bedingung für eine primitive Translation.

Sei jetzt $2\tau'$, $2\tau''$ ein primitives Paar, so existiert auch für das Paar ein arithmetisches Kennzeichen. Wir gewinnen es auf Grund davon, daß, wie wir sahen, nicht nur $2\tau'$ und $2\tau''$ ganzzahlig durch $2\tau_1$ und $2\tau_2$ ausdrückbar sein müssen, sondern auch $2\tau_1$, $2\tau_2$ durch $2\tau'$ und $2\tau''$. Mögen sich $2\tau'$ und $2\tau''$ in der Form

$$11) \quad \begin{aligned} 2\tau' &= 2p_1\tau_1 + 2p_2\tau_2 \\ 2\tau'' &= 2q_1\tau_1 + 2q_2\tau_2 \end{aligned}$$

darstellen; wegen ihres primitiven Charakters sind nach dem Vorstehenden p_1, p_2 sowie q_1, q_2 ohne gemeinsamen Teiler. Lösen wir diese Gleichungen nach τ_1 und τ_2 auf und setzen zur Abkürzung

$$12) \quad p_1 q_2 - p_2 q_1 = l,$$

so folgt

$$2\tau_1 = 2\frac{q_2}{l}\tau' - 2\frac{p_2}{l}\tau''$$

$$2\tau_2 = -2\frac{q_1}{l}\tau' + 2\frac{p_1}{l}\tau''.$$

Nun soll doch $2\tau_1$ und $2\tau_2$ ganzzahlig durch $2\tau'$ und $2\tau''$ ausdrückbar sein. Dies ist aber nur der Fall, wenn $l = \pm 1$ ist. Denn ist l von ± 1 verschieden, so würden $2\tau_1$ und $2\tau_2$ nur dann ganze Vielfache von $2\tau'$ und $2\tau''$ sein können, wenn p_1, q_1, p_2, q_2 durch l teilbar sind, was ausgeschlossen ist. Also folgt:

25. *Es gibt unendlich viele primitive Translationenpaare eines Netzes (einer ebenen Translationengruppe); sie werden unter der Bedingung $p_1 q_2 - p_2 q_1 = \pm 1$ durch die Gleichungen 11) dargestellt¹⁾.*

Dem so gewonnenen arithmetischen Kennzeichen wollen wir noch ein geometrisches an die Seite stellen. Dazu knüpfen wir an die mit den Translationen $2\tau_1$ und $2\tau_2$ gebildete Stammfigur π_0 an. Sie enthält Netzpunkte nur in den Ecken; weder in ihrem Innern, noch auf ihrem Umfang liegen sonstige Netzpunkte. Das ist ihre charakteristische geometrische Eigenschaft. Wir behaupten deshalb:

26. *Zwei Translationen $2\tau'$ und $2\tau''$ eines Punktnetzes $\mathfrak{N}$ stellen ein primitives Translationenpaar dar, wenn das mit ihnen gebildete Parallelogramm π' im Innern von Netzpunkten frei ist und auf dem Umfang keine andern Punkte des Netzes $\mathfrak{N}$ enthält als die Eckpunkte.*

¹⁾ Ist die primitive Translation $2\tau'$ bekannt, so sind die Translationen $2\tau''$, die mit $2\tau'$ ein primitives Paar bilden, durch Auflösen der diophantischen Gleichung $p_1 q_2 - p_2 q_1 = \pm 1$ zu berechnen.

Diesen Satz müssen wir eingehender beweisen. Wir haben davon auszugehen, daß

$$13) \quad 2 m_1 \tau_1 + 2 m_2 \tau_2$$

die Translationen des Netzes $\mathfrak{N}$ sind. Seien ferner (Fig. 49)

$$2 \tau' = OA', \quad 2 \tau'' = OB'$$

zwei Netztranslationen, die dem vorstehenden Satz genügen; so ist zunächst klar, daß sie gleichfalls ein Netz $\mathfrak{N}'$ bestimmen, es entspricht den sämtlichen Translationen

$$14) \quad 2 m' \tau' + 2 m'' \tau''.$$

Zu zeigen ist, daß $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ identisch sind, daß also die Ausdrücke 13) und 14) dieselben Translationen darstellen. Nun sind zunächst $2 \tau'$ und $2 \tau''$ Translationen von $\mathfrak{N}$, also auch ganzzahlig durch $2 \tau_1$ und $2 \tau_2$ darstellbar, und daher gilt es auch von jeder Translation 14). Damit ist bereits gezeigt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{N}'$ ein Punkt von $\mathfrak{N}$ ist; wir können dies, wovon wir sofort Anwendung machen werden, auch so aussprechen, daß jede Deckschiebung von $\mathfrak{N}'$ auch eine Deckschiebung von $\mathfrak{N}$ ist. Es ist mithin nur noch zu zeigen, daß jeder Punkt von $\mathfrak{N}$ zugleich Punkt von $\mathfrak{N}'$ ist, also in

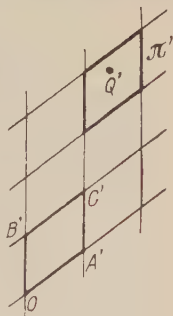


Fig. 49

Netzpunkt von $\mathfrak{N}'$ hineinfällt. Wäre dies nicht der Fall, so einen müßte es ein Parallelogramm von $\mathfrak{N}'$ geben, dessen Inneres oder Umfang einen Punkt Q' von $\mathfrak{N}$ enthält; es sei π' . Dann gibt es doch (§ 2) eine Deckschiebung des Netzes $\mathfrak{N}'$, die das Parallelogramm π' in $OA'B'C'$ überführt; und, wie wir eben sahen, ist sie auch eine Deckschiebung für $\mathfrak{N}$ selbst. Es muß daher bei dieser Deckschiebung der in π' enthaltene Punkt Q' in einen Punkt Q von $\mathfrak{N}$ übergehen; überdies müßte er zugleich in $OA'B'C'$ enthalten sein, was aber gerade nicht der Fall sein soll. Damit ist der Beweis geliefert.

Den einfachsten Fällen dieses Satzes sind wir schon oben in § 7 begegnet. Wir sahen dort, daß die Geradenschaar $\{g\}$ zusammen mit der Diagonalschaar $\{d\}$ oder $\{e\}$ das Netz liefert; in der Tat zeigt unser Satz, daß

$$2\tau' = 2\tau_1 = OA \text{ und } 2\tau'' = 2\tau_1 + 2\tau_2 = OC$$

oder auch

$$2\tau' = 2\tau_1 = OA \text{ und } 2\tau'' = -2\tau_1 + 2\tau_2 = AB$$

je ein primitives Paar bilden. Offenbar kann die Schaar $\{d\}$ oder $\{e\}$ dem Satz 26 gemäß durch jede Schaar ersetzt werden, die einer Verbindungsgeraden des Punktes O mit einem Punkt P der auf BC liegenden Punktreihe entspricht (Fig. 47, S. 126). Es bilden also auch die Translationen

$$2\tau' = 2\tau_1 \text{ und } 2\tau'' = 2m\tau_1 + \tau_2$$

für jedes m ein primitives Paar. Das gleiche gilt analog für die Schaar $\{h\}$ und jede Schaar, die der Verbindungsgeraden von O mit einem Netzkpunkt auf AC entspricht.

Wir bezeichnen noch das durch $2\tau_1$ und $2\tau_2$ gebildete Dreieck OAB als *primitives* Dreieck, und ebenso jedes Dreieck, das durch irgendein primitives Paar bestimmt ist. Dann können wir dem obigen gemäß noch sagen:

27. *Je zwei Seiten eines primitiven Dreiecks liefern ein primitives Paar von Translationen.*

Ferner leuchtet ein, daß der Satz 26 sich auch auf das von $2\tau'$ und $2\tau''$ gebildete Dreieck und seinen primitiven Charakter erstreckt.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf die Punktgitter und die ihnen entsprechenden Translationengruppen übertragen. Wir suchen zunächst nach dem arithmetischen Kennzeichen eines primitiven Tripels $2\tau', 2\tau'', 2\tau'''$. Wir bestimmen es wieder auf Grund davon, daß sich auch $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ ganzzahlig durch $2\tau', 2\tau'', 2\tau'''$ ausdrücken lassen müssen. Mögen sich die drei primitiven Translationen $2\tau', 2\tau'', 2\tau'''$ in der Form

$$\begin{aligned} 2\tau' &= 2p_1\tau_1 + 2p_2\tau_2 + 2p_3\tau_3 \\ 2\tau'' &= 2q_1\tau_1 + 2q_2\tau_2 + 2q_3\tau_3 \\ 2\tau''' &= 2r_1\tau_1 + 2r_2\tau_2 + 2r_3\tau_3 \end{aligned}$$

15) darstellen. Da sie nicht in einer und derselben Ebene liegen können, so besteht zwischen $2\tau', 2\tau'', 2\tau'''$ keine lineare

identische Gleichung, und die Gleichungen 15) lassen sich nach $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ auflösen. Setzen wir die Determinante

$$16) \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = l$$

und die Unterdeterminanten

$$17) \quad \begin{vmatrix} q_i & q_k \\ r_i & r_k \end{vmatrix} = p'_h, \quad \begin{vmatrix} r_i & r_k \\ p_i & p_k \end{vmatrix} = q'_h, \quad \begin{vmatrix} p_i & p_k \\ q_i & q_k \end{vmatrix} = r'_h,$$

wo h, i, k die Zahlen 1, 2, 3 in irgendeiner zyklischen Folge darstellen, so ist

$$18) \quad \begin{aligned} 2l\tau_1 &= 2p'_1\tau' + 2q'_1\tau'' + 2r'_1\tau''' \\ 2l\tau_2 &= 2p'_2\tau' + 2q'_2\tau'' + 2r'_2\tau''' \\ 2l\tau_3 &= 2p'_3\tau' + 2q'_3\tau'' + 2r'_3\tau''' \end{aligned}$$

Ist nun $l = \pm 1$, so läßt sich $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$, also auch jede Translation

$$2\tau = 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3$$

durch $2\tau', 2\tau'', 2\tau'''$ ganzzahlig ausdrücken, und $2\tau', 2\tau'', 2\tau'''$ bilden ein Tripel primitiver Translationen. Der Bedingung $l = \pm 1$ kann auf mannigfache Weise genügt werden, also folgt:

28. Für jedes Punktgitter gibt es unendlich viele primitive Translationentripel; sie werden durch die Gleichungen 15) dargestellt, wenn ihre Determinante den Wert ± 1 hat.

Ist im Besondern

$$\begin{aligned} 2\tau' &= 2\tau_1, & 2\tau'' &= 2\tau_2, \\ 2\tau''' &= 2\tau_3 + 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2, \end{aligned}$$

so folgt als Auflösung direkt

$$\begin{aligned} 2\tau_1 &= 2\tau', & 2\tau_2 &= 2\tau'', \\ 2\tau_3 &= 2\tau''' - 2m_1\tau' - 2m_2\tau'', \end{aligned}$$

d. h. $2\tau_1$ und $2\tau_2$ bilden mit jeder Translation, deren Endpunkt in der nächsten, zu $2\tau_1$ und $2\tau_2$ parallelen Gitterebene liegt, ein primitives Tripel.

Wir bezeichnen das aus drei Translationen eines primitiven Tripels gebildete Tetraeder als *primitives Tetraeder*. Ein solches ist z. B. das Tetraeder $OABC$ in Fig. 50. Setzen wir die Seiten

$$BC = 2\tau'_1, \quad CA = 2\tau'_2, \quad AB = 2\tau'_3,$$

so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\tau'_1 + 2\tau_2 - 2\tau_3 &= 0, \\ 2\tau'_2 + 2\tau_3 - 2\tau_1 &= 0, \\ 2\tau'_3 + 2\tau_1 - 2\tau_2 &= 0, \\ 2\tau'_1 + 2\tau'_2 + 2\tau'_3 &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt, daß irgend drei Kanten des Tetraeders, die nicht in derselben Ebene liegen, ein primitives Tripel bestimmen; z. B.

$$2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau'_1 \text{ und } 2\tau_1, 2\tau'_2, 2\tau'_3,$$

d. h.

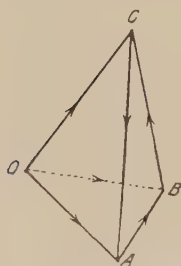


Fig. 50

29. *Drei Kanten eines primitiven Tetraeders, die nicht in einer Ebene liegen, bilden ein primitives Translationentripel.*

Die oben gefundene geometrische Eigenschaft des primitiven Paares eines Punktnetzes überträgt sich sinngemäß auf ein primitives Tripel; sie lautet:

30. *Drei Translationen $2\tau'$, $2\tau''$, $2\tau'''$ eines Punktgitters stellen ein primitives Tripel von Translationen dar, wenn das durch sie bestimmte Parallelepidon im Innern und auf der Oberfläche keine andern Gitterpunkte enthält, als seine Eckpunkte.*

Sei $\mathfrak{P}$ das gegebene Punktgitter. Seien ferner $OA' = 2\tau'$, $OB' = 2\tau''$, $OC' = 2\tau'''$ drei Translationen, die dem vorstehenden Satz entsprechen, so bestimmen auch diese drei Translationen ein Punktgitter. Es sei $\mathfrak{P}'$, so ist wieder zu zeigen, daß beide Gitter identisch sind. Genau wie oben erkennen wir znnächst, daß jeder Punkt von $\mathfrak{P}'$ ein Punkt von $\mathfrak{P}$ ist. Aber auch der zweite Teil des Beweises überträgt sich unmittelbar. Sollte es nämlich noch Punkte von $\mathfrak{P}$ geben, die nicht in einen Eckpunkt von $\mathfrak{P}'$ fallen, so müßten sie auf der

Oberfläche oder im Innern eines der Parallelepipede Π' enthalten sein, die dem Gitter $\mathfrak{P}'$ angehören. Ist Q' ein solcher Punkt, so schließt man analog wie oben, daß es auch einen zu Q' analogen Punkt Q im Parallelepipede $OA'B'C'$ geben müßte, der ein Punkt von $\mathfrak{P}$ wäre, was aber gerade nicht der Fall sein soll.

Auch der Satz 30 kann auf den primitiven Charakter des durch $2\tau', 2\tau'', 2\tau'''$ bestimmten *Tetraeders* ausgedehnt werden.

§ 9. Invarianter Inhalt der primitiven Parallelogramme und Parallelepipede. Den primitiven Translationenpaaren eines Netzes, die wir im Anschluß an den Satz 26 betrachteten, entsprechen offenbar Stammfiguren, die gleichen Inhalt haben.

Hierin dokumentiert sich ein allgemeiner Satz, der sich folgendermaßen aussprechen läßt:

31. *Alle primitiven Parallelogramme eines Punktnetzes sind inhaltsgleich.*

Ein analytischer Beweis folgt unmittelbar aus dem oben gegebenen arithmetischen Kennzeichen für ein primitives Paar. Der Inhalt der Stammfigur π_0 hat den Wert

$$\mathfrak{S}(\pi_0) = 4\tau_1\tau_2 \sin w,$$

wo w der Koordinatenwinkel ist. Ferner sei wieder

$$OA' = 2\tau' = 2p_1\tau_1 + 2p_2\tau_2, \quad OB' = 2\tau'' = 2q_1\tau_1 + 2q_2\tau_2,$$

so haben A' und B' die Koordinaten

$$x' = 2p_1\tau_1, \quad y' = 2p_2\tau_2; \quad x'' = 2q_1\tau_1, \quad y'' = 2q_2\tau_2.$$

Dann ist der Inhalt des von OA' und OB' bestimmten Parallelogramms π' dargestellt durch

$$\mathfrak{S}(\pi') = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \sin w = \begin{vmatrix} 2p_1\tau_1 & 2p_2\tau_2 \\ 2q_1\tau_1 & 2q_2\tau_2 \end{vmatrix} \sin w,$$

oder aber

$$\mathfrak{S}(\pi') = 4\tau_1\tau_2 \sin w \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}.$$

Aber die Determinante hat den Wert ± 1 und damit ist der Satz bewiesen.

Um ihn geometrisch zu beweisen, fassen wir eine möglichst große Zahl von Parallelogrammen π ins Auge, die dem primitiven Paar $2\tau_1, 2\tau_2$ entsprechen. Sie mögen ein gewisses Gebiet erfüllen; der Einfachheit halber wählen wir dafür eine Kreisfläche vom Radius r . Die Anzahl der in der Kreisfläche enthaltenen Netzpunkte sei Z . Nun enthält jedes Parallelogramm π vier Netzpunkte, andererseits stoßen in jedem Netzpunkt je vier Parallelogramme zusammen; die Anzahl Z_1 der Parallelogramme, die im Innern der Kreisfläche enthalten sind, kommt daher der Zahl Z sehr nahe; die Abweichung ist nur darin begründet, daß an den Punkten, die an der Grenze der Kreisfläche liegen, nicht mehr alle vier um sie liegenden Parallelogramme π in die Zahl Z_1 einzurechnen sind. Nun ist die Anzahl der im Innern liegenden Parallelogramme mit r^2 proportional, dagegen die Zahl derjenigen, die dem Umfang angehören, mit r selbst. Die Zahlen Z und Z_1 unterscheiden sich daher um eine Größe, die von der Ordnung r ist, während sie selbst von der Ordnung r^2 sind. Lassen wir nun r unbegrenzt wachsen, so muß infolgedessen der Quotient $Z : Z_1$ der Einheit näher und näher kommen.

Diese Betrachtungen sind von der Wahl des primitiven Paares durchaus unabhängig. Ist daher Z'_1 die Zahl der im Innern des Kreises liegenden Parallelogramme π' , die irgend einem andern primitiven Paar entsprechen, so kommt auch der Quotient $Z' : Z'_1$ mit wachsendem r der Einheit beliebig nahe. Das gleiche gilt demnach auch von dem Quotienten $Z_1 : Z'_1$. Bezeichnen wir nun die Flächenstücke, die von den Z_1 Parallelogrammen π , bezüglich von den Z'_1 Parallelogrammen π' erfüllt werden, mit F und F' , so unterscheiden sich auch F und F' von der gesamten Kreisfläche um Größen von der Ordnung r , während sie selbst von der Ordnung r^2 sind. Demnach kommt wiederum der Quotient $F : F'$ mit wachsendem r der Einheit beliebig nahe und daraus folgt schließlich das gleiche für die Quotienten $F : Z_1$ und $F' : Z'_1$. Der erste dieser Quotienten bedeutet aber den Inhalt des Parallelogramms π , der zweite denjenigen von π' , und damit ist der obige Satz wiederum bewiesen¹⁾.

¹⁾ Der hier befolgte Gedankengang entspricht dem von Dirichlet gegebenen Beweis. Vgl. Crelle's Journ. f. Math., Bd. 40, S. 216.

Die vorstehenden Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf die primitiven Parallelepipede der Raumgitter übertragen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Kreisfläche durch eine Kugel zu ersetzen ist. Das Innere der Kugel ist von der Ordnung r^3 , die Oberfläche von der Ordnung r^2 , das Verhältnis der letzteren zur ersteren daher wiederum umgekehrt proportional mit r usw. usw. Ebenso überträgt sich der analytische Beweis; nur ist $\sin w$ durch den sogenannten Sinus der Ecke im Punkte O zu ersetzen. Also folgt:

32. *Alle primitiven Parallelepipede eines Punktgitters haben gleichen Inhalt.*

Die vorstehenden Sätze gelten natürlich in analoger Form von den primitiven Dreiecken und primitiven Tetraedern. Ferner ist klar, daß auch ihre Umkehrung richtig ist. Wenn also drei Translationen $2\tau'$, $2\tau''$, $2\tau'''$ ein Tetraeder bestimmen, das dem aus $2\tau_1$, $2\tau_2$, $2\tau_3$ gebildeten Tetraeder inhaltsgleich ist, so bilden sie ebenfalls ein primitives Translationentripel.

Im Anschluß an den vorstehenden Satz kann man den Begriff der *Netzdichte* für ein Gitter einführen. Wir fassen zunächst ein Punktnetz $\mathfrak{N}$ ins Auge. Um ein primitives Paar zu bilden, können wir eine primitive Translation $OT = 2\tau_1$ beliebig annehmen; sei k die Gerade, die sie enthält. Die Translation $2\tau_2$ ist dann so zu bestimmen, daß das aus $2\tau_1$ und $2\tau_2$ gebildete Parallelogramm denselben Inhalt hat, wie die Stammfigur π_0 von $\mathfrak{N}$. Daraus folgt, daß die zu k parallelen Netzgeraden um so *näher* aneinander liegen, je *größer* die Translation $2\tau_1$ ist, und umgekehrt. Je *dichter* also die Gerade k mit Netzpunkten erfüllt ist, um so *größeren* Abstand haben die ihr parallelen Netzgeraden.

Analog ist es für ein primitives Tripel eines Gitters $\mathfrak{P}$. Wir können eine Netzebene ε und in ihr ein primitives Paar $2\tau_1$ und $2\tau_2$ beliebig wählen und haben zu ihm eine Translation $2\tau_3$ so hinzuzufügen, daß das zum Tripel gehörige Parallelepipede den gleichen Inhalt hat, wie die Stammfigur Π_0 des Gitters. Nun ist der Inhalt des Parallelepipeds gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe; es wird also der Abstand der zu ε parallelen Netzebenen wieder umso größer sein, je

kleiner das zu $2\tau_1$ und $2\tau_2$ gehörige Parallelogramm ist, je *dichter* also die Ebene ε mit Gitterpunkten besetzt ist. *Je größer also diese Netzdichte ist, in um so größerem Abstand folgen die Ebenen ε aufeinander.*

§ 10. **Zentrierte Netze und Gitter.** Wir knüpfen an die Betrachtungen an, die wir in § 7 den Diagonalschaaren eines Netzes $\mathfrak{N}$ widmeten. Wir sahen, daß die Schaaren $\{d\}$ und $\{e\}$ ein Netz $\mathfrak{N}'$ bestimmen, das eine einfache geometrische Beziehung zu dem durch die Schaaren $\{g\}$ und $\{h\}$ erzeugten Netz $\mathfrak{N}$ hat. Es entsteht aus $\mathfrak{N}$ durch Hinzufügung der Mittelpunkte der durch $\{g\}$ und $\{h\}$ gebildeten Parallelogramme. Man sagt, daß es aus $\mathfrak{N}$ durch *Zentrierung* hervorgeht und nennt es deshalb ein *zentriertes Netz*. Diese Auffassung bietet

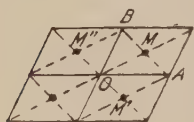


Fig. 51

manche Vorteile für die Beurteilung der Eigenschaften des Netzes $\mathfrak{N}'$, wenn man die des Netzes $\mathfrak{N}$ kennt; sie dient auch vielfach der Anschaulichkeit.

Zwischen den primitiven Paaren beider Netze besteht eine einfache Beziehung. Bilden wieder $OA = 2\tau_1$ und $OB = 2\tau_2$ das erzeugende Paar des Netzes $\mathfrak{N}$, so kann $OMAM'$ als Stammfigur des Netzes $\mathfrak{N}'$ gewählt werden (Fig. 51). Wird $OM = 2\tau'$ und $OM' = 2\tau''$ gesetzt, so ist

$$2\tau' + 2\tau'' = 2\tau_1, \quad 2\tau' - 2\tau'' = 2\tau_2,$$

woraus sich unmittelbar

$$20) \quad 2\tau' = \tau_1 + \tau_2, \quad 2\tau'' = \tau_1 - \tau_2$$

ergibt. Die Stammfigur von $\mathfrak{N}'$ hat den *halben* Flächeninhalt, wie die von $\mathfrak{N}$; nach § 9 bilden also auch die Parallelogramme $OAMM''$ und $OBMM'$ eine Stammfigur. Daraus ist weiter zu schließen, daß auch $2\tau_1$ oder $2\tau_2$ mit einer der beiden Translationen $2\tau'$, $2\tau''$ ein primitives Paar abgeben.

Auf folgende Eigenschaften der zentrierten Netze, die sich aus der Anschauung unmittelbar ergeben, sei noch besonders hingewiesen (Fig. 47, S. 126).

1) Fassen wir die Mittelpunkte M der Parallelogramme von $\mathfrak{N}$ für sich ins Auge, so bilden sie ebenfalls ein Netz $\mathfrak{N}_e$;

es ist dem Netz $\mathfrak{N}$ kongruent und geht durch die Translation MO in $\mathfrak{N}$ über.

2) Beide Netze haben wechselseitige Beziehung zueinander; das Netz $\mathfrak{N}$ kann auch als Ort der Mittelpunkte der Parallelogramme von $\mathfrak{N}_c$ angesehen werden.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Stammfigur π_0 des Ausgangsnetzes $\mathfrak{N}$ ein Rechteck oder ein Rhombus ist (*rechtwinkliges* und *rhombisches* Netz); dann gilt (Fig. 52):

3) Durch Zentrierung eines rechtwinkligen Netzes entsteht ein rhombisches Netz; ebenso umgekehrt durch Zentrierung eines rhombischen ein rechtwinkliges.

4) Wir können dies gemäß 1) und 2) auch so aussprechen, daß jedes rhombische Netz $\mathfrak{N}'$ in zwei rechtwinklige Netze ($\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_c$) aufgelöst werden kann; ebenso analog jedes rechtwinklige in zwei rhombische¹⁾.

Hiervon haben wir später Gebrauch zu machen.



Fig. 52

Die Zentrierung eines Netzes $\mathfrak{N}$ kann als die Lösung der folgenden Aufgabe erscheinen. Man soll in die Stammfigur π_0 des Paares $2\tau_1, 2\tau_2$ einen Punkt P so einfügen, daß die Verlängerung von OP um sich selbst in einen Netzpunkt von $\mathfrak{N}$ fällt; jedoch so, daß $2\tau_1$ und $2\tau_2$ selbst *primitive Translationen* bleiben. Es ist klar, daß die einzige Lösung dieser Aufgabe von dem Zentrum M der Stammfigur gebildet wird. Läßt man die Erhaltung der Primitivität von $2\tau_1$ und $2\tau_2$ fallen, so kann man den Punkt P auch in die Mitte einer Seite von π_0 legen. Das so entstehende Netz hat die gleichen primitiven Richtungen wie das ursprüngliche, aber die eine Translation nimmt den halben Wert an. Diese Zentrierung ist sonst nicht im Gebrauch. Wir werden uns ihrer aber doch gelegent-

¹⁾ Den stark gezeichneten Geraden der Figur entspricht das rechtwinklige Ausgangsnetz. Die Auflösung des rhombischen Netzes in zwei rechtwinklige wird durch die vier stark gezeichneten Rechteckzentra und die gestrichelten horizontalen und vertikalen Geraden kenntlich gemacht. Alle horizontalen und vertikalen Geraden zusammen liefern das rechteckige Netz, das durch Zentrierung des rhombischen entsteht.

lich bedienen, weil das so entstehende neue Netz manchmal mit Vorteil benutzt werden kann, und werden es *seitenzentriert* nennen.

Wir übertragen nun die Zentrierung auf die Punktgitter, und zwar in Anlehnung an die soeben gestellte Aufgabe. Wir verlangen also, in die Stammfigur H_0 des Gitters neue Punkte P so einzufügen, daß die Verlängerung von OP um sich selbst in eine Ecke der Stammfigur fällt; mit der Maßgabe, daß die Kanten der Stammfigur *primitive Translationen* bleiben sollen. Beim Gitter ist dies auf mehrere Weisen möglich. Wir können P entweder in die Mitte einer Seitenfläche legen oder in die Körpermitte¹⁾. Wir gelangen dadurch zu drei verschiedenen Gattungen zentrierter Gitter.

Der einfachste Fall ist der, daß man nur ein Paar von Seitenflächen der Stammfigur zentriert. Benutzt man dazu (Fig. 48, S. 128) die in der horizontalen Ebene γ gelegene Grundfläche und ihre Gegenfläche, so kommt diese Zentrierung praktisch darauf hinaus, daß man in allen Ebenen der Schaar $\{\gamma\}$ vom Netz $\mathfrak{R}$ zum zentrierten Netz $\mathfrak{R}'$ übergeht. Wir wollen aber auch die erzeugenden Ebenenschaaren des so gewonnenen zentrierten Gitters $\mathfrak{P}'$ angeben. Wir können die Ebenenschaar $\{\gamma\}$ beibehalten, und zu ihr die beiden Schaaaren von Diagonalebene fügen, die wir in § 7 erwähnten. Sind d und e die Diagonalen der Grundfläche, d' und e' die Diagonalen der Gegenfläche, so sind

$$\delta = (dd') \text{ und } \varepsilon = (ee')$$

die beiden Ebenen, die die Ebenenschaaren $\{\delta\}$ und $\{\varepsilon\}$ bestimmen. Von ihnen geht je eine durch jede Ecke der Stammfigur, also auch durch jeden Gitterpunkt; sie erzeugen also in ihren Schnittpunkten jedenfalls die Punkte des Gitters $\mathfrak{P}$ selbst. Zu ihren Schnittpunkten gehören aber auch die Punkte G und G' , in denen sich d und e , sowie d' und e' schneiden. Das so entstehende Gitter $\mathfrak{P}'$ wird in seiner Beziehung zum Gitter $\mathfrak{P}$ auch als *einfach flächenzentriert* bezeichnet.

¹⁾ Von der Kantenmitte sehen wir wieder ab.

Werden zwei in O zusammenstoßende Seitenflächen der Stammfigur zentriert — durch die Punkte K und H (Fig. 53) — so stellt sich die Zentrierung der dritten Seitenfläche von selbst ein (G). Man erkennt dies am einfachsten durch Betrachtung der Deckschiebungen. Für das neue Gitter ist sowohl OK wie OH eine Deckschiebung, also auch (§ 3) KH . Zieht man nun HD und KE parallel zu CO , so ergibt sich

$$HK = DE = AG,$$

also ist auch AG eine Deckschiebung; und da es auch OA ist, so folgt es gemäß dem eben angezogenen § 3 auch für OG . Dies ist die Behauptung.

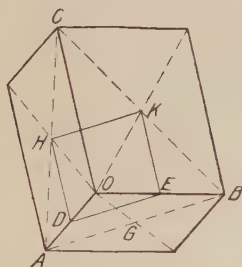


Fig. 53

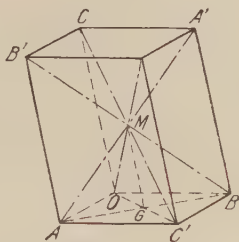


Fig. 54

Erzeugende Ebenen sind in diesem Fall die Ebenen

$$\alpha' = OHK, \beta' = OGK, \gamma' = OGH.$$

In der Tat ist offenbar, daß sie sich sowohl in O , wie in G, H, K schneiden; außerdem geht aber auch durch jede Ecke der Stammfigur ein solches Ebenentripel. Das so bestimmte neue Gitter $\mathfrak{B}'$ enthält die Ecken und die Flächenzentra von $\mathfrak{B}$; es wird deshalb ein dreifach flächenzentriertes oder kürzer flächenzentriertes Gitter genannt.

Eine letzte Zentrierung ist so möglich, daß wir den Punkt P in die Körpermitte M der Stammfigur fallen lassen (Fig. 54). Als erzeugende Ebenenschaaren kann man jetzt die Diagonalebene in Betracht ziehen, die durch je zwei Körperdiagonalen der Stammfigur gebildet werden. Irgend drei von

ihnen geben ein Tripel erzeugender Ebenen-Schaaren. Das so bestimmte neue Gitter $\mathfrak{P}'$ enthält die Ecken und die Körperzentra der Parallelepipede von $\mathfrak{P}$ selbst; es wird *körperzentriertes* oder kürzer *zentriertes Gitter* genannt.

Für das eben erhaltene Gitter bestehen ähnliche Eigenschaften, wie für die zentrierten Netze. Auch hier bilden die Zentra der Parallelepipede für sich ein Gitter, das dem Ausgangsgitter kongruent ist; und auch hier stellen die Ecken des Gitters $\mathfrak{P}$ den Ort aller Körpermitten für die Parallelepipede des zentrierten Gitters $\mathfrak{P}'$ dar. Beide Gitter zeigen also insofern ein wechselseitiges Verhalten zueinander.

Für die Tripel primitiver Translationen der zentrierten Gitter gilt folgendes:

Den ersten Gittertypus konnten wir so entstehen lassen, daß wir nur das in der Ebene γ liegende Netz zentrierten. Nun kann für das primitive Tripel des Gitters gemäß § 6 das primitive Paar der Grundfläche in Verbindung mit $2\tau_3$ gewählt werden. Wir erhalten daher aus dem vorstehenden unmittelbar, daß

$$20a) \quad 2\tau' = \tau_1 + \tau_2, \quad 2\tau'' = \tau_1 - \tau_2, \quad 2\tau_3$$

ein *primitives Tripel des einfach flächenzentrierten Gitters* darstellen.

Im (dreifach) flächenzentrierten Gitter bestimmen wir das primitive Tripel auf Grund des Satzes 30. Diesem Satz gemäß stellen OG, OH, OK ein primitives Tripel dar. Das durch sie bestimmte Tetraeder liegt nämlich ganz innerhalb des Tetraeders $OABC$ des Ausgangsgitters und kann daher außer seinen Ecken keine sonstigen Punkte des zentrierten Gitters enthalten. Wir erhalten also in

$$21) \quad 2\tau_g = \tau_1 + \tau_2, \quad 2\tau_h = \tau_1 + \tau_3, \quad 2\tau_k = \tau_2 + \tau_3$$

ein *primitives Tripel des flächenzentrierten Gitters*.

Auch für das im Körpermittelpunkt M zentrierte Gitter benutzen wir wiederum den Satz 30. Bei diesem Gitter ist jede halbe Körperdiagonale eine primitive Translation; also insbesondere MO, MA, MB, MC . Irgend drei von ihnen bilden ein primitives Tripel. Ebenso ist das mit den Kanten $OA,$

OB, OM gebildete Tetraeder ein Stammtetraeder des Gitters; seine Kanten sind primitive Translationen und es enthält im Innern und auf der Oberfläche — von den Ecken abgesehen — keine weiteren Punkte des Gitters. Für die Translation $OM = 2\tau_a$ erhalten wir den Ausdruck

$$22) \quad 2\tau_a = OM = OG + GM = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Wir erhalten weiter

$$AM = AO + OM = -2\tau_1 + 2\tau_a$$

$$BM = BO + OM = -2\tau_2 + 2\tau_a$$

$$CM = CO + OM = -2\tau_3 + 2\tau_a,$$

und wenn wir AM, BM, CM durch $2\tau'_a, 2\tau''_a, 2\tau'''_a$ bezeichnen, so folgt schließlich

$$23) \quad \begin{aligned} 2\tau_a &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ 2\tau'_a &= \tau_2 + \tau_3 - \tau_1 \\ 2\tau''_a &= \tau_3 + \tau_1 - \tau_2 \\ 2\tau'''_a &= \tau_1 + \tau_2 - \tau_3. \end{aligned}$$

Auch diese Gleichungen zeigen, daß (gemäß der Ausgangsdefinition von § 8) die oben genannten Tripel von primitiver Art sind.

Irgend drei der vier Translationen 23) bilden also ein primitives Tripel.

Für den körperlichen Inhalt der Stammfiguren der zentrierten Gitter gilt der folgende einfache Satz:

33. Der körperliche Inhalt der Stammfigur des zentrierten und einfach flächenzentrierten Gitters ist die Hälfte vom Inhalt der Stammfigur des Ausgangsgitters; beim flächenzentrierten Gitter ist es der vierte Teil.

Für das einfach flächenzentrierte Gitter folgt der Satz daraus, daß die in der Grundfläche γ liegende Stammfigur des zentrierten Netzes gleich der Hälfte der ursprünglichen ist. Für das zentrierte Gitter knüpfen wir die Berechnung des Inhalts seiner Stammfigur Π'_o an den des Tetraeders $T' = OMAB$ (Fig. 54). Das Tetraeder ist ein primitives Tetraeder des Gitters und sein Inhalt beträgt daher den sechsten Teil von dem der Stammfigur Π'_o . Andererseits ist dieses Tetraeder die Hälfte

von der Pyramide $MOABC'$ und diese ist wieder der sechste Teil der Stammfigur Π_0 des Ausgangsgitters $\mathfrak{P}$. Wir haben also

$$\text{Vol. } T = \frac{1}{6} \text{ Vol. } \Pi_0' = \frac{1}{12} \text{ Vol. } \Pi_0$$

und das ergibt die Behauptung.

Für das flächenzentrierte Gitter folgt der Satz noch unmittelbarer. Es sind nämlich (Fig. 53, S. 141) G, H, K die Mitten von AB, AC, BC ; daher ist das Dreieck GHK der vierte Teil des Dreiecks ABC und also auch der Inhalt des aus den Kanten OG, OH, OK gebildeten Tetraeders gleich dem vierten Teil vom Inhalt des Tetraeders $OABC$ und dies überträgt sich auf die zugehörigen Stammfiguren¹⁾.

Kap. IX. Symmetrische Punktnetze und Punktgitter

§ 1. Allgemeine Sätze über symmetrische Punktnetze. Wir sahen in Kap. VIII, § 4, daß *jedes* Punktnetz $\mathfrak{N}$ durch die Translationen der zugehörigen Translationengruppe in sich übergeht; es gestattet außerdem mannigfache Inversionen, sowie auch Umwendungen um gewisse auf seiner Ebene lotrechte zweizählige Achsen. Es soll ein *symmetrisches Punktnetz* heißen, falls es *noch Deckoperationen anderer Art* gestattet. Wir behandeln die Aufgabe, *alle symmetrischen Punktnetze zu finden*. Zweierlei werde vorausgeschickt.

Erstens liegt es nahe, für das Resultat eine Vermutung auszusprechen. Die beiden primitiven Translationen des Netzes bilden ein Dreieck; man wird erwarten, daß das Netz symmetrisch ausfällt, wenn ihm ein primitives Dreieck besonderer Art zukommt²⁾. Dies ist in der Tat der Fall. Es gibt vier

¹⁾ Analytisch ist der Satz aus den Formeln für den Tetraederinhalt leicht zu folgern. Für das Ausgangsgitter, das zentrierte und das flächenzentrierte Gitter kommen die drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} 2\tau_1 & 0_1 & 0 \\ 0 & 2\tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2\tau_1 & 0_1 & 0 \\ 0 & 2\tau_2 & 0 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & 0 \\ \tau_1 & 0 & \tau_3 \\ 0_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{vmatrix}$$

in Betracht. Sie verhalten sich wie 8:4:2 und das ist der Satz.

²⁾ Es gibt gemäß Kap. VIII § 7 unendlich viele primitive Dreiecke, nur für mindestens eines von ihnen kann die obige Eigenschaft verlangt werden.

Dreiecke besonderer Art; das rechtwinklige, das gleichschenklige, das gleichseitige und dasjenige, das sowohl gleichschenklige wie rechtwinklig ist. Ihnen entsprechen die vier Arten symmetrischer Netze, die wir ableiten werden.

Zweitens sei daran erinnert, daß Punktnetz und ebene Translationengruppe für unsere Untersuchung nach Kap. VIII, § 4 identisch sind; die Endpunkte aller Translationen der Gruppe bilden ja ein Netz $\mathfrak{N}$. Geht also das Netz *in sich* über, so gehen die sämtlichen Translationen der Translationengruppe *ineinander* über.

Sei nun $\mathfrak{Q}$ irgendeine Operation erster oder zweiter Art, die das Punktnetz in sich überführt, ohne aber eine Translation zu sein; der Punkt O möge durch sie nach P gelangen. Es gibt dann auch eine Deckschiebung $\mathfrak{T}$, die den Punkt P nach O bringt, und es ist auch das Produkt beider Operationen eine Deckoperation für das Punktnetz. Dieses Produkt $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$ läßt aber den Punkt O an seiner Stelle; die Operation $\mathfrak{Q}$ bedingt daher auch solche Deckoperationen, *die den Punkt O festlassen*. Auf ihre Erörterung wollen wir uns zunächst beschränken.

Wir können sogar auch davon absehen, daß $\mathfrak{Q}$ eine Operation zweiter Art ist. Da die Inversion bereits oben erledigt ist, kommt nur noch eine Spiegelung in Frage, und zwar eine Spiegelung an einer zur Netzebene senkrechten Ebene σ . Ist nämlich s die Schnittlinie der Netzebene mit σ , so vertauscht die Spiegelung je zwei Punkte P und P' , die spiegelbildlich zu s liegen. Die Vertauschung dieser zwei Punkte erfolgt aber auch, wenn wir der ganzen Netzebene eine Umwendung um s erteilen; die Spiegelung an der Ebene σ läßt sich also in der Tat durch eine Umwendung um die Achse s ersetzen. Daraus folgt:

1. *Die Symmetrie eines symmetrischen Punktnetzes kann durch eine Gruppe von Drehungen charakterisiert werden, deren Achsen durch einen und denselben Netzpunkt gehen. Sie soll die Achsengruppe G_a des Netzes heißen.*

Außer den in der Ebene des Netzes liegenden zweizähligen Achsen können nur noch solche Achsen in Frage kommen, die auf der Ebene senkrecht stehen. Sie betrachten wir zunächst;

es ist zu untersuchen, von welcher Zähligkeit sie sein können. Dabei bleiben zweizählige Achsen außer Betracht¹⁾).

Wir nehmen an, O sei der Fußpunkt der Achse a . Ferner sei OA eine Translation kleinster Länge, also A ein Netzpunkt. Wird die Drehung $\mathfrak{A}$ ausgeführt, so geht A in einen Netzpunkt über; er liegt (Fig. 55) auf dem Kreis um O mit OA und heiße B ²⁾. Dem Netz gehört aber auch der Punkt A' an, der aus A durch Inversion gegen O hervorgeht; und daher auch der Punkt B' , der aus A' mittels der Drehung $\mathfrak{A}^{-1}$ hervorgeht. Nun ist die Entfernung von je zwei Netzpunkten eine Translation des Netzes, also auch AB ; und da OA die kleinste Translation sein sollte, so kann AB nicht kleiner als OA sein.

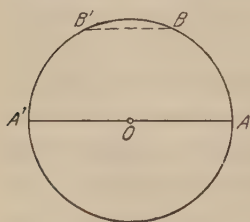


Fig. 55

Daraus folgt zunächst, daß der Drehungswinkel α mindestens 60° betragen muß. Wenden wir dieselbe Überlegung auf BB' an, beachten also, daß auch BB' nicht kleiner als OA sein kann (vom Wert Null abgesehen), so folgt, daß α nicht zwischen 60° und 90° liegen kann, ebensowenig zwischen 90° und 120° und zwischen 120° und 180° . Er kann also

nur die drei Werte 60° , 90° , 120° haben; eine auf der Netzebene lotrechte Symmetrieachse ist daher nur 2, 3, 4 oder 6-zählig. Von dem Wert 3 können wir aber noch absehen. Gemäß Kap. VIII, § 2 gestattet das Netz auch eine Umwendung $\mathfrak{U}$ um die Achse a , also auch die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}^{-1}$; und dies ist, wenn $\mathfrak{A}$ eine Drehung um 120° ist, eine Drehung um 60° . Die dreizählige Achse ist also zugleich sechszählig; d. h.

2. *Symmetrieachsen eines Punktnetzes, die auf der Netzebene senkrecht stehen und durch einen Netzpunkt gehen, sind entweder zweizählig oder vierzählig oder sechszählig*³⁾.

¹⁾ Eine zweizählige Achse kommt ja jedem Netz zu.

²⁾ B ist in der Figur ein willkürlicher Punkt.

³⁾ Achsen, die nicht durch einen Netzpunkt gehen, können auch dreizählig sein; vgl. § 3.

§ 2. Die vier Typen symmetrischer Punktnetze. Ist die auf der Netzebene senkrechte Achse zweizählig, so kann das Netz besondere Symmetrie nur dadurch erwerben, daß ihm auch noch zweizählige Achsen *in* der Netzebene zukommen. Die gesamte Achsensymmetrie ist dann durch die Vierergruppe V (Kap. V. § 5) gekennzeichnet. Dem Netz kommen also außer der zur Netzebene senkrechten Achse w auch zwei durch O gehende zueinander senkrechte zweizählige Achsen u und v zu. Gemäß den Ausführungen, die dem Satz 1 vorangehen, sind sie übrigens zugleich Spiegelungsgeraden für das Netz, wovon wir im folgenden Gebrauch machen.

Wir zeigen zunächst, daß es Deckschiebungen des Netzes gibt, die in die Achsen u und v fallen. Sei (Fig. 56) OT eine

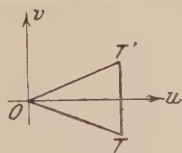


Fig. 56

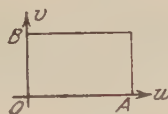


Fig. 57

Translation, für die dies nicht der Fall ist. Der Translationengruppe gehört auch die Translation OT' an, die aus OT durch Spiegelung gegen u hervorgeht, also auch (Kap. VIII, § 2) die Translation TT' und diese ist senkrecht zu u , also parallel zu v . Das analoge folgt mittels der Achse v für u . Die Achsen u und v sind daher Träger von Netzpunkten; seien $2\tau_x$ und $2\tau_y$ die primitiven Translationen der auf diesen beiden Geraden enthaltenen regelmäßigen Punktreihen.

Nun sind zwei Fälle möglich. Die beiden Translationen $2\tau_x$ und $2\tau_y$ sind zugleich ein primitives Paar für das Netz selbst, oder dies ist nicht der Fall. Bilden sie ein primitives Paar, so ist die Stammfigur π_0 des Netzes das aus $2\tau_x = OA$ und $2\tau_y = OB$ gebildete Rechteck (Fig. 57); das primitive Dreieck ist *rechtwinklig*. Wir nennen das Netz ein *rechtwinkliges* oder *rechteckiges*. Alle Geraden, die in Rechteckseiten fallen, sind zweizählige Achsen und zugleich Spiegelungsgeraden für das Netz.

Bilden $OA = 2\tau_x$ und $OB = 2\tau_y$ kein primitives Translationenpaar des Netzes, so muß es im Innern oder auf dem Umfang des Rechtecks $OABC$ einen Translationsendpunkt T geben. In eine Seite des Rechtecks kann er aber wegen des primitiven Charakters von OA und OB nicht fallen; er kann daher nur im Innern von $OABC$ liegen. Das ist in der Tat möglich, aber nur auf eine Weise. Zeichnen wir nämlich für T die Spiegelbilder (Fig. 58) T_u und T_v bezüglich der Achsen u und v , so sind T_u und T_v Netzpunkte, also sind TT_u und TT_v Translationen; sie können daher nur gleich OA und OB sein. Dies ist aber nur möglich, wenn T in den Mittelpunkt M von $OABC$ fällt. Unser Netz entsteht also aus dem rechteckigen Netz durch Zentrierung (Kap. VIII, § 10). Ein primitives Dreieck

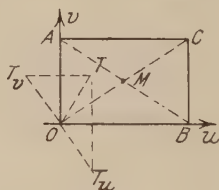


Fig. 58

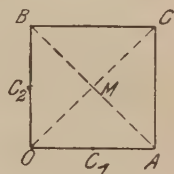


Fig. 59

ist OMA , und dies ist gleichschenkelig. Die Stammfigur π_o , die diesem Dreieck entspricht, ist ein Rhombus, z. B. $OMAM'$; das Netz heißt daher *rhombisches Netz*. Die zweizähligen Achsen u und v fallen in die Rhombendiagonalen.

Bezeichnen wir die in die Rhombenseiten fallenden primitiven Translationen wieder durch $2\tau'$ und $2\tau''$, so hat man (in Übereinstimmung mit Kap. VIII, § 10)

$$1) \quad 2\tau' = \tau_x + \tau_y, \quad 2\tau'' = \tau_x - \tau_y.$$

Übrigens stellen auch $2\tau'$ oder $2\tau''$ mit einer der beiden Translationen $2\tau_x$ und $2\tau_y$ ein primitives Paar dar. Also folgt:

3. *Es gibt zwei Gattungen symmetrischer Netze mit der Gruppe V als Achsengruppe. Die Stammfigur ist im einen Fall ein Rechteck (rechteckiges Netz), im andern ein Rhombus (rhombisches Netz). Das rhombische Netz entsteht aus dem rechtwinkligen durch Zentrierung und umgekehrt.*

Wir gehen zu den Netzen mit vierzähliger Achse über. Ist wieder $2\tau_x = OA$ eine kleinste Translation (Fig. 59), so gehört auch die zu OA senkrechte Translation $2\tau_y = OB$ dem Netz an; beide haben gleiche Länge.

Wir nehmen nun zunächst an, daß diese beiden Translationen ein primitives Paar abgeben; die Stammfigur des Netzes ist dann das Quadrat $OABC$, und das Netz heißt *quadratisch*. Das primitive Dreieck OAB ist dann sowohl rechtwinklig, wie gleichschenkelig, daher hat das Netz alle Eigenschaften sowohl des rechtwinkligen wie auch des rhombischen Netzes. Es sind also sowohl die Seiten, wie auch die Diagonalen der Quadrate $OABC$ zweizählige Achsen, die dem Netz entsprechende Achsengruppe ist daher die Gruppe D_4 .

Der Fall, daß $2\tau_x$ und $2\tau_y$ kein primitives Paar bilden, kann, weil OA eine *kleinste* Translation sein soll, nicht eintreten. Es könnten ja an sich nur diejenigen Fälle auftreten, die auch beim rechteckigen Netz möglich sind; d. h. die Mitte M des Quadrats $OABC$ könnte noch ein Netzpunkt sein. Aber da $OM < OA$ ist, so ist dies nicht möglich. Also folgt:

4. *Es gibt nur eine Gattung symmetrischer Netze mit der Gruppe D_4 als Achsengruppe. Die Stammfigur des Netzes ist ein Quadrat; das Netz heißt quadratisch.*

Es ist klar, daß man auch ein quadratisches Netz zentrieren kann; dadurch entsteht dem vorstehenden gemäß wieder ein quadratisches Netz.

Es ist noch der Fall einer sechszähligen Achse zu erörtern. Ist OA (Fig. 60) die kleinste primitive Translation, und ist OB diejenige, die aus OA durch Drehung um 60° hervorgeht, so bilden notwendig wieder OA und OB ein primitives Paar; denn jeder innerhalb des Dreiecks OAB liegende Netzpunkt verstößt dagegen, daß OA eine kleinste Translation ist. Das Dreieck OAB ist also primitiv. Da es gleichseitig ist, so heißt das Netz ein *gleichseitiges*. Seine Stammfigur $OABC$ ist ein Rhombus, der in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt; das Netz

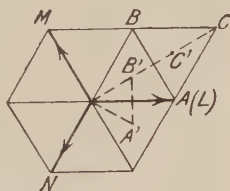


Fig. 60

hat daher, wie jedes rhombische Netz, die Rhombendiagonalen als zweizählige Achsen. Seine Symmetriegruppe ist daher D_6 . Also:

5. *Es gibt eine Gattung symmetrischer Netze mit der Gruppe D_6 als Achsengruppe. Das primitive Dreieck des Netzes ist gleichseitig; das Netz heißt gleichseitiges Netz.*

Seien OM und ON diejenigen Translationen, die aus OA durch Drehung um 120° und 240° hervorgehen; wir bezeichnen von nun an A durch L und setzen

$$OL = 2\tau_\lambda, \quad OM = 2\tau_\mu, \quad ON = 2\tau_\nu$$

und zwar ist

$$2) \quad 2\tau_\lambda + 2\tau_\mu + 2\tau_\nu = 0;$$

überdies sind alle drei Translationen von gleicher Länge. Endlich ist zu bemerken, daß die dem Punkte O nächsten Netzpunkte, die also aus $\mathfrak{L}$ durch wiederholte Drehung um die sechszählige Achse hervorgehen, ein *reguläres Sechseck* bilden.

Die oben ausgesprochene Vermutung, daß die symmetrischen Netze den vier Arten besonderer Dreiecke entsprechen, hat sich also bestätigt. Genauer können wir sagen, daß unter den vielen primitiven Dreiecken, die einem Netze zukommen, sich bei den symmetrischen Netzen immer auch mindestens eins findet, das rechtwinklig, gleichschenkelig, gleichseitig oder gleichschenkelig und rechtwinklig ist¹⁾.

Zum Schluß noch eine Bemerkung, die sämtliche Netze betrifft. Jedes Netz hängt von einer gewissen Zahl sogenannter *Parameter* ab. Beim allgemeinen Netz sind es *drei*, die beiden Translationen des primitiven Paars und der eingeschlossene Winkel. Beim rechtwinkligen und rhombischen Netz sind es *je zwei*, beim rechtwinkligen die Längen der Seiten des Rechtecks, beim rhombischen Seite und Winkel des Rhombus. Beim quadratischen und gleichseitigen Netz *je eine*, die Seite des Quadrats oder des Sechsecks²⁾.

¹⁾ Es ist nicht ausgeschlossen, daß auch bei andern Punktnetzen Rechtecke auftreten, deren Ecken Netzpunkte sind; aber keine von dem obigen *primitiven* Charakter. Vgl. S. 169, Anm. 2.

²⁾ Gemäß dem mathematischen Sprachgebrauch sind Parameter Größen, die verschiedener (variabler) Werte fähig sind. So auch oben.

§ 3. Die Achsenschaaren der Punktnetze. Zu jeder Symmetrieachse eines Punktnetzes gibt es unendlich viele zu ihr parallele Achsen. Die Art und Lage dieser Achsen haben wir abzuleiten. Diejenigen, die durch die Netzpunkte gehen, sind uns aus der Achsengruppe des Netzes bekannt; es handelt sich also nur noch um die andern.

Sei $\mathcal{Q}$ eine Deckbewegung um eine solche Achse; sie läßt nach Annahme keinen Netzpunkt fest. Möge durch sie der Netzpunkt O auf einen Netzpunkt Q fallen. Dann gibt es auch eine Translation $\mathcal{T}$ des Netzes, die Q nach O bringt. Das Produkt $\mathcal{Q}\mathcal{T}$ ist daher eine solche Deckbewegung des Netzes, die den Punkt O festläßt; sie ist also eine Drehung der Achsengruppe G_a des Netzes. Bezeichnen wir sie mit $\mathcal{G}$, so haben wir

$$\mathcal{Q}\mathcal{T} = \mathcal{G}; \text{ also } \mathcal{Q} = \mathcal{G}\mathcal{T}^{-1},$$

wo $\mathcal{T}^{-1}$ die zu $\mathcal{T}$ inverse Translation ist. Die Deckbewegung $\mathcal{Q}$ ist daher dem Produkt aus der Bewegung $\mathcal{G}$ und einer Translation der Translationengruppe äquivalent. Umgekehrt ist auch jedes solche Produkt eine Deckbewegung des Netzes. Also folgt:

6. *Es gibt keine andern Deckbewegungen des Netzes, als solche, die sich als Produkt aus einer Drehung der Achsengruppe und einer Translation des Netzes darstellen, und jedes solche Produkt ist eine Deckbewegung.*

Damit ist unser allgemeines Problem bereits der Lösung zugeführt. Wir haben weiter nichts zu tun, als für jedes einzelne Netz $\mathcal{N}$ und für jede Drehung $\mathcal{G}$ der ihm entsprechenden Achsengruppe G_a die bezüglichen Produkte auszuwerten. Ihre Deutung erfolgt in allen Fällen nach den Sätzen von Kap. III und IV, § 1¹⁾. Allen diesen Produkten entsprechen Drehungen um Achsen, die der Achse der Drehung $\mathcal{G}$ parallel laufen.

Wir beginnen mit denjenigen Bewegungen $\mathcal{G}$ der Achsengruppe, die den auf der Netzebene senkrechten Symmetrieachsen entsprechen, und bestimmen zunächst die Achsen, die durch Punkte der Stammfigur gehen; ihre Kenntnis gibt zugleich das Gesamtergebn.

¹⁾ Es kommt Gleichung 2c) in Betracht, und zwar in der Weise, daß $\mathcal{Q}$ zu bestimmen ist, also der Punkt B der dortigen Figuren.

1) Das rechtwinklige und rhombische Netz. Die durch O gehende Achse a ist zweizählig. Als Bewegung $\mathfrak{G}$ kommt daher nur eine Umwendung $\mathfrak{U}(\pi)$ um sie in Betracht. Das Produkt aus Umwendung und Translation ist wieder eine Umwendung; der Punkt, durch den sie geht, ist die Mitte der Strecke, die die Translation darstellt. Wenden wir dies auf die Seiten und Diagonalen der Stammfigur $\pi_0 = OABC$ an, so folgt:

7. *Alle zur Netzebene senkrechten Symmetrieachsen des rechtwinkligen und rhombischen Netzes sind zweizählig. Sie gehen durch die Ecken, die Seitenmitten und Flächenmitten der Rechtecke und Rhomben¹⁾.*

2) Das quadratische Netz. Die durch O gehende Achse a ist vierzählig; als Drehung $\mathfrak{G}$ kommen die drei Potenzen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^2$, $\mathfrak{U}^3$ in Betracht. Die Drehung $\mathfrak{U}^2$ ist eine Umwendung; ihre Produkte mit den Translationen des Netzes sind daher schon durch den vorstehenden Satz erledigt. Er bedingt unendlich viele Umwendungsachsen, die durch die Seitenmitten C_1 und C_2 und durch die Mitten M der Quadrate gehen (Fig. 59).

Es bleiben noch $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^3$ zu erörtern. Aber es ist $\mathfrak{U}^3 = \mathfrak{U}^{-1}$ und daher ist nur $\mathfrak{U}$ selbst in Betracht zu ziehen. Hier bedingt die Formel 4b) von Kap. III, § 4, daß auch noch durch die Mitte des Quadrats $OABC$ eine vierzählige Achse geht. Sie schließt die soeben erhaltene durch M gehende Umwendungsachse in sich ein; also folgt:

8. *Das quadratische Netz besitzt unendlich viele auf der Netzebene senkrechte zweizählige und vierzählige Symmetrieachsen. Die zweizähligen gehen durch die Mitten der Quadratseiten, die vierzähligen durch die Ecken und Mitten der Quadrate.*

3) Das gleichseitige Netz. Die durch O gehende Achse a ist sechszählig; als Drehung $\mathfrak{G}$ kommen die Potenzen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^2$, $\mathfrak{U}^3$, $\mathfrak{U}^4$, $\mathfrak{U}^5$ in Betracht. Die Potenz $\mathfrak{U}^3$ ist wiederum eine Umwendung; wie vorher folgern wir, daß durch die Mitte jeder Netz-

¹⁾ Wie auch in Kap. VIII, § 2 abgeleitet wurde.

seite (Fig. 60) eine zweizählige Achse geht. Was die übrigen Potenzen betrifft, so haben wir

$$\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}^{-2}; \quad \mathfrak{A}^5 = \mathfrak{A}^{-1};$$

wir haben daher nur noch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^2$ selbst in Betracht zu ziehen. Was zunächst die Drehung $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\pi/3)$ betrifft, so bedingt ihr Produkt mit einer Translation gemäß Kap. III, Gl. 4c keine neuen Achsen außer denen, die durch die Netzpunkte gehen. Wohl aber ist es für die Drehung $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}(2\pi/3)$ der Fall. Diese Drehung bedingt nach Gl. 4a eine dreizählige Achse um die Mitte M eines jeden gleichseitigen Dreiecks, das im Netz vorhanden ist. Also folgt:

9. *Die auf der Ebene des gleichseitigen Punktnetzes senkrechten Achsen sind zweizählig, dreizählig und sechszählig. Die zweizähligen gehen durch die Seitenmitten der gleichseitigen Dreiecke, die dreizähligen durch die Flächenmitten und die sechszähligen durch die Ecken.*

Wir wollen noch die Gesamtheit der dreizähligen und sechszähligen Achsen für sich betrachten. Ihre sämtlichen Fußpunkte gehen aus dem gleichseitigen Netz dadurch hervor, daß man in die Stammfigur $OABC$ die beiden Dreieckszentra B' und C' einfügt; wir wollen diese Punktgesamtheit deshalb ein *doppeltzentriertes* Netz nennen. Sie bildet selbst wieder ein gleichseitiges Netz, mit $OA'B'$ als primitivem Dreieck; in der Tat entsteht aus ihm die Gesamtheit aller Punkte ebenso, wie die Gesamtheit aller Punkte des Ausgangsnetzes aus OAB' . Seien

$$A'B' = 2\tau_{\lambda}', \quad B'O = 2\tau_{\mu}', \quad OA' = 2\tau_{\nu}'$$

die primitiven Translationen dieses Netzes, so folgen, da $3OB' = OC = OA + AC$ ist, die Gleichungen

$$\tau_{\lambda}' = \frac{1}{3}(\tau_{\mu} - \tau_{\nu}), \quad \tau_{\mu}' = \frac{1}{3}(\tau_{\nu} - \tau_{\lambda}), \quad \tau_{\nu}' = \frac{1}{3}(\tau_{\lambda} - \tau_{\mu}).$$

Es erübrigt noch, die in der Netzebene liegenden zweizähligen Achsen zu untersuchen; wir beschränken uns zunächst

¹⁾ Es folgt auch daraus, daß man gleichseitige Dreiecke nur auf eine Weise lückenlos nebeneinander legen kann.

auf die Drehungsachsen. Das Resultat wird man am besten der unmittelbaren Anschauung entnehmen.

1) Beim rechtwinkligen Netz fallen die zweizähligen Achsen, die durch O gehen, in die Rechteckseiten, zu ihnen treten noch weitere parallele Achsen durch die Mitten der Rechtecke.

2) Das rhombische Netz fassen wir als zentriertes rechteckiges auf, so ergibt sich, daß andere Achsen außer den durch die Ecken gehenden nicht vorhanden sind; durch jede Rhombenmitte gehen zwei solche Achsen.

3) Das quadratische Netz ist als rechtwinklig zu betrachten für die zweizähligen Achsen, die in seine Seiten fallen, als rhombisch für diejenigen, die in die Diagonalen fallen. Weitere Achsen, und zwar solche, die den Quadratseiten parallel sind, stellen sich noch für die Quadratmitten ein.

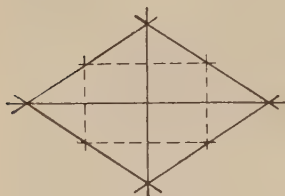


Fig. 61

4) Das gleichseitige Netz ist nur rhombisch; es gibt also keine andern zweizähligen Achsen in der Netzebene, als die durch die Netzpunkte gehenden.

Den rhombischen Netzen kommen auch noch zweizählige *Schraubenachsen* zu. Auch ihre Lage können wir der Anschauung entnehmen. Sie verlaufen in der Mitte zwischen je zwei Drehungsachsen (Fig. 61); sie gehen durch die Mitten je zweier benachbarter Seiten eines Rhombus, und die Translationskomponente der zugehörigen Umschraubung ist gleich der halben Rhombendiagonale. Dies folgt auch aus der Formel 3b) von Kap. IV, wenn darin u eine Rhombendiagonale und OT eine Translation des Netzes bedeutet. Solche Umschraubungen sind also auch für das quadratische und gleichseitige Netz vorhanden; beim quadratischen nur für die Richtungen der Diagonalen des Quadrats.

Mit den zweizähligen Achsen sind, wie wir in § 1 bemerkten, auch die auf der Netzebene senkrechten Symmetrieebenen unmittelbar gegeben.

Zum Schluß folgt eine Tabelle, die für die verschiedenen Punkte der Netzebene, durch die überhaupt Symmetrieachsen

gehen, die zugehörige Gesamtsymmetrie auf Grund der vorstehenden Resultate angibt. Diese Punkte sind in allen Fällen: Ecken, Flächenmitten, Seitenmitten. Da zur Achsensymmetrie die Netzebene als evidente Symmetrieebene σ_h für das Netz hinzukommt, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Symmetriegruppe der Netzpunkte

Netzart	Ecken	Flächenmitten	Seitenmitten
rechtwinklig	V^h	V^h	V^h
rhombisch	V^h	V^h	C_2^h
quadratisch	D_4^h	D_4^h	V^h
gleichseitig	D_6^h	D_6^h	V^h

§ 4. Allgemeine Sätze über symmetrische Punktgitter. Ein jedes Punktgitter geht durch die Deckschiebungen der ihm zugehörigen Translationengruppe in sich über; außerdem (Kap. VIII, § 5) auch durch Inversion gegen die Ecken, die Flächenmitten und die Körpermitten seiner Parallelepipede Π . Das Gitter soll ein *symmetrisches* Gitter heißen, wenn es *noch andere* Deckoperationen gestattet. *Alle* derartigen Gitter aufzusuchen, ist die Aufgabe, die wir zu behandeln haben. In dem in § 1 genannten Sinn kommen diese Deckoperationen auch seiner Translationengruppe zu. *Wir bezeichnen diese Translationengruppe von nun an durch Γ_τ , und werden von nun an auch für das Gitter selbst dies Zeichen verwenden.*

Sei $\mathcal{Q}$ *irgend* eine Operation, die das Gitter in sich überführt, ohne aber eine Translation zu sein; sie möge den Punkt O nach P bringen. Es gibt dann eine Translation $\mathfrak{T}$, die den Punkt P nach O bringt, und das Produkt $\mathcal{Q}\mathfrak{T}$ hat die doppelte Eigenschaft, eine Deckoperation des Gitters zu sein und den Punkt O an seiner Stelle zu lassen. *Wir beschränken uns daher zunächst wieder auf solche Deckoperationen, die den Punkt O festlassen.*

Auch bei den Gittern kann man von Operationen zweiter Art zunächst absehen. Da die Inversion jedem Gitter zukommt, kommt nur noch eine Spiegelung oder Drehspiegelung in Frage. Läßt aber das Gitter die Spiegelung $\mathfrak{S}$ (oder die Drehspiegelung $\mathfrak{A}(\alpha)\mathfrak{S}$) zu, so läßt es auch das Produkt $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ (oder $\mathfrak{A}(\alpha)\mathfrak{S}\mathfrak{T}$) zu, und dies ist, wie man leicht erkennt, eine Drehung $\mathfrak{A}(\pi)$ oder eine Drehspiegelung $\mathfrak{A}(\pi + \alpha)$ um eine auf der spiegelnden Ebene senkrechte Achse. Damit ist die Behauptung erwiesen und es folgt:

10. Die Symmetrie eines Punktgitters kann durch eine Gruppe von Drehungen charakterisiert werden, deren Achsen durch einen Gitterpunkt gehen. Sie soll die Achsengruppe G_a des Gitters heißen.

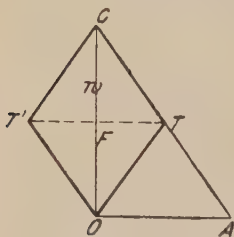


Fig. 62

Sei nun a eine Symmetrieachse des Gitters (also auch seiner Translationengruppe Γ_t), so beweisen wir zunächst, daß es Netzebenen des Gitters gibt, die auf a senkrecht stehen. Ist a zunächst zweizählig, so sei OT irgendeine Translation des Gitters, die nicht in a fällt (Fig. 62). Geht OT durch Umwendung um a in OT' über, so ist auch OT' ,

also auch TT' eine Translation des Gitters, und es ist $TT' \perp a$. Dies gilt für jede derartige Translation OT . Es existieren also unendlich viele zu a senkrechte Translationen der verschiedensten Richtungen. Sie bilden, wenn sie von O aus gezeichnet werden¹⁾, eine ebene Translationengruppe und bestimmen gemäß dem vorigen Kapitel (§ 4) ein Punktnetz; und da alle diese Translationen aus Translationen des Gitters bestehen, so sind die Punkte des Punktnetzes auch Punkte des Gitters und bilden in ihm eine Netzebene. Damit ist der Satz bereits für eine zweizählige Achse bewiesen.

Sei jetzt a irgendeine nicht zweizählige Symmetrieachse. Ist dann wieder OT eine Translation des Gitters, die nicht in

¹⁾ Es sei daran erinnert, daß wir die Translationen stets von einem beliebigen Punkt aus aufgetragen denken.

a fällt, so sind auch die Vektoren OT' , OT'' . ., die (Fig. 63) aus OT durch fortgesetzte Drehung um a hervorgehen, Translationen, und da mit auch TT' , $T'T''$ usw.¹⁾. Diese sind senkrecht zu a , und wir schließen das weitere genau wie vorstehend; d. h.

11. Für jede Symmetrieachse eines Punktgitters gibt es im Gitter Netzebenen, die auf ihr senkrecht stehen.

Soll nun das Gitter durch Drehung um die Achse a in sich übergehen, so muß auch die zu a senkrechte Netzebene in sich übergehen; also auch das in dieser Ebene liegende Punktnetz. Achsen, die ein Punktnetz in sich überführen, sind aber gemäß § 2 nur zweizählig, dreizählig, vierzählig oder sechszählig, also folgt:

12. Hauptsatz. Symmetrieachsen eines Punktgitters sind nur zweizählig, dreizählig, vierzählig oder sechszählig.

Als Achsengruppen des Gitters können also nur die in Kap. V betrachteten kristallographisch verwendbaren Drehungsgruppen auftreten. Jede dieser Drehungsgruppen wird daraufhin zu untersuchen sein, ob sie Deckgruppe eines Gitters sein kann, und es wird zu prüfen sein, wie die Gitter beschaffen sind, die diese Gruppen als Deckgruppen besitzen.

Über das zu erwartende Ergebnis wird man wiederum gewisse Vermutungen hegen. Die Seitenflächen α , β , γ der Stammfigur Π_o , die in O zusammenstoßen, enthalten je ein Punktnetz. Es ist anzunehmen, daß diese Punktnetze sämtlich oder doch teilweise von symmetrischer Eigenart ausfallen müssen, um einen Symmetriecharakter auch für das Gitter zu bewirken. Dies ist in der Tat der Fall. Symmetrische Gitter werden sich ergeben, wenn diese Punktnetze rechteckig, rhombisch, quadratisch oder gleichseitig sind; sie werden den verschiedenen möglichen Kombinationen solcher Netze entsprechen. Alle diese Kombinationen zu finden, ist die Aufgabe, die wir zu erledigen

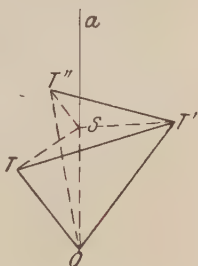


Fig. 63

¹⁾ Punkt S kommt erst später in Betracht.

haben. Ihre rein kombinatorische Erledigung würde freilich ziemlich mühsam sein; wir werden vielmehr so verfahren, daß wir unmittelbar an die Achsengruppen der Gitter anknüpfen. Wir denken uns das Gitter nach wie vor durch drei Ebenenschaaren $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$ erzeugt und nehmen γ insbesondere *horizontal* an; die Achsen, an die wir im folgenden anknüpfen, *vertikal*, also auf γ senkrecht.

§ 5. **Symmetrische Gitter vom monoklinen Typus.** Der einfachste Fall ist der, daß das Gitter nur eine einzige durch O gehende zweizählige Achse w besitzt; seine Achsengruppe ist also die zyklische Gruppe C_2 . Wir gehen zur Fig. 62 zurück. Sie zeigt, daß die Translationen OT , OT' , TT' , die dem Gitter zukommen, in eine durch w gehende Ebene fallen; sie bestimmen in ihr eine ebene Translationengruppe. Diese Ebene ist daher eine Netzebene für das Gitter. Dies trifft für jede solche Translation OT des Gitters zu; es existieren daher unendlich viele durch O gehende Netzebenen. Weiter folgt, daß die in diesen Ebenen liegenden Netze von symmetrischer Art sind. Da nämlich jede solche Netzebene durch Umwendung um w in sich selbst übergeht, so ist damit w eine zweizählige Achse, auch für das *in der Ebene* liegende Punktnetz; das Netz ist also nach § 2 entweder rhombisch oder rechteckig. Für die auf w senkrechte Netzebene γ bedingt jedoch die Achse w *keine* Besonderheit; gemäß Kap. VIII, § 2 läßt ja *jedes* Netz eine zu seiner Ebene senkrechte zweizählige Achse zu.

Wir wollen nun annehmen, in Fig. 62 sei OT eine solche Translation der Gruppe, daß ihr Endpunkt T von der Ebene γ einen *kleinsten Abstand* besitzt; ferner zeichnen wir den vierten Eckpunkt C des durch OT und OT' bestimmten Parallelogramms; er fällt auf w , und es ist OC eine Translation des Gitters. Auf w liegt also eine dem Gitter angehörige regelmäßige Punktreihe. Für sie sind zwei Fälle möglich. Es kann zunächst OC eine *primitive* Translation der Punktreihe und also auch des Gitters sein. Ist sie es nicht, so kann nur die Hälfte von OC diese primitive Translation sein; wie unmittelbar daraus folgt, daß der Punkt T ein Punkt kleinsten Abstandes von der Ebene γ sein sollte. Sei F die Mitte von

OC ; es ist dann auch F ein Gitterpunkt kleinsten Abstandes von γ . Die nächste zu γ parallele Netzebene γ_1 geht also im ersten Fall durch C , im zweiten durch F .

Wir bestimmen nun ein primitives Tripel des Gitters. Gemäß Kap. VIII, § 6 können wir zunächst zwei Translationen $2\tau_1$ und $2\tau_2$ so auswählen, daß sie ein primitives Paar *irgend-einer* Netzebene bilden; hierzu soll jetzt die auf w senkrechte Ebene γ dienen. Die Translation $2\tau_3$ ist dann so zu wählen, daß ihr Endpunkt von γ einen kleinsten Abstand besitzt. Hierbei sind dem vorstehenden gemäß zwei Fälle zu unterscheiden; je nachdem OF oder OC die kleinste in die Achse w fallende Translation ist. Wir gelangen so zu zwei verschiedenen Gittertypen mit der Achsengruppe C_2 . Wir werden vermuten, daß das eine Gitter aus dem andern durch Zentrierung hervorgeht. Dies werden wir sofort bestätigen, wenn wir jetzt daran gehen, die beiden Gittertypen geometrisch näher zu kennzeichnen.

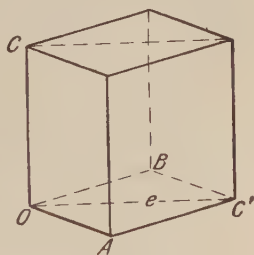


Fig. 64

Wir bezeichnen die in die Achse w fallende primitive Translation durch $2\tau_z$. Dann ist die Stammfigur des *ersten* Gittertypus so bestimmt, daß

$$3) \quad 2\tau_1, \quad 2\tau_2, \quad 2\tau_z$$

ihr primitives Tripel darstellen; die Stammfigur ist also eine *gerade rhomboidische Säule* (Fig. 64). Sind, wie immer, α und β ihre durch O gehenden Seitenflächen, so sind die in ihnen liegenden Punktnetze *rechteckig*, während das in der Grundebene γ liegende Netz von *beliebiger* Art sein kann. Die horizontalen Netzebenen folgen im Abstand $2\tau_z$ aufeinander.

Eine Eigenart dieses Gitters tritt auch darin zutage, daß *jede durch die Achse w gehende Netzebene ein rechtwinkliges Netz enthält*. Sei ε eine solche Ebene¹⁾, so ist nach dem Satz 21 von Kap. VIII ihre Schnittlinie e mit γ eine Gittergerade (Gitterdiagonale); ihr entspricht daher eine gewisse in

¹⁾ In Fig. 64 ist dafür die Diagonalebene OCC' gewählt.

das Tripel und die Stammfigur bestimmt. Das Tripel besteht aus den drei Translationen

$$4) \quad OA = 2\tau_1, \quad OB = 2\tau_2, \quad OT = 2\tau_3 = \tau_1 + \tau_2;$$

die Stammfigur ist eine sogenannte klinorhombische Säule¹⁾.

Im Gegensatz hierzu muß aber das Netz in der Ebene β rechteckig sein. Wäre es nämlich ebenfalls rhombisch, so wäre auch die Mitte S des in β liegenden Rechtecks $OB A' C$ ein Gitterpunkt. Gemäß Kap. VIII, § 10 müßte also auch das in der Ebene γ liegende Netz zentriert sein, und dies widerspricht der Festsetzung, daß $2\tau_1$ und $2\tau_2$ das primitive Paar in der Ebene γ bilden sollen. Das Gitter läßt sich also so definieren, daß es aus dem Gitter Γ_m durch *einfache Flächenzentrierung* (einer Seitenfläche) hervorgeht. Wir bezeichnen es durch Γ'_m . Seine horizontalen Netzebenen folgen im Abstand τ_z aufeinander.

Für dieses Gitter gibt es noch eine zweite Auffassung, die wir nötig haben. Wir gehen davon aus, daß das primitive Paar in der Ebene γ für beide Gitter beliebig gewählt werden konnte. Wir ersetzen es jetzt durch die Translationen (Fig. 65)

$$OB = 2\tau_2 \text{ und } OA_1 = 2\tau'_1 = 2\tau_1 - 2\tau_2,$$

die ebenfalls ein primitives Paar bilden, es ist dann zunächst das Parallelepiped $OB A A_1 C$ die Stammfigur des Gitters Γ_m . Wir finden dann

$$4a) \quad OT = 2\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 = \tau'_1 + \tau_2 + \tau_z,$$

es ist also die Diagonalfäche dieser Stammfigur zentriert. Wir beweisen noch ausdrücklich, daß die Seitenfläche $O C A_1$ nicht zentriert ist. Denn sonst wäre auch $2\tau'_3 = \tau'_1 + \tau_z$ eine Translation, also auch $2\tau_3 - 2\tau'_3 = \tau_2$, und dies trifft nicht zu. Bei dieser Auffassung entsteht daher das Gitter Γ'_m aus dem Gitter Γ_m durch *Körperzentrierung*. Wir nennen beide Gitter solche vom *monoklinen* Typus.

¹⁾ Diese Bezeichnung stützt sich darauf, daß man auch OT , OT' und OB als primitives Tripel wählen kann (vgl. Fig. 62 und 65). Dann ist die Ebene α die Grundfläche, in ihr $OTT'C$ ein Rhombus, und OB gegen den Rhombus geneigt.

Da jedes Gitter die Inversion gegen O zuläßt, so kommt den beiden monoklinen Gittern die zur zweizähligen Achse w senkrechte Ebene γ als Symmetrieebene zu. Ihre Gesamtsymmetrie für den Punkt O wird daher durch die Gruppe C_2^h dargestellt. Wir wollen sie die *Symmetriegruppe* des Gitters nennen und durch G_p bezeichnen. Alsdann folgt:

13. Es gibt zwei Gitter vom monoklinen Typus; sie heißen Γ_m und Γ_m' . Ihre Symmetriegruppe ist C_2^h . Ihre Translationengruppen haben als primitives Tripel

$$\begin{aligned}\Gamma_m: & 2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3 = 2\tau_z \\ \Gamma_m': & 2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3 = \tau_1 + \tau_z \text{ oder} \\ & 2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_z^1).\end{aligned}$$

Die Stammfigur des ersten ist eine gerade rhomboidische Säule; aus ihr entsteht das zweite durch Zentrierung einer Seitenfläche oder durch Körperzentrierung.

Wir können den Unterschied auch noch so kennzeichnen; beim ersten Gitter sind alle durch die zweizählige Achse gehenden Netzebenen rechtwinklig, beim zweiten Gitter sind sie teils rhombisch, teils rechtwinklig.

§ 6. Die Gitter vom rhombischen Typus. Wir erörtern jetzt die Gitter, die die Drehungsgruppe V als Achsengruppe besitzen. Sie enthält drei zueinander senkrechte Achsen u, v, w . Diese Gitter müssen in bezug auf jede der drei Achsen alle die Eigenschaften besitzen, die den monoklinen Gittern in bezug auf die Achse w zukommen. Die Achsen u, v, w sind also sämtlich Träger von Gitterpunkten; wir wollen die ihnen zukommenden primitiven Translationen durch

$$2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$$

bezeichnen, so daß wieder $2\tau_z$ der vertikalen Achse w entspricht. Die von den drei Achsen gebildeten Ebenen mögen *Hauptebenen* und die in ihnen liegenden Netze *Hauptnetze* heißen. In jeder Hauptebene liegt dann nach § 5 ein rhombisches oder rechteckiges Netz; insbesondere also auch in

¹⁾ Hier ist also die Bezeichnung $2\tau'_1$ wieder durch $2\tau_1$ ersetzt worden, da das Paar ja beliebig ist.

der Grundebene γ . Die Frage ist wieder, welche verschiedenen Kombinationen solcher Netze eintreten können. Vier Fälle sind möglich.

1) Alle drei Hauptnetze sind rechtwinklig, und es bilden daher (Fig. 66)

$$OA = 2\tau_x, \quad OB = 2\tau_y, \quad OC = 2\tau_z$$

ein primitives Tripel. Die Stammfigur Π_0 ist ein rechtwinkliges Parallelepiped. Wir bezeichnen das Gitter (und die zugehörige Translationengruppe) durch Γ_v . Das Gitter entspricht in der Weise dem ersten monoklinen Gitter Γ_m , daß dessen Translationen $2\tau_1$ und $2\tau_2$ in die u - und v -Achse fallen; jede Ebene, die durch eine zweizählige Achse geht, muß deshalb gemäß dem Zusatz zu Satz 13 ein rechteckiges Punktnetz enthalten.

Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß die drei Translationen $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$ kein primitives Tripel bilden. Da unsere Gitter Sonderfälle der monoklinen Gitter sind, so haben wir aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zu schließen, daß sie durch Zentrierung aus dem vorstehenden hervorgehen. Aber hier

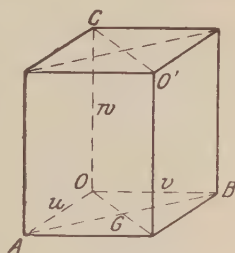


Fig. 66

können alle Arten der Zentrierung in Betracht kommen; denn im Gegensatz zu der Festsetzung von § 5 über $2\tau_1$ und $2\tau_2$ brauchen jetzt $2\tau_x$ und $2\tau_y$ kein primitives Paar in der Ebene γ zu sein. Wir erkennen dies auch direkt. Wenn das Parallelepiped $\Pi = OABCO'$ nicht die Stammfigur des Gitters sein soll, so muß es im Innern oder auf der Oberfläche noch weitere Gitterpunkte T enthalten; und wir beweisen in der gleichen Weise, in der wir in § 2 die Netze behandelt haben, daß T nur in die Mitte einer Seitenfläche oder in die Körpermitte von Π fallen kann. Weiter erkennen wir unmittelbar: Wird eine Seitenfläche von Π zentriert, so wird das in ihr liegende Netz rhombisch; wird die Körpermitte zentriert, so werden sämtliche in den Diagonalebene von Π liegenden Netze rhombisch. Dem entsprechen die folgenden drei neuen Gittertypen 2), 3), 4).

2) Wird nur eine der drei Seitenflächen zentriert, so möge es die Grundebene γ sein (Fig. 66) und G sei ihr Mittelpunkt. Dann ist das Punktnetz in ihr rhombisch, in den beiden andern Hauptebenen dagegen rechteckig. Da die Körpermitte des Parallelepipedes *II nicht* zentriert ist, so enthalten auch die durch w gehenden Diagonalebenen je ein rechteckiges Netz. Diese Diagonalebenen schneiden die Grundebene γ in den Rhombenseiten, und die Rhombenseiten sind wieder Träger des primitiven Paares der Ebene γ . Das Gitter stellt einen speziellen Fall des *ersten* in § 4 behandelten monoklinen Typus dar. Die drei Translationen

$$OG = 2\tau' = \tau_x + \tau_y, \quad GA = 2\tau'' = \tau_x - \tau_y, \quad 2\tau_s = 2\tau_z$$

bilden ein primitives Tripel. Die Stammfigur ist eine *gerade rhombische Säule*. Wir bezeichnen das Gitter (und seine Translationengruppe) durch I'_v . Jede durch die Achse w gehende Netzebene enthält ein rechteckiges Netz; dagegen gehen durch die u - und v -Achse sowohl rechteckige, wie rhombische Netze. Die der Grundfläche parallelen Netzebenen γ folgen im Abstand $2\tau_z$ aufeinander.

3) Wird jede der drei Seitenflächen zentriert, so mögen H, K, G die Mitten der drei Seitenflächen in den Ebenen α, β, γ sein. Das Punktnetz ist dann in jeder dieser Seitenflächen rhombisch; in jeder Diagonalebene dagegen rechteckig (Fig. 67). Es gehen also durch *jede* der drei Achsen *sowohl rhombische, wie rechteckige Netze*. Wir bezeichnen das Gitter (und seine Translationengruppe) durch I''_v . Das primitive Tripel können wir in die Form setzen

$$5) \quad \begin{aligned} OG &= 2\tau_g = \tau_x + \tau_y, & OH &= 2\tau_h = \tau_x + \tau_z, \\ OK &= 2\tau_k = \tau_y + \tau_z; \end{aligned}$$

die Stammfigur des Gitters ist dann das durch OG, OH, OK bestimmte Parallelepipedon¹⁾. Wie Fig. 68 erkennen läßt, sind seine Diagonalfächen Rhomben. Einer Diagonalfäche gehören z. B. die vier Punkte G, H, G', H' an. Andererseits fallen

¹⁾ Es bilden auch $GA = \tau_x - \tau_y = 2\tau'_g, HA = \tau_x - \tau_z = 2\tau'_h, KB = \tau_y - \tau_z = 2\tau'_k$ ein primitives Tripel.

sie sämtlich in die zur Fläche OBC parallele Mittelebene der Stammfigur Π_0 . Eine jede der vier Kanten GH , GH' , $H'G'$, $G'H$ ist daher an Länge gleich der halben Diagonale des Rechtecks, in dem Π_0 von dieser Mittelebene geschnitten wird. Die zu den Ebenen α , β , γ parallelen Netzebenen folgen im Abstand τ_x , τ_y , τ_z aufeinander.

4) Wird endlich die Körpermitte M zentriert, so ist (Fig. 69) das Punktnetz in jeder Hauptebene rechteckig, in jeder Diagonalebene rhombisch. Es gehen also auch in diesem Fall durch jede Achse sowohl rhombische, wie rechteckige Netze, nur in anderer Verteilung in bezug auf die Achsen des

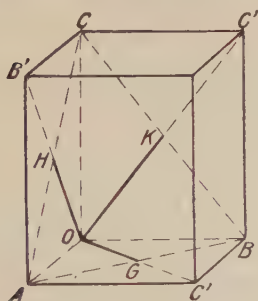


Fig. 67

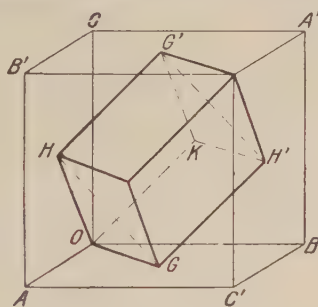


Fig. 68

Gitters. Wir haben daher in diesem Gitter einen neuen Gittertypus vor uns und bezeichnen es (ebenso wie seine Translationengruppe) durch Γ_v''' . Als primitives Tripel können wir irgend drei der vier Translationen MO , MA , MB , MC wählen; ihre Werte sind nach Kap. VIII, § 10

$$\begin{aligned}
 2\tau_d &= \tau_x + \tau_y + \tau_z \\
 2\tau_d' &= -\tau_x + \tau_y + \tau_z \\
 2\tau_d'' &= \tau_x - \tau_y + \tau_z \\
 2\tau_d''' &= \tau_x + \tau_y - \tau_z.
 \end{aligned}$$

Da die vier Strecken MO , MA , MB , MC die gleiche Länge haben, so ist die Stammfigur, die dieser Wahl des Tripels entspricht, ein *Rhomboeder*. Es stellen aber auch zwei von den drei Translationen $2\tau_x$, $2\tau_y$, $2\tau_z$ in Verbindung mit einer der vier vorstehenden Translationen ein primitives Tripel dar.

Die Gesamtsymmetrie, die den vier Gittern in bezug auf den Punkt O zukommt, wird durch die Gruppe V^h dargestellt. Sie heißen Gitter vom *rhombischen Typus*. Also folgt:

14. Es gibt vier Gitter vom rhombischen Typus; $\Gamma_v, \Gamma_v', \Gamma_v'', \Gamma_v'''$. Ihre Symmetrie ist durch die Gruppe V^h gekennzeichnet. Ihre primitiven Tripel können folgendermaßen gewählt werden:

$$\Gamma_v : 2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$$

$$\Gamma_v' : 2\tau' = \tau_x + \tau_y, 2\tau'' = \tau_x - \tau_y, 2\tau_s = 2\tau_z$$

$$\Gamma_v'' : 2\tau_g = \tau_x + \tau_y, 2\tau_h = \tau_x + \tau_z, 2\tau_k = \tau_y + \tau_z$$

Γ_v''' : drei der Translationen $2\tau_d, 2\tau_d', 2\tau_d'', 2\tau_d'''$ (Gl. 6) oder zwei der drei Translationen $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$ in Verbindung mit $2\tau_d$.

Aus Γ_v ergibt sich Γ_v' durch einfache Flächenzentrierung, Γ_v'' durch dreifache und Γ_v''' durch Körperzentrierung.

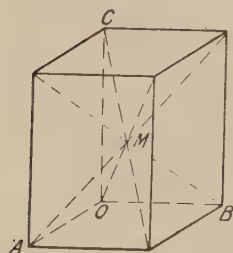


Fig. 69

Die Stammfiguren, die diesen Tripeln entsprechen, sind 1) ein rechtwinkliges Parallelepiped, 2) eine gerade rhombische Säule, 3) ein Parallelepiped, dessen Diagonalfächen Rhomben sind, 4) ein Rhomboeder.

§ 7. Die Gitter vom rhomboedrischen und hexagonalen Typus. Besitzt

das Gitter eine durch O gehende dreizählige Achse a (*Hauptachse*), so zeigt man zunächst wieder, daß sie Träger einer dem Gitter angehörigen Punktreihe ist. Ist nämlich OT , wie in Fig. 63¹⁾ (S. 157) eine Translation, die nicht in die Achse a fällt, und sind OT' und OT'' die beiden Translationen, die aus OT durch die Drehung $\mathfrak{A}$ hervorgehen, so ist auch die vektorielle Summe

$$2\tau = OT + OT' + OT''$$

eine Translation des Gitters. Sei nun S der Schnittpunkt der Ebene $TT'T''$ mit a , so bestehen die vektoriellen Gleichungen

¹⁾ Man hat jetzt $TT'T''$ als gleichseitiges Dreieck zu betrachten.

$$OT = OS + ST, \quad OT' = OS + ST', \quad OT'' = OS + ST'';$$

ferner hat man nach § 2

$$ST + ST' + ST'' = 0,$$

und es folgt daher

$$2\tau = 3OS + ST + ST' + ST'' = 3OS.$$

Mithin ist 2τ eine Translation, die in die Achse a fällt, womit die obige Behauptung erwiesen ist. Sei $2\tau_z = OZ$ wieder die zugehörige *primitive* Translation.

Die zur Achse a senkrechte Grundebene γ geht durch die Drehung $\mathfrak{A}$ in sich über; gemäß § 3 ist daher das in ihr liegende Netz gleichseitig. Bilden $2\tau_\lambda$ und $2\tau_\mu$ ein primitives Paar dieses Netzes, so ergibt sich das primitive Tripel des Gitters, wenn wir zu diesem Paar eine Translation OT hinzufügen, für die T einen kleinsten Abstand von der Grundebene γ hat. Analog zu § 5 haben wir wieder zwei Fälle zu berücksichtigen; entweder ist $2\tau_z = OZ$ selbst eine solche Translation, oder aber es gibt eine Translation, deren Endpunkt von γ kleineren Abstand hat als der Punkt Z .

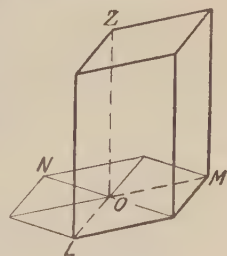


Fig. 70

Im ersten Fall stellt das Gitter eine Sonderart des in § 4 abgeleiteten ersten monoklinen Gittertypus Γ_m dar; die Sonderart besteht darin, daß das primitive Parallelogramm der Grundfläche γ in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt (Fig. 70). Als primitives Tripel können wir (§ 2) zwei der drei gleichlangen Translationen

$$7) \quad OL = 2\tau_\lambda, \quad OM = 2\tau_\mu, \quad ON = 2\tau_\nu \quad \text{und} \quad 2\tau_z$$

wählen. Wie wir in § 5 sahen, enthält *jede* durch die Hauptachse a gehende Ebene ein rechteckiges Netz. Die Hauptfolgerung, die wir zu ziehen haben, ist aber die, daß die Hauptachse von selbst *eine sechszählige Achse des Gitters* wird. Gemäß § 2 ist sie es nämlich zunächst für das in γ liegende Netz; weiter aber ist sie es auch für die Translation $2\tau_z$, die mit $2\tau_\lambda$ und $2\tau_\mu$ das primitive Tripel bildet. Sie ist es also

auch für die Translationengruppe und damit auch für das Gitter.

Die Stammfigur ist eine *gerade rhombische Säule*, deren Grundfläche in *zwei gleichseitige Dreiecke* zerfällt. Die horizontalen Netzebenen folgen daher im Abstand $2\tau_z$ aufeinander. Dem Gitter kommen auch zweizählige Achsen in der Grundebene γ zu. Seine Achsengruppe ist also D_6 ; seine Gesamtsymmetrie ist durch die Gruppe D_6^h gegeben. Es soll ein Gitter vom *hexagonalen* Typus heißen und (ebenso wie seine Translationengruppe) durch Γ_h bezeichnet werden.

Der zweite Fall ist der, daß es eine Translation OT gibt, deren Projektion auf a — sie sei wieder OS (Fig. 71) — kleiner ist als OZ . Es muß dann, wie wir in Kap. II, § 7 sahen, $3OS$ eine vertikale Translation, also ein Vielfaches von OZ sein; es gilt also zugleich

$$OZ > OS \text{ und } 3OS = mOZ.$$

Dem kann nur durch die Werte $m = 1$ und $m = 2$ genügt werden; also durch

$$OS = \frac{2}{3}\tau_z \text{ und } OS' = \frac{4}{3}\tau_z.$$

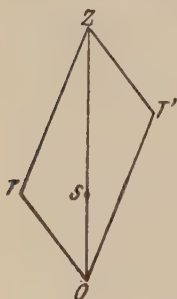


Fig. 71

Die diesen beiden Werten von m entsprechenden Translationen OT und OT' sind aber stets *zugleich* in der Gruppe vorhanden. Existiert nämlich die Translation OT , so existiert auch, wie Fig. 71 zeigt, die Translation ZT ; und existiert OT' , so existiert auch ZT' , und das bestätigt die Behauptung.

Wir wählen nun die Translation OT insbesondere so, daß sie einen *kleinsten* Winkel mit der Hauptachse a einschließt, und bezeichnen sie von nun an durch OL ; ferner seien OM und ON die aus ihr durch die Drehungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^2$ hervorgehenden Translationen. Wir setzen weiter

$$7) \quad 2\tau_l = OL, \quad 2\tau_m = OM, \quad 2\tau_n = ON.$$

Es bilden dann diese drei gleichlangen Translationen ein primitives Tripel; das durch sie bestimmte *regelmäßige Rhomboeder*

stellt die Stammfigur des Gitters dar¹⁾. In der Tat kann nach der über OL getroffenen Festsetzung (kleinster Abstand von γ und kleinster Winkel mit a ein Gitterpunkt weder im Innern noch auf dem Umfang dieses Rhomboeders liegen. Es bilden daher auch zwei dieser Translationen mit $2\tau_x$ ein primitives Tripel. Die zur Grundfläche parallelen Gitterebenen folgen im Abstand von $\frac{2}{3}\tau_x$ aufeinander. Jede enthält ein gleichseitiges Netz. Ein primitives Paar von Translationen dieses Netzes bilden zwei der Translationen

$$2\tau_\lambda = MN, 2\tau_\mu = NL, 2\tau_\nu = LN; 2\tau_\lambda + 2\tau_\mu + 2\tau_\nu = 0;$$

in der Tat enthält das Dreieck LMN im Innern und auf dem Umfang keinen weiteren Gitterpunkt. Das primitive Paar dieses Netzes bildet jedoch mit $2\tau_x$ kein primitives Tripel des Gitters. Die Netze in den durch die Hauptachse gehenden Ebenen sind ohne besonderen Symmetriecharakter, wie auch die Figur erkennen läßt²⁾.

Die Gesamtsymmetrie des Gitters ergibt sich leicht in der Weise, daß wir an das Rhomboeder als Stammfigur anknüpfen. Ihm kommen die drei Symmetrieebenen zu, die durch die Hauptachse, sowie je eine seiner Kanten OL , OM , ON hindurchgehen; sie kommen also auch dem Gitter zu. Da das Gitter in O ein Inversionszentrum besitzt, so bedingen sie auch drei auf ihnen senkrechte, in der Grundebene γ liegende zweizählige Achsen. Die Achsengruppe ist daher D_3 . Eine zur Achse a senkrechte Symmetrieebene kommt dem Gitter nicht zu. Die Symmetriegruppe des Gitters ist daher D_3^d . Das Gitter (und seine Translationengruppe) heißt vom *rhomboedriscen* Typus, und werde durch Γ_{rh} bezeichnet. Wir erhalten also insgesamt:

15. Es gibt ein Gitter Γ_{rh} mit dreizähliger Hauptachse und der Symmetriegruppe D_3^d . Es heißt *rhomboedrisches Gitter*.

¹⁾ Vgl. Fig. 92 in § 14. Die dortigen Punkte L_1, M_1, N_1 entsprechen den obigen Punkten L, M, N .

²⁾ Es ist leicht zu sehen, daß jede dieser Netzebenen auch Rechtecke enthält, deren Ecken Gitterpunkte sind. Vgl. die Anmerkung zu S. 150.

Ein primitives Tripel wird durch die Translationen

$$2\tau_i, 2\tau_m, 2\tau_n$$

oder durch zwei von ihnen in Verbindung mit $2\tau_z$ dargestellt.
Die Stammfigur ist ein regelmäßiges Rhomboeder.

16. *Es gibt ein Gitter Γ_h mit sechszähliger Hauptachse und der Symmetriegruppe D_6^h . Es heißt hexagonales Gitter. Zwei der Translationen*

$$2\tau_\lambda, 2\tau_\mu, 2\tau_\nu; 2\tau_\lambda + 2\tau_\mu + 2\tau_\nu = 0$$

im Verein mit $2\tau_z$ bilden ein primitives Tripel¹⁾. Die Stammfigur ist eine gerade rhombische Säule, deren Grundfläche aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht.

§ 8. Die Gitter vom tetragonalen Typus. Eine durch O gehende vierzählige Hauptachse bewirkt, daß das Netz in der Grundebene γ quadratisch ist. Es werden also τ_x und τ_y von gleicher Länge. Eine vierzählige Hauptachse ist zugleich auch zweizählig; dies bewirkt, daß die hier möglichen Gitterarten sich durch Spezialisierung der rhombischen Gitter von § 6 ergeben müssen, und zwar in der Weise, daß das rechteckige Netz der Grundebene durch ein quadratisches ersetzt wird²⁾. Wir erhalten aber *nur zwei* verschiedene Gittertypen; die Gitter Γ_v und Γ_v' , wie auch die Gitter Γ_v'' und Γ_v''' sind in dem hier betrachteten Fall als identisch anzusehen. Beim quadratischen Netz sind nämlich die Seiten und Diagonalen gruppentheoretisch gleichwertig; in beide fällt je eine zweizählige Achse, während dies beim rechtwinkligen Netz nur für die Seiten der Rechtecke der Fall ist. Es verliert also die Unterscheidung zwischen den Seiten und Diagonalen der Rechtecke, und damit auch die Unterscheidung des rhombischen und rechteckigen Charakters der Grundebene hier ihren Inhalt. Sowohl die Gitter Γ_v und Γ_v' , wie auch Γ_v'' und Γ_v''' unterscheiden

¹⁾ Da wir die obigen zwei Gitter als die allein möglichen abgeleitet haben, so folgt, was ausdrücklich bemerkt sei, daß durch Zentrierung *keine neuen Gattungen* von Gittern entstehen. Vgl. auch S. 149.

²⁾ Vgl. Figur 66 und 69, wo $OA = OB$ anzunehmen ist.

sich aber gerade in der Weise, daß bei dem einen für die Seiten der Rechtecke gilt, was beim andern für die Diagonalen erfüllt ist, und damit ist die Behauptung erwiesen. Wir bezeichnen die beiden Gitter (und ihre Translationengruppen) als solche vom *tetragonalen* Typus und nennen sie Γ_q und Γ_q' , und zwar soll Γ_q' aus Γ_q durch Körperzentrierung hervorgehen. Die Achsengruppe der Gitter ist D_4 ; für ihre Symmetriegruppe ergibt sich also die Gruppe D_4^h .

Das eben erörterte hier eintretende Zusammenfallen der Gitter Γ_q'' und Γ_q''' von § 5 schließt übrigens nicht aus, daß das Gitter Γ_q' auch durch Flächenzentrierung aus einem Ausgangsgitter entstehen kann; allerdings *nicht aus dem Gitter Γ_q* . Geht man vom Gitter Γ_q aus, so ist offenbar nur Körperzentrierung möglich. Die Flächenzentrierung müßte auch in γ vorgenommen werden, und dies ist, da für das Netz in γ gemäß § 2 die *kleinsten* primitiven Translationen als Quadratseiten gewählt wurden, nicht angängig¹⁾. Um das Gitter Γ_q' als flächenzentriert aufzufassen, können wir folgendermaßen verfahren. Setzen

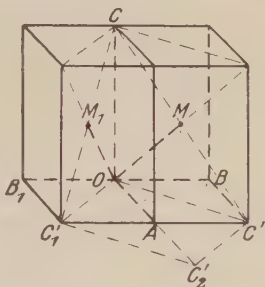


Fig. 72

wir an die Stammfigur $\Pi_o = OABC$ des Gitters (Fig. 72) noch die quadratische Säule mit der Grundfläche OAB_1C_1' an, so stellen offenbar auch die drei Translationen OA , OM , OM_1 ein primitives Tripel dar (das durch sie gebildete Tetraeder enthält keine weiteren Gitterpunkte) und dieses Tripel ergibt sich durch Flächenzentrierung desjenigen tetragonalen Gitters, dessen Stammfigur Π_o' die quadratische Säule mit den drei Kanten OC' , OC_1' und OC ist. Insbesondere ist also das Quadrat $OC'C_1'C_2'$ die Stammfigur der horizontalen Netzebene für diese Zentrierung. Auch diese Auffassung des Gitters Γ_q' ist also zulässig. Zu beachten ist noch, daß für die erste Auffassung OA und OB , für die zweite OC' und OC_1' die Translationenrichtungen τ_x

¹⁾ Dies schließt auch die einfache Flächenzentrierung von Γ_q aus.

und τ_y des quadratischen Ausgangsnetzes darstellen. Es ist zweckmäßig, beide Auffassungen des Gitters Γ'_q beizubehalten; wir können demnach sagen:

16. *Es gibt zwei Gitter vom tetragonalen Typus; Γ_q und Γ'_q . Ihre Symmetriegruppe ist D_4^h . Ihre primitiven Tripel sind*

$$\Gamma_q: 2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z.$$

$$\Gamma'_q: 2\tau_g = \tau_x + \tau_y, 2\tau_h = \tau_x + \tau_z, 2\tau_k = \tau_y + \tau_z;$$

oder drei der vier Translationen $2\tau_a, 2\tau_a', 2\tau_a'', 2\tau_a'''$ oder auch zwei von ihnen, in Verbindung mit $2\tau_z$.

Das zweite Gitter entsteht aus dem ersten durch Körperzentrierung oder auch durch Flächenzentrierung.

Die Abstände der parallelen Netzebenen sind beim ersten Gitter $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$, beim zweiten τ_x, τ_y, τ_z .

§ 9. Die Gitter vom kubischen Typus. Es sind noch die Gitter aufzuzählen, deren Achsengruppe die Tetraedergruppe T oder die Oktaedergruppe O ist. Nun bedingt aber, wie in § 6 gezeigt wurde, die Existenz einer dreizähligen Achse a auch die Existenz von zweizähligen Achsen senkrecht zu a , und daraus folgt, daß wir nur die Oktaedergruppe O in Betracht zu ziehen haben. Das in O vorhandene Inversionszentrum bewirkt wieder, daß die Gesamtsymmetrie durch die Gruppe O^h dargestellt ist.

Da Tetraedergruppe und Oktaedergruppe die Vierergruppe V als Untergruppe enthalten, so stellen die hier abzuleitenden Gitter je einen Sonderfall der Gitter von § 5 dar; sie entstehen aus den rhombischen Gittern, wenn die Translationen $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$ gleiche Länge haben.

Von den vier Gittern in § 5 fällt aber eines weg, nämlich das Gitter Γ_v' , das durch Zentrierung nur einer Fläche (der Grundfläche) entsteht; da hier alle Seitenflächen gruppentheoretisch gleichwertig sind, ist es ausgeschlossen. Wir bezeichnen die Gitter (und ihre Translationengruppen) durch $\Gamma_c, \Gamma_c', \Gamma_c''$ und nennen sie Gitter vom *kubischen* Typus. Sie sind durch das vorstehende vollständig in ihrer Eigenart charak-

terisiert; wir haben nur die Resultate von § 5 zu übertragen. Also folgt:

17. Es gibt drei Gitter vom kubischen Typus; Γ_c , Γ_c' , Γ_c'' . Ihre Symmetriegruppe ist O^h . Ihre Translationengruppen sind:

$$\Gamma_c : 2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z.$$

$$\Gamma_c' : 2\tau_g = \tau_x + \tau_y, 2\tau_h = \tau_x + \tau_z, 2\tau_k = \tau_y + \tau_z.$$

$$\Gamma_c'' : \text{Drei der Translationen } 2\tau_a, 2\tau_a', 2\tau_a'', 2\tau_a'''$$

oder auch zwei der Translationen $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$ in Verbindung mit $2\tau_a$.

Die Gitter Γ_c' und Γ_c'' gehen durch Flächenzentrierung und Körperzentrierung aus Γ_c hervor.

Ihre Stammfiguren sind: Für Γ_c ein Würfel; für Γ_c' ein Rhomboeder, dessen Kantenrichtungen den drei Kanten eines gleichseitigen Tetraeders entsprechen; für Γ_c'' ein Rhomboeder, dessen Kanten den drei Diagonalrichtungen eines Würfels und damit zugleich den drei Eckkanten eines Rhombendodekaeders entsprechen.

Die Abstände der den Würfelflächen parallelen Netzebenen sind beim ersten Gitter $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$, beim zweiten und dritten τ_x, τ_y, τ_z .

Wir erhalten also insgesamt sieben verschiedene Gattungen von Gittern; triklone, monokline, rhombische, rhomboedrische, tetragonale, hexagonale und kubische. Jedes ist im Sinn von § 2 von einer Anzahl von Parametern abhängig. Das triklone von fünf (z. B. drei Strecken und zwei Winkeln), das monokline von vier (z. B. Dreieck der Grundfläche und Höhe), das rhomboedrische und rhombische von drei, das tetragonale und hexagonale von zwei, das kubische von einem.

Die erste Untersuchung über die Symmetrieverhältnisse der Raumgitter stammt von Frankenheim¹⁾. Sie leidet jedoch an einem Versehen; Frankenheim hatte nicht erkannt, daß die in § 5 aufgestellten Gitter 1) und 2) des monoklinen Typus als identisch zu betrachten sind. Die erste fehlerfreie Ableitung

¹⁾ Die Lehre von der Cohäsion, Breslau 1835, S. 311 und 312, sowie System der Crystalle, Nova Acta Acad. Leopold. 1842, Bd. 29, S. 483.

aller symmetrischen Raumgitter ist von Bravais in ebenso eleganter wie einfacher Darstellung gegeben worden ¹⁾).

§ 10. **Ein Satz über die Symmetrieachsen und Symmetrieebenen der Punktgitter.** Wir haben die Symmetrie der einzelnen Gitter vorstehend in der Weise beschrieben, daß wir für jedes von ihnen neben der Translationengruppe die Symmetriegruppe G_p angegeben haben, die einem einzelnen Gitterpunkt zukommt. Ein Gitter besitzt aber eine ganze Schaar von Achsen und Symmetrieebenen jeder Art, und deren Lage und Anordnung zu kennen tut uns gleichfalls not. Dieser Aufgabe wollen wir uns jetzt zuwenden. Als Grundlage der Betrachtung stellen wir die gleichen Überlegungen voran, auf die wir die analoge Untersuchung für die Punktnetze gestützt haben.

Sei also $\mathfrak{L}$ eine Deckoperation des Gitters, die den Punkt O nicht festläßt und die keine Translation ist; durch sie gelange der Punkt O in einen Gitterpunkt P . Ist dann $\mathfrak{T}$ die Translation, die P nach O bringt, so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}$ eine Deckoperation, die O festläßt, also eine Operation der Symmetriegruppe G_p . Ist sie $\mathfrak{G}$, so haben wir

$$\mathfrak{L}\mathfrak{T} = \mathfrak{G}; \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{G}\mathfrak{T}^{-1},$$

wo auch $\mathfrak{T}^{-1}$ eine Translation der dem Gitter zugehörigen Gruppe Γ_r ist; d. h.

18. *Jede Deckoperation $\mathfrak{L}$ des Gitters ist das Produkt aus einer Operation seiner Symmetriegruppe G_p und einer seiner Translationen.*

Damit sind die sämtlichen Deckoperationen eines Gitters gekennzeichnet, und ein Weg zu ihrer Bestimmung vorhanden. Wir haben weiter nichts zu tun, als die Formeln von Kap. III und IV auf jedes einzelne Gitter und sein primitives Tripel anzuwenden.

§ 11. **Anlage und Bezeichnung der Figuren.** Die Symmetrieachsen und Symmetrieebenen, die den einzelnen Gittern eigen sind, bilden die notwendige und hinreichende Grundlage für die Bestimmung der Achsenfiguren aller später abzuleiten-

¹⁾ Mémoire sur les systèmes formés par des points etc. Journ. de l'école polyt. Bd. 19. Heft 33. Paris 1850. S. 1.

den Raumgruppen. Deshalb sollen sie hier eingehend erörtert werden. Besonders ausführlich werden wir die Gitter vom monoklinen, rhombischen und rhomboedriscen Typus behandeln; die Eigenschaften der tetragonalen, hexagonalen und kubischen Gitter werden wir als Sonderfälle von ihnen erkennen. Um die Einheitlichkeit aller dieser Eigenschaften durchsichtig zu machen, sind die Figuren nach einheitlichen Regeln gezeichnet worden; auch die Buchstaben, die zur Bezeichnung der Punkte, Achsen und Ebenen verwendet worden sind, konnten — abgesehen vom rhomboedriscen und hexagonalen Typus, die eine gesonderte Bezeichnung erhalten haben — einheitlich gewählt werden¹⁾.

Die primitiven Translationen der unzentrierten Stammfigur sind: OA , OB , OC ; die Mitten ihrer Seiten: D , E , F ; die Flächenmitten: G , H , K ; die Körpermitte: M . Dazu fügen wir noch: D_m , E_m , F_m , G_m , H_m , K_m , M_m als Mitten der Strecken OD , OE , OF , OG , OH , OK , OM ; endlich sollen M'_m und M''_m die Mitten von OM_m und M_mM sein. Die Gegenecken von O , A , B , C sind O' , A' , B' , C' . Es wird im allgemeinen genügen, den durch OD , OE , OF bestimmten Oktanten der Stammfigur Π_0 in Betracht zu ziehen; wir bezeichnen ihn durch p . Seine Kanten haben die Länge τ_1 , τ_2 , τ_3 ; seine durch O gehenden Seitenflächen sind α , β , γ , zu ihnen fügen wir noch die zu ihnen parallelen Mittelebenen $\lambda \parallel \alpha$, $\mu \parallel \beta$, $\nu \parallel \gamma$, die durch die Mitte von p gehen.

Für die in den Figuren darzustellenden Achsen, Ebenen usw. gilt folgendes: Schraubenachsen sind durch Strichelung kenntlich gemacht. Treten in derselben Figur rechte und linke Schraubenachsen zugleich auf, so sind sie mit entgegengesetzten Pfeilen versehen. Die mit gleichen Buchstaben versehenen Achsen sind gleichwertig, d. h. sie kommen durch die Deckoperationen des Gitters miteinander zur Deckung; verschiedene Buchstaben a , b , c . . . bedeuten also, daß die mit ihnen bezeichneten Achsen für das Gitter nicht gleichwertig sind. Die Zähligkeit der *nicht zweizähligen* Achsen ist aus den Ziffern zu

¹⁾ Vgl. z. B. Fig. 73, 74, 75 (S. 177). Ein Teil dieser Bezeichnungen tritt schon in den früheren Figuren auf; vgl. z. B. Fig. 53, 54 (S. 141).

erkennen. Von den spiegelnden Ebenen sind die mit Gleit-
spiegelung mit einem Pfeil versehen, der die Richtung der
Translationskomponente angibt. Als reine Symmetrieebenen
treten hier nur die oben genannten Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ auf;
sie sind eventuell durch Einfügen dieser Buchstaben als Sym-
metrieebenen kenntlich gemacht und können überdies auch aus
den Angaben über die Figur leicht entnommen werden. Das
gleiche gilt von den Symmetriezentren, die in die Ecken des Ok-
tanten p fallen; solche, die in andere Punkte fallen, sind durch
einen kleinen Kreis angedeutet. Für ihre Gesamtverteilung ist
stets Satz 16 von Kap. VIII zu beachten. Hilfslinien, die aus
der Eigenart der Figur nicht unmittelbar als Hilfslinien kennt-
lich sind, sind meist durch schwach gezeichnete Geraden dar-
gestellt. Ausdrücklich sei nochbemerkt, daß die Stärke der
Linien auch durch Deutlichkeitszwecke bedingt ist.

§ 12. Die Achsen und Symmetrieebenen für die mono-
klinen und rhombischen Gitter. Die Gitter vom monoklinen
Typus besitzen die Symmetriegruppe C_2^h ; es sind also nur
zweizählige, auf der horizontalen Ebene γ vertikale Achsen vor-
handen. Außerdem ist γ eine Symmetrieebene. Die Lage der
Achsen ergibt sich in *allen* Fällen unmittelbar aus den ein-
schlägigen Formeln 4) von Kap. III und IV, § 1; und zwar bedingt
eine zur Achse a senkrechte Translation oder Translationskompo-
nente eine (Drehungs- oder Schrauben-) Achse im halben Ab-
stand dieser Translation von a . Damit ist die Anordnung der
Achsen geklärt und in einfachster Weise bestimmbar.

Beim Gitter Γ_m sind (Fig. 64, S. 159)

$$OA = 2\tau_1, \quad OB = 2\tau_2, \quad OC = 2\tau_z$$

die primitiven Translationen des Tripels, also folgt sofort
(Fig. 73):

19. Die Achsen des monoklinen Gitters Γ_m sind sämtlich
Drehungsachsen. Sie gehen durch die Ecken, die Kantenmitten
und die Flächenmitte der Stammfigur π_o ¹⁾.

¹⁾ Die Punkte F, H, K, M der Figuren 73, 74, 75 kommen später
in Betracht.

Die Translation $2\tau_3$. OM fällt also in die *Diagonalebene* der Stammfigur von Γ_m ; das Gitter Γ'_m ist also körperzentriert. Dann ist zunächst klar, daß als Drehungsachsen dieselben Geraden auftreten, wie beim Gitter Γ_m . Weiter liefert jetzt das Produkt aus $\mathfrak{A}(\pi)$ und der Translation $2\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_z$ nach Kap. IV, § 1 eine Schraubung

$$\mathfrak{B}(\pi, \tau_z),$$

deren Lage durch die Komponente $\tau_1 + \tau_2$ von $2\tau_3$ bestimmt ist. Da (Fig. 74) $OG = \tau_1 + \tau_2$ ist, so trifft ihre Achse die Mitte G_m dieser halben Flächendiagonale. Es sind daher die Mitten der vier halben Flächendiagonalen von $OABC'$ Fußpunkte der Schraubenachsen. In diesem Fall kann mithin das Fußpunktenetz in folgender Weise beschrieben werden. Wir gehen aus von dem primitiven Paar $2\tau_1, 2\tau_2$ der Ebene γ ; genau wie vorher bilden dann die Fußpunkte der Drehungsachsen ein Netz mit den Translationen τ_1 und τ_2 . Seine Stammfigur π_0 ist das Parallelogramm $ODGE$, und das Zentrum G_m dieses Parallelogramms ist Fußpunkt einer Schraubenachse. Für diese (erste) Auffassung des Gitters Γ'_m folgt also

20. Wählt man $2\tau_1, 2\tau_2$ und $2\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_z$ als primitives Tripel des Gitters Γ'_m , so bilden die Drehungsachsen und die Schraubenachsen in der Ebene γ je ein Fußpunktenetz mit den Translationen τ_1 und τ_2 als primitivem Paar; ihre Gesamtheit bildet das zugehörige zentrierte Netz.

Wir wählen das primitive Tripel jetzt in der Form¹⁾

$$OA = 2\tau_1, \quad OB = 2\tau_2, \quad OH = 2\tau_3 = \tau_1 + \tau_z;$$

es fällt also die Translation $2\tau_3$ in eine Seitenfläche der Stammfigur von Γ_m und das Gitter Γ'_m erscheint als einfach flächenzentriert. Dann ändert sich gegen den vorstehenden Sachverhalt nur, daß die Schraubenachse, die durch die Translation $\tau_1 + \tau_z$ bedingt wird, in die Ebene α fällt und durch die Mitte D_m von OD geht; ebenso geht auch eine durch die Mitte der Seite EG (Fig. 75). Wir sehen also, daß das Fußpunktenetz der Schraubenachsen durch die Kap. VIII, § 10 genannte *Seiten-*

¹⁾ Vgl. wieder Figur 65, wo jetzt T durch H zu ersetzen ist.

zentrierung aus dem Netz der Drehungsachsen hervorgeht. Jedes dieser beiden Netze hat jetzt die Translationen τ_1 , τ_2 als primitives Paar, und beide zusammen bilden ein seitenzentriertes Netz, dessen Ausgangsnetz das primitive Paar τ_1 , τ_2 besitzt. Dagegen kann die Seitenfläche β keine Schraubenachsen enthalten; denn eine Translation $\tau_2 + \tau_z$ ist im Gitter nicht vorhanden. Also folgt für diese zweite Auffassung von Γ_m' :

21. Wählt man $2\tau_1$, $2\tau_2$ und $2\tau_3 = \tau_1 + \tau_z$ als primitives Tripel des Gitters Γ_m' , so bilden die Drehungsachsen und die Schraubenachsen in der Ebene γ je ein Fußpunktenetz mit den Translationen τ_1 , τ_2 als primitivem Paar; ihre

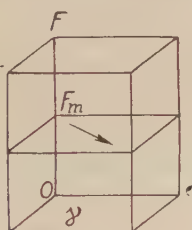


Fig. 76

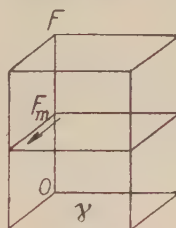


Fig. 76a

Gesamtheit bildet im Sinn von Kap. VIII, § 10 ein seitenzentriertes Netz, also ein Netz mit dem primitiven Paar $\frac{1}{2}\tau_1$, τ_2 ¹⁾.

Wir gehen endlich zu den Symmetrieebenen des Gitters über. Ihre Anordnung regelt sich nach dem Satz 4 von Kap. IV. Nach ihm treten außer den Symmetrieebenen, die wir für das Gitter vom Typus Γ_m fanden, jetzt auch Gleitspiegelungen auf. Wir legen zunächst die erste Auffassung des Gitters zu Grunde und entnehmen der Formel 8a (Kap. IV) unmittelbar, daß es Gleitspiegelungen der Form

$$\mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2)$$

sind, an einer Ebene, die von der Ebene γ den Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ besitzt. Bei der zweiten Auffassung sind es Gleitspiegelungen

¹⁾ Ausdrücklich sei bemerkt, daß die Achsengesamtheit die gleiche bleibt; nur ihre Lage zu den primitiven Translationen (also auch das Fußpunktenetz) ist in beiden Fällen eine andere.

der Form $\mathfrak{S}_h(\tau_1)$. Es folgen also die reinen Symmetrieebenen und die Ebenen gleitender Symmetrie abwechselnd im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ aufeinander (Fig. 76 und 76a).

Die rhombischen Gitter besitzen die Symmetriegruppe V^h . Vier Gattungen von Gittern sind zu unterscheiden, Γ_v , Γ_v' , Γ_v'' , Γ_v''' . Da alle ihre Achsen zweizählig sind, so gilt für jede Achsenrichtung das gleiche, was wir soeben für die vertikalen Achsen der monoklinen Gitter abgeleitet haben. Wir können also die dort gefundenen Resultate unmittelbar anwenden und haben nur zu überlegen, ob für die einzelnen Achsenrichtungen die Eigenschaften des Gitters Γ_m oder Γ_m' zutreffen.

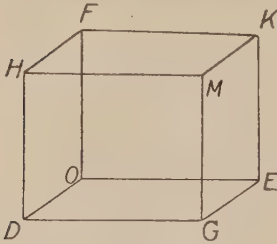


Fig. 77

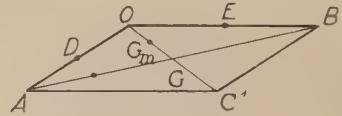


Fig. 78

Bei den Gittern vom Typus Γ_v bilden $2\tau_x$, $2\tau_y$, $2\tau_z$ das primitive Tripel; daher stellt das Gitter für jede Achsenrichtung einen Sonderfall des monoklinen Gitters Γ_m dar. Für jede Ebene gehen also die zu ihr senkrechten Achsen nur durch die Ecken, Kantenmitten und Flächenmitten der bezüglichen Stammfiguren. Alle Achsen sind Drehungsachsen. Das Fußpunktenetz ist in jeder der drei Ebenen ein rechtwinkliges Netz (Fig. 77) mit den Translationen τ_x , τ_y , τ_z ¹⁾.

Bei den Gittern vom Typus Γ_v' bilden

$$2\tau' = \tau_x + \tau_y, \quad 2\tau'' = \tau_x - \tau_y, \quad 2\tau_z$$

das primitive Tripel. Es hat (Fig. 78) bezüglich der Ebene γ den Charakter des Gitters Γ_m , mit $OG = 2\tau'$ und $GA = 2\tau''$ als primitivem Paar. Die zur Ebene γ senkrechten Achsen sind also sämtlich Drehungsachsen; das Fußpunktenetz hat den

¹⁾ Die Figur enthält nur einen einzelnen Oktanten von Π_0 .

Rhombus mit den Translationen $OG_m = \tau'$ und $G_mD = \tau''$ als Stammfigur (Fig. 79). Anders ist es für die Ebenen α und β . Um auf sie die Eigenschaften der monoklinen Gitter in richtiger Weise zu übertragen, haben wir diese Ebenen als Grundflächen der Stammfigur Π_0 anzusehen. Die Ebene γ ist dann in beiden Fällen eine Seitenfläche der Stammfigur, und die in ihr enthaltene Translation OG bedingt, daß wir in beiden Fällen ein Gitter Γ_m' vor uns haben, und zwar in der *zweiten* Auffassung. Sein Fußpunktenetz in den Ebenen α und β ist also (Satz 21) für die Drehungsachsen, wie für die Schraubenachsen je ein rechtwinkliges Netz mit den Translationen τ_x, τ_z und τ_y, τ_z ; die Stammfigur der Drehungsachsen in der Ebene α ist das Rechteck $ODHF$, die in β das Rechteck $OEKF$. Die *sämtlichen* Fußpunkte bilden daher im Sinne von Kap. VIII, § 10 in α und β je ein *seitenzentriertes* rechtwinkliges Netz, wie es Fig. 79 zeigt. Die Fußpunkte der Schraubenachsen gehen in der Ebene α durch die Mitten von OD und FH , in β durch die Mitten von OE und FK .

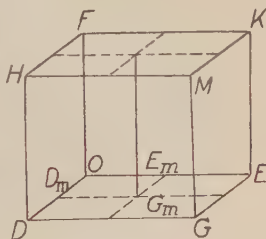


Fig. 79

Bei den Gittern vom Typus Γ_v'' ist

$$2\tau_g = \tau_x + \tau_y, \quad 2\tau_h = \tau_x + \tau_z, \quad 2\tau_k = \tau_y + \tau_z$$

das primitive Tripel. Es hat für jede der drei Richtungen den Charakter des Gitters Γ_m' . Um ihn näher zu erkennen, Verfahren wir am einfachsten so, daß wir die neuen Achsen, die sich beim Übergang von Γ_v zu Γ_v' einstellen, für *jede* der drei Richtungen in die Achsenfigur 77 von Γ_v eintragen. Dies liefert die in Fig. 80 gezeichnete Anordnung. Sie ergibt unmittelbar das folgende Resultat: Das Fußpunktenetz der Ebene γ ist für jede der beiden Achsenarten ein rhombisches Netz mit den Translationen τ_g, τ_g' ¹⁾; für beide zusammen ein zentriertes rhombisches Netz. Analog ist es für die Ebenen α und β , so daß sich die Figur 80 als Gesamtfigur ergibt. Die Achsenfigur wird

¹⁾ Es ist $2\tau_g' = \tau_x - \tau_y$; vgl. S. 164, Anm. 1.

zweckmäßig noch für einen einzelnen Oktanten von Fig. 80 dargestellt; sie ist die Figur 80a.

Beim Gitter Γ_v''' bildet die Translation

$$2\tau_d = \tau_x + \tau_y + \tau_z$$

mit je zweien der drei Translationen $2\tau_x$, $2\tau_y$, $2\tau_z$ ein primitives Tripel; das Gitter hat daher für jede der drei Ebenen den Charakter des Gitters Γ_m' , und zwar in der *ersten* Auffassung. Die Drehungsachsen sind daher für jede Ebene die-

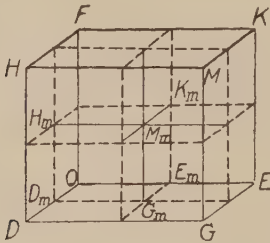


Fig. 80

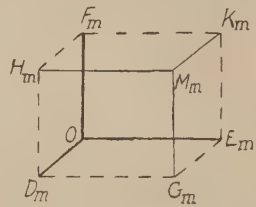


Fig. 80a

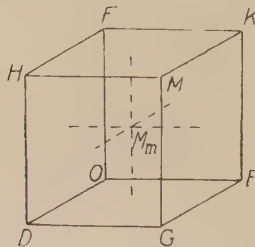


Fig. 81

selben, wie beim Gitter Γ_v' ; ihr Fußpunktenetz ist ein rechtwinkliges Netz mit den Translationen τ_x , τ_y , τ_z . Die Schraubenachsen bilden nach Satz 20 ebenfalls je ein rechtwinkliges Netz; die Gesamtheit *aller* Achsen bildet das zugehörige zentrierte rechtwinklige Netz (Fig. 81). Dies gilt für jede der drei Achsen-schaaren.

Insgesamt erhalten wir also das folgende Resultat:

22. 1) Beim Gitter Γ_v treten nur Drehungsachsen auf: ihr Fußpunktenetz ist in jeder der drei Ebenen α , β , γ recht-

winklig mit τ_x, τ_y, τ_z als primitiven Translationen. 2) Beim Gitter Γ_v' treten für die Ebene γ nur Drehungsachsen auf; ihr Fußpunktenetz ist rhombisch mit dem Translationenpaar τ', τ'' . Für α und β treten Drehungsachsen und Schraubenachsen auf, die zusammen je ein seitenzentriertes Fußpunktenetz bilden mit den Translationen $\frac{1}{2}\tau_x, \tau_z$ und $\frac{1}{2}\tau_y, \tau_z$. 3) Beim Gitter Γ_v'' bilden Drehungsachsen und Schraubenachsen in jeder Ebene ein zentriertes rhombisches, beim Gitter Γ_v''' je ein zentriertes rechtwinkliges Fußpunktenetz. Die Translationen des unzentrierten Netzes sind $\tau_g, \tau_g'; \tau_h, \tau_h'; \tau_k, \tau_k'$ für Γ_v'' und τ_x, τ_y, τ_z für Γ_v''' .

Auch die Lage der Spiegelungsebenen hängt davon ab, ob das Gitter für die einzelnen Richtungen den Charakter Γ_m oder Γ_m' besitzt. Ihre Lage kann aus den für Γ_m und Γ_m' abgeleiteten Ergebnissen unmittelbar entnommen werden. Wir erhalten demgemäß das folgende Resultat:

1) Das Gitter Γ_v hat für jede der drei Ebenen α, β, γ als Grundfläche den Charakter des Gitters Γ_m ; in ihm treten daher nur Symmetrieebenen auf. Sie folgen in den Abständen τ_x, τ_y, τ_z aufeinander; jede Fläche von Fig. 77 ist eine Symmetrieebene.

2) Das Gitter Γ_v' hat für die Ebene γ als Grundfläche den Charakter des Gitters Γ_m ; parallel zu γ besitzt es daher nur Symmetrieebenen und zwar in den Abständen τ_z . Für α und β als Grundfläche hat es den Charakter von Γ_m' (in zweiter Auffassung) mit den charakteristischen Translationen $\tau_y + \tau_z$ und $\tau_x + \tau_z$. Außer den Symmetrieebenen treten daher auch die Operationen

$$\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x) \text{ und } \mathfrak{S}_\mu(\tau_y)$$

an den Mittelebenen λ und μ auf. Die zu α und β parallelen Spiegelungsebenen folgen also in den Abständen $\frac{1}{2}\tau_y$ und $\frac{1}{2}\tau_x$ aufeinander (Fig. 82).

3) Das Gitter Γ_v'' hat für jede der drei Ebenen α, β, γ als Grundfläche den Charakter von Γ_m' . Dies bewirkt eine eigenartige Folgerung. Betrachten wir die zu γ parallelen

Ebenen. Durch Multiplikation mit $\tau_x + \tau_z$ und $\tau_y + \tau_z$ ergeben sich, wie oben für Γ_m' , die Gleitspiegelungen

$$\mathfrak{S}_\nu(\tau_x) \text{ und } \mathfrak{S}_\nu(\tau_y)$$

an derselben Mittelebene ν . Beide Operationen sind also an dieser Ebene zulässig¹⁾. Das gleiche gilt analog für die Ebenen λ und μ ; durch den Mittelpunkt M_m des aus τ_x, τ_y, τ_z gebildeten Oktanten p der Stammfigur H_0 gehen also (Fig. 83)²⁾ die Gleitspiegelungsebenen λ, μ, ν mit den Translationen

$$\tau_y \text{ oder } \tau_z, \tau_x \text{ oder } \tau_z, \tau_x \text{ oder } \tau_y^2).$$

4) Das Gitter Γ_v''' ist für jede der drei Flächen α, β, γ ein Gitter Γ_m' erster Auffassung. Durch den Mittelpunkt M_m des

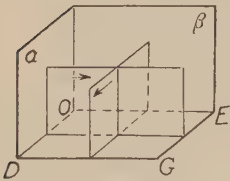


Fig. 82

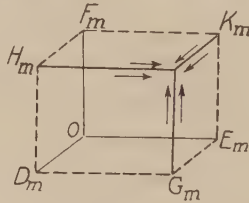


Fig. 83

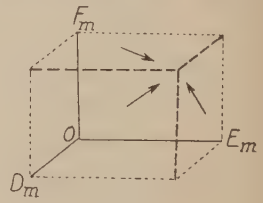


Fig. 84

Oktanten p gehen also wiederum die drei Gleitspiegelungsebenen λ, μ, ν (Fig. 84), und zwar diesmal mit den Operationen

$$\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z), \mathfrak{S}_\nu(\tau_x + \tau_y).$$

Bei den Gittern Γ_v'' und Γ_v''' folgen daher die spiegelnden Ebenen in den Abständen $\frac{1}{2} \tau_x, \frac{1}{2} \tau_y, \frac{1}{2} \tau_z$ aufeinander, und zwar abwechselnd Symmetrieebenen und Ebenen mit Gleitspiegelung.

§ 13. Die Achsen und Symmetrieebenen der tetragonalen und hexagonalen Gitter. Die Achsengruppe des tetragonalen Gitters ist D_4 , die des hexagonalen Gitters ist D_6 ; außer den zur Ebene γ senkrechten Hauptachsen haben

¹⁾ Dies ist übrigens auch eine Folge davon, daß $\tau_x + \tau_y$ eine Translation des Gitters ist.

²⁾ Die Figuren 83 und 84 stellen einen Teiloktanten des Oktanten p dar, so daß die Ebenen λ, μ, ν Seitenflächen von ihm sind.

wir also auch die zu γ parallelen Nebenachsen in Betracht zu ziehen. Wir beginnen mit den Hauptachsen. Um ihre Anordnung zu finden, haben wir wieder gemäß § 10 die in der Achsengruppe eines jeden Gitters enthaltenen Drehungen mit allen Translationen des Gitters zu multiplizieren. Es gibt zwei tetragonale Gitter Γ_q und Γ'_q und nur ein hexagonales Gitter Γ_h ; das tetragonale Gitter Γ_q und das hexagonale Gitter können wir gemeinsam behandeln. Ihre Translationentripel

$$2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z \text{ und } 2\tau_\lambda, 2\tau_\mu, 2\tau_\nu, 2\tau_z$$

haben den gleichen Charakter, wie die des monoklinen Gitters Γ_m , und daher ist die Verteilung der Hauptachsen nur von den Translationen abhängig, die in der Ebene γ liegen. Sie muß daher, wie unmittelbar folgt, dieselbe sein, wie beim quadratischen und gleichseitigen Punktnetz. Wir können daher von den Resultaten Gebrauch machen, die wir in § 3 abgeleitet haben, und finden so (Fig. 85):

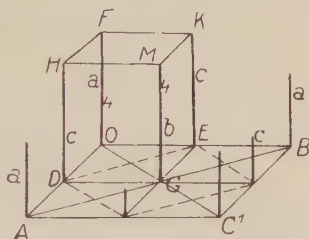


Fig. 85

23. Beim tetragonalen Gitter

vom Typus Γ_q sind sämtliche Hauptachsen Drehungsachsen: sie stimmen überein mit den vertikalen Achsen des quadratischen Netzes. Das Fußpunktnetz der vierzähligen Achsen ist ein quadratisches Netz mit den Translationen $OG = 2\tau'$ und $GA = 2\tau''$; die zweizähligen Achsen gehen durch die Zentra dieses Netzes. Das Gesamt-Fußpunktnetz ist also ein quadratisches Netz mit den Translationen τ_x und τ_y .

Da jede vierzählige Achse zugleich eine zweizählige ist, so können wir den Satz auch folgendermaßen auffassen. Das Fußpunktnetz aller Achsen (vierzählige und zweizählige) ist identisch mit dem Fußpunktnetz der Achsen des Gitters Γ_h ; der Satz 23 gibt insbesondere an, welche dieser Achsen zugleich vierzählig sind.

Für das hexagonale Gitter folgt gemäß § 3, Satz 9 unmittelbar (Fig. 86)¹⁾:

24. *Beim hexagonalen Gitter sind alle Hauptachsen Drehungsachsen: sie stimmen überein mit den vertikalen Achsen der gleichseitigen Netze. Die sechszähligen Achsen gehen durch die Ecken der Dreiecke, die dreizähligen durch ihre Mitten, die zweizähligen durch die Seitenmitten.*

Beim tetragonalen Gitter vom Typus I_q' wählen wir zunächst

$$2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_d = \tau_x + \tau_y + \tau_z$$

als das primitive Tripel, es stellt dann den quadratischen Sonder-

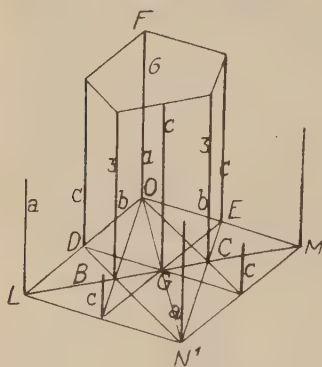


Fig. 86

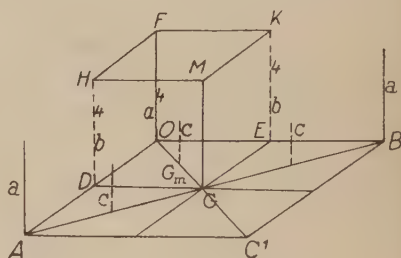


Fig. 87

fall des rhombischen Gitters I_v''' dar (Fig. 87). Nun beachte man wieder, daß eine jede vierzählige Achse zugleich eine zweizählige ist; die Gesamtheit *aller* Achsen (vierzählige *und* zweizählige) muß daher die gleiche sein, wie beim Gitter I_v''' . Das Fußpunktenetz *aller* Achsen ist daher (gemäß Satz 22) ein zentriertes quadratisches Netz mit den Translationen τ_x, τ_y , und es ist wieder zu prüfen, welche dieser Achsen zugleich vierzählig sind. Das Vorhandensein der Translationen $2\tau_x, 2\tau_y$ bedingt zunächst, daß als vierzählige Drehungsachsen die gleichen Achsen auftreten, wie beim vorigen Gitter; sie gehen also durch die

¹⁾ Um die Deutlichkeit zu heben, ist von der oberen Ebene nur ein Teil gezeichnet.

Ecken und die Mitten der Netzquadrate der Ebene γ . Zu ihnen kommen aber noch vierzählige Schraubenachsen. Wir erhalten eine, wenn wir das Produkt von $\mathfrak{A}(\pi/2)$ mit der Translation $\tau_x + \tau_y + \tau_z$ bilden. Es liefert Schraubungen

$$\mathfrak{B}(\pi/2, \tau_z),$$

deren Fußpunkte gemäß Kap. IV, § 1 in die Mitten D und E der Seiten OA und OB fallen. Das Fußpunktenetz der *sämtlichen* vierzähligen Achsen ist daher ein quadratisches Netz mit den Translationen τ_x, τ_y .

Die noch übrigen Achsen des Fußpunktenetzes, das dem Gitter I_v''' entspricht, sind die eigentlichen zweizähligen Achsen; es sind also diejenigen, die durch die Centra der Quadrate des eben genannten Netzes mit den Translationen τ_x, τ_y gehen. Sie gehen durch die Mitten (G_m und G_m' der halben Diagonalen der Stammfigur π_0 in der Ebene γ ; der Vergleich mit dem Gitter I_v''' zeigt also noch, daß alle diese Achsen Schraubenachsen sind. Man erkennt es auch noch daran, daß — wegen der Translationskomponente τ_z — auch die vierzähligen Schraubenachsen zweizählige *Drehungsachsen* darstellen, so daß in der Gesamtheit der vierzähligen Achsen zugleich die Gesamtheit der zweizähligen Drehungsachsen vorhanden ist. Also folgt:

25. *Beim tetragonalen Gitter vom Typus I_q' sind die vierzähligen Achsen teils Drehungsachsen, teils Schraubenachsen; die ihnen parallelen zweizähligen sind sämtlich Schraubenachsen. Die vierzähligen Achsen bilden ein quadratisches Fußpunktenetz mit den Translationen τ_x, τ_y , die zweizähligen gehen durch die Zentra dieser Quadrate.*

Wir wollen — mit Rücksicht auf spätere Anwendungen — die Achsenverteilung auch noch in der Weise schildern, daß wir das Gitter I_q' gemäß § 8 durch Flächenzentrierung entstehen lassen. Wir haben es dann als den quadratischen Sonderfall des rhombischen Gitters I_v'' anzusehen. Wie soeben, schließen wir zunächst wieder, daß die Fußpunkte *aller* Achsen (vierzählige und zweizählige) mit dem Fußpunktenetz des Gitters I_v'' identisch sein müssen; sie bilden also das zentrierte rhombische Netz, das durch Figur 80 dargestellt ist. Anderer-

seits muß aber auch das Fußpunktenetz mit dem vorstehend gefundenen Netz sachlich übereinstimmen; es muß sich offenbar aus ihm durch Vertauschung der Seiten und Diagonalen ergeben. In der Tat bedingen die Translationen $\tau_x + \tau_z$ und $\tau_y + \tau_z$ gemeinsam die Schraubung $\mathfrak{B}(\pi/2, \tau_z)$ mit dem Fußpunkt G . Wir finden so die in Figur 88 dargestellte Anordnung. Die vierzähligen Drehungsachsen treffen jetzt die Ecken des rechteckigen Netzes mit τ_x, τ_y als Translationen, die vierzähligen Schraubenachsen treffen die Flächenmitten dieses Netzes, so daß damit das rhombische Fußpunktenetz aller vierzähligen Achsen vorhanden ist, und die zweizähligen Schraubenachsen gehen durch die Zentra dieses Netzes, insbesondere durch die Mitten D_m und E_m der Rechteckseiten. Die Gesamtheit aller

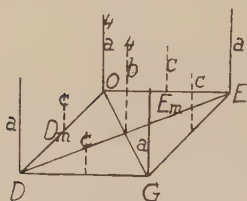


Fig. 88

Achsen bildet also ein Fußpunktenetz mit den Seiten $1/2 \tau_x, 1/2 \tau_y$, wie es Satz 23 verlangt. Also folgt:

25a. *Faßt man das Gitter Γ'_d als flächenzentriert auf, so bilden die vierzähligen Drehungsachsen ein quadratisches Netz mit den Translationen τ_x, τ_y , die vierzähligen Schraubenachsen gehen durch die Zentra dieses Netzes, und die zweizähligen Achsen durch die Zentra des von allen vierzähligen Achsen gebildeten Netzes.*

Es handelt sich zweitens um die zweizähligen Nebenachsen. Wir bestimmen sie einerseits für die horizontalen, andererseits für die vertikalen Ebenen, und zwar kommen nur solche vertikalen Ebenen in Frage, die durch eine in γ liegende zweizählige Achse hindurchgehen. Auch in bezug auf sie haben wir davon auszugehen, ob das Gitter vom Typus Γ_m oder Γ'_m ist.

Im ersten Fall haben wir einerseits die in der Ebene γ enthaltenen Translationen und andererseits die Translation $2\tau_z$ multiplikativ zu verwenden. Der erste Teil dieser Aufgabe ist wiederum in § 3 schon erledigt, insbesondere sei darauf hingewiesen, daß wie bei jedem rhombischen Netz, sowohl beim tetragonalen, wie beim hexagonalen Gitter in den horizontalen Netzebenen auch zweizählige Schraubenachsen auftreten; wie

es Figur 53 für das allgemeine rhombische Netz zeigt. Die Achsen in den vertikalen Ebenen erhalten wir folgendermaßen. Sei u irgendeine in der Ebene γ liegende Achse, so bedingt die Translation $2\tau_z$ eine zu u parallele Achse u' im Abstand τ_z von u . Dies gilt aber ebenso für eine in γ liegende Achse einer Umschraubung $U(\tau, t)$; auch für sie bedingt die Multiplikation mit $2\tau_z$ gemäß Kap. IV, (Gl. 3c) die gleiche Umschraubung im Abstand τ_z . In den vertikalen Ebenen sind also alle zweizähligen Achsen gleichartig und folgen im Abstand τ_z aufeinander. Also folgt bereits:

26. *Beim tetragonalen Gitter Γ_q und beim hexagonalen Gitter folgen die Ebenen der zweizähligen Nebenachsen im Abstand τ_z aufeinander. In ihnen allen haben die Nebenachsen die gleiche Anordnung, und zwar dieselbe, wie beim quadratischen und gleichseitigen Netz.*

Für das tetragonale Gitter Γ_q' stimmt das quadratische Netz der Ebene γ mit dem des Gitters Γ_q überein; daher ergeben sich für Γ_q' in der horizontalen Ebene γ dieselben Nebenachsen wie soeben. In Γ_q' sind außer

$2\tau_z$ auch die Translationen $2\tau_d = OM$, $2\tau_d' = AM$, $2\tau_d'' = BM$, $2\tau_d''' = C'M$ enthalten, und wir haben ihren Einfluß auf die Achsenverteilung in den vertikalen Ebenen festzustellen. Man betrachte z. B. die durch OC' gehende Ebene OMC' (Fig. 89). Die in ihr enthaltene Translation $OM = 2\tau_d$ bedingt mit der Achse OC' (Kap. IV, § 1) eine Umschraubungsachse durch die Mitte M_m von OM ; analog mit einer in γ enthaltenen Umschraubungsachse eine zu ihr parallele Drehungsachse. Alle diese Achsen erfüllen daher eine Ebene im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ von γ . Ihre Translationskomponenten müssen notwendig gleich der halben ihnen parallelen Translation sein; die genaue Lage läßt die Figur 89 erkennen. Es folgt mithin:

27. *Beim tetragonalen Gitter Γ_q' folgen die Ebenen der Nebenachsen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ aufeinander; je zwei Ebenen, die den Abstand τ_z besitzen, enthalten die gleichen Nebenachsen.*

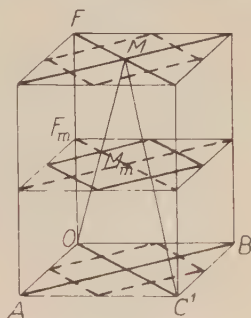


Fig. 89

Endlich haben wir noch die Symmetrieebenen anzugeben. Für die *horizontalen* Ebenen sind wiederum die Verhältnisse maßgebend, die bei den Gittern I'_m und $I'_{m'}$ obwalten. Wir erkennen sofort: 1. Beim tetragonalen Gitter I'_q und beim hexagonalen Gitter folgen die horizontalen Symmetrieebenen im Abstand τ_z aufeinander. 2) Beim Gitter $I'_{q'}$ treten auch noch Gleitspiegelungen $\mathfrak{S}_h(\tau_x + \tau_y)$ an den Ebenen auf, die im mittleren Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ zwischen ihnen liegen¹⁾. Für die *vertikalen* Ebenen ist ihre Sonderart und Verteilung ebenfalls leicht angebar; sie regelt sich nach den Resultaten von § 12, wo die

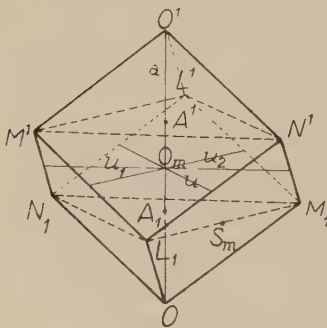


Fig. 90

analoge Frage für die rhombischen Gitter eingehend behandelt wurde. Danach können alle Operationen $\mathfrak{S}_v$ und $\mathfrak{S}_v(t)$ leicht bestimmt werden. Reine Spiegelungsebenen sind die Grundfläche, die Seitenflächen und die vertikalen Diagonalebenen der Stammfigur Π_0 .

§ 14. Die Achsen und Symmetrieebenen des rhomboedrischen Gitters. Die rhomboedrischen Gitter besitzen die

Achsengruppe D_3 und die Symmetriegruppe D_3^d . Ihre Stammfigur ist ein Rhomboeder. Wir geben zunächst, im Anschluß an das Rhomboeder, eine eingehendere Beschreibung des Gitters.

Die Diagonale OO' ist die dreizählige Achse a ; die von O und O' (Fig. 90) ausgehenden Kanten

$OL_1 = L'O' = 2\tau_l$, $OM_1 = M'O' = 2\tau_m$, $ON_1 = N'O' = 2\tau_n$ bilden ein primitives Tripel; ferner ist

$$OO' = 2\tau_l + 2\tau_m + 2\tau_n = 2\tau_z.$$

Die Punkte L_1, M_1, N_1 und L', M', N' bestimmen je eine Ebene γ_1 und γ' , die Netzebenen des Gitters sind und den Abstand $\frac{2}{3}\tau_z$ voneinander haben; die durch O gehende horizontale Netzebene sei wieder γ . In diesen Netzebenen sind

¹⁾ Wir beschränken uns hier auf die erste Auffassung.

$$\begin{aligned} M_1 N_1 &= M' N' = 2\tau_n - 2\tau_m = 2\tau_\lambda \\ N_1 L_1 &= N' L' = 2\tau_l - 2\tau_n = 2\tau_\mu \\ L_1 M_1 &= L' M' = 2\tau_m - 2\tau_l = 2\tau_\nu \end{aligned}$$

primitive Translationen, es stellen daher $L_1 M_1 N_1$ und $L' M' N'$ primitive Dreiecke in den Ebenen γ_1 und γ' vor. Die Netze in diesen Ebenen sind gleichseitig; durch jeden Mittelpunkt eines solchen Dreiecks geht daher (§ 3) eine dreizählige Achse. Eine solche ist z. B. $a = OO'$. Sind A_1 und A' die Schnittpunkte der Ebenen γ_1 und γ' mit $a = OO'$, so sind die Dreieckshöhen $A_1 L_1$, $A_1 M_1$, $A_1 N_1$ die Projektionen der Translationen $2\tau_l$, $2\tau_m$, $2\tau_n$ in γ_1 ; sie sind aber selbst *keine* Translationen des Gitters. Den in γ_1 und γ' enthaltenen gleichseitigen *Netzen* kommen auch noch zweizählige und sechszählige vertikale Achsen zu; dem *Gitter* gehören sie aber *nicht* an. Dem Gitter können nur solche Operationen angehören, die einer Drehung seiner Gruppe D_3 isomorph sind, und diese enthält nur eine dreizählige Hauptachse und zweizählige Nebenachsen.

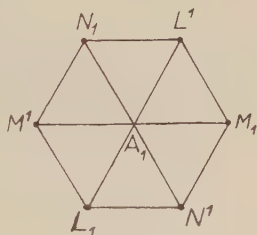


Fig. 91

Wir bestimmen zunächst die Hauptachsenschaaren des Gitters. Die dreizählige Achse $OO' = a$ ist Rhomboederdiagonale; jede vertikale Rhomboederdiagonale ist daher eine dreizählige Achse und durch jeden Gitterpunkt geht eine solche. Denken wir uns die von O und O' ausgehenden Translationen auf die Ebene γ_1 projiziert, so bilden sie zusammen die Ecken eines regulären Sechsecks; L_1, M_1, N_1 sind drei seiner Ecken, und L'_1, M'_1, N'_1 seien die drei andern. Das Fußpunktenetz der dreizähligen Drehungsachsen ist daher ein gleichseitiges Netz, dessen Translationen die Projektionen $A_1 L_1$, $A_1 M_1$, $A_1 N_1$ des primitiven Tripels $2\tau_l$, $2\tau_m$, $2\tau_n$ sind (Fig. 91).

Wir bestimmen nun noch die dreizähligen Schraubenachsen. Dazu haben wir die primitiven Translationen $2\tau_l$, $2\tau_m$, $2\tau_n$ multiplikativ mit der dreizähligen Achse a , d. h. mit den

Drehungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^2$ zu kombinieren. Wir zerlegen dazu $2\tau_l$ in die Komponenten (Fig. 92)

$$2\tau_l = OA_1 + A_1L_1 = \frac{2}{3}\tau_z + A_1L_1$$

und haben den Satz 1 von Kap. IV, § 1 anzuwenden. Wir finden so, wenn wir die Translation $2\tau_l$ durch $\mathfrak{T}_l$ bezeichnen und A_1L_1 durch $\mathfrak{T}_a$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\frac{2\pi}{3})\mathfrak{T}_l &= \mathfrak{A}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2}{3}\tau_z)\mathfrak{T}_a \\ &= \mathfrak{B}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2}{3}\tau_z),\end{aligned}$$

wo sich die Lage der Achse b gemäß Kap. III, § 1 bestimmt, und zwar bildet ihr Fußpunkt B_1 in γ_1 mit A_1 und L_1 ein

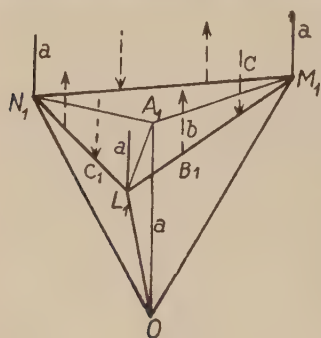


Fig. 92

gleichschenkliges Dreieck vom Basiswinkel 30° ; es liegt also B_1 auf der Geraden L_1M_1 . Analog hat man jetzt mit $\mathfrak{A}^2$ zu verfahren. Aber statt $\mathfrak{A}^2$ kann man auch die Drehung $\mathfrak{A}^{-1}$ benutzen, die zu $\mathfrak{A}^2$ äquivalent ist, und findet analog

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{T}_l &= \mathfrak{A}(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2}{3}\tau_z)\mathfrak{T}_a \\ &= \mathfrak{C}(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2}{3}\tau_z),\end{aligned}$$

und zwar fällt der Fußpunkt der Achse c so in einen Punkt C_1 ,

daß auch C_1 mit L_1A_1 ein solches gleichschenkliges Dreieck bildet; es liegt also C_1 auf der Geraden L_1N_1 . Wir sehen daraus, daß die dreizähligen Schraubenachsen durch je zwei Punkte der Seiten des Dreiecks $L_1M_1N_1$ gehen, und zwar so, daß sie jede Seite in drei gleiche Teile teilen. Die Gesamtheit der dreizähligen Achsen bildet daher im Sinn von § 3 ein doppelt-zentriertes gleichseitiges Netz, dessen primitives Tripel aus A_1L_1 , A_1M_1 , A_1N_1 besteht. Ausdrücklich sei noch bemerkt, daß die Schraubungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ entgegengesetzten Windungssinn haben. Also folgt:

28. Die Hauptachsen des rhomboedrigen Gitters sind teils Drehungsachsen, teils Schraubenachsen. Das Fußpunkte-netz der Schraubenachsen besteht aus den Ecken von gleich-

seitigen Sechsecken; deren Zentra sind die Fußpunkte der dreizähligen Drehungsachsen. Das Fußpunktenetz aller Achsen zusammen ist ein gleichseitiges doppeltzentriertes Punktnetz.

Endlich noch ein Hinweis auf die Bedeutung, die die Schraubungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ als Deckbewegungen des Gitters haben. Sechs solcher Schraubenachsen durchdringen das Rhomboeder. Andererseits hat das Rhomboeder sechs Flächen, und mit jeder Fläche grenzt es an ein benachbartes Rhomboeder an. Diese sechs Nachbarrhomboeder sind es, in die das Ausgangsrhomboeder H_0 durch die sechs Schraubungen übergeführt wird.

Der Symmetriegruppe D_3^d gehören noch drei zweizählige Nebenachsen und drei Symmetrieebenen an; eine horizontale Symmetrieebene ist in der Gruppe D_3^d nicht enthalten. Wir können daher unsere früheren Resultate hier nicht ausnutzen, müssen vielmehr direkt vorgehen. Es kann aber genügen, wenn wir uns hier wesentlich auf die Drehungsachsen und die reinen Symmetrieebenen beschränken, und auf die Schraubenachsen und Gleitspiegelungen nur in Kürze hinweisen.

Wir gehen dazu am besten von den Symmetrieverhältnissen der Stammfigur, also des Rhomboeders aus. Sein Inneres (Fig. 90) wird von drei Nebenachsen u, u_1, u_2 durchdrungen, die sich im Zentrum O_m des Rhomboeders schneiden; sie verbinden die Mitten je zweier Gegenkanten, und schneiden die Achse a senkrecht. Je drei ihnen parallele Achsen gehen auch durch O und O' , sowie durch jede Ecke und Mitte eines Rhomboeders. Die sich so einstellenden horizontalen Nebenachsebenen folgen daher im Abstand $\frac{1}{3}\tau_z$ aufeinander; *alle diese Ebenen enthalten dieselbe Achsenverteilung*. Dies ergibt sich leicht wie folgt. Wir gehen aus von der Ebene γ und den in ihr liegenden zweizähligen Achsen. Nun ist OL_1 eine Translation des Gitters; sie führt γ in γ_1 über, und es muß daher die Achsenverteilung in γ_1 mit der in γ übereinstimmen, und ebenso ist es für γ' . Aber auch die Achsenverteilung in der Ebene γ_m , die durch die Mitte eines Rhomboeders geht, muß die gleiche sein, wie in γ ; sie ergibt sich ja so, daß alle Nebenachsen von γ_m aus denen von γ durch Multiplikation mit der zu γ vertikalen Translation $2\tau_z$ hervorgehen. Damit ist die obige Be-

hauptung bewiesen. Insbesondere ist auch jede horizontale Flächendiagonale eine zweizählige Achse; sie ist zugleich eine der durch die Rhomboederecken gehenden Achsen. Auch Umschraubungsachsen treten noch auf; sie gehen durch die Mitten der Rhomboederkanten.

Vertikale Symmetrieebenen durchziehen das Rhomboeder ebenfalls drei; sie gehen durch die Hauptachse, halbieren die Winkel zwischen je zwei Nebenachsen u , u_1 , u_2 und enthalten je zwei Rhomboederkanten; nämlich OL_1 und $O'L'$, OM_1 und $O'M'$, ON_1 und $O'N'$. Es sind die Ebenen

$$\sigma_l = OO'L'L_1, \quad \sigma_m = OO'M'M_1, \quad \sigma_n = OO'N'N_1.$$

Sie schneiden das gleichseitige Dreieck $L_1M_1N_1$ der Ebene γ_1 in seinen drei Höhen, die wir s_l , s_m , s_n nennen wollen (Fig. 93). Durch jede Ecke eines Rhomboeders gehen drei solche Ebenen. Sie folgen in Abständen τ_l , τ_m , τ_n aufeinander. Die Geraden s_l , s_m , s_n als Höhen des Dreiecks $L_1M_1N_1$ sind nämlich senkrecht zu den Translationen $2\tau_l$, $2\tau_m$, $2\tau_n$. Auf diesen Translationen stehen also auch die Symmetrieebenen senkrecht,

und daher folgen sie in den Abständen τ_l , τ_m , τ_n . Zu ihnen treten wieder noch Ebenen gleitender Symmetrie, deren Lage sich durch Multiplikation der Spiegelungen an σ_l , σ_m , σ_n mit den Translationen des primitiven Tripels ergibt.

§ 15. Die Achsen und Symmetrieebenen der kubischen Gitter. Die Achsengruppe der Gitter ist O , die Symmetriegruppe ist O^h ; die Translationengruppen sind I'_c , I'_c' , I'_c'' .

Wir werden die Darstellung einerseits direkt an den Würfel als Stammfigur anschließen, und uns andererseits auch auf die Sätze über die tetragonalen und rhomboedrigen Gitter stützen. Beider Gitter Eigenschaften kommen auch den kubischen Gittern zu; die der tetragonalen Gitter für jede ihrer drei Schaaren von vierzähligen Achsen, die der rhomboedrigen mit Rücksicht auf jede der vier dreizähligen. Insbesondere treten also für jede Schaar von dreizähligen Achsen auch dreizählige

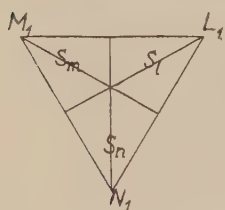


Fig. 93

Schraubenachsen auf, und zwar solche von zweierlei Windungssinn. Im ganzen wird es genügen müssen, wenn wir uns bei der Schilderung der Gesamtsymmetrie auf die eigentlichen Symmetrieachsen und Symmetrieebenen beschränken. Wir werden jedes der drei kubischen Gitter gesondert betrachten.

Beim Gitter Γ_c stimmen die in die Achsen fallenden primitiven Translationen $2\tau_x$, $2\tau_y$, $2\tau_z$ mit denen des tetragonalen Gitters Γ_q überein; in bezug auf die vier dreizähligen Achsen spielen hier $2\tau_x$, $2\tau_y$, $2\tau_z$ dieselbe Rolle wie $2\tau_l$, $2\tau_m$, $2\tau_n$ in § 14; die der Translation $2\tau_z$ von § 14 entsprechende in die Würfeldiagonale OO' fallende Translation 2τ ist daher

$$2\tau = 2\tau_x + 2\tau_y + 2\tau_z.$$

Hieraus folgt unmittelbar für das Gitter Γ_c^1 .

29a. *Die Achsenverteilung der vierzähligen und der ihnen parallelen zweizähligen Achsen ist für jede der drei Haupt-Richtungen die nämliche, wie beim tetragonalen Gitter Γ_q ; die vierzähligen Achsen gehen durch die Ecken und Mitten der Würfel Flächen, die zweizähligen durch die Kantenmitten.*

29b. *Die Achsenverteilung der dreizähligen Achsen ist für jede Schaar der dreizähligen Achsen die nämliche, wie beim rhomboedrischen Gitter. Jede dreizählige Achse ist eine Würfeldiagonale und umgekehrt. Die zu den dreizähligen Achsen senkrechten zweizähligen Umwendungsachsen schneiden sich nur in den Ecken und Mitten der Würfel.*

29c. *Die Anordnung der zweizähligen Achsen diagonalen Richtung ist die nämliche, wie beim tetragonalen Gitter der Gruppe Γ_q , und zwar für alle drei Würfel Flächen.*

Auch für die Schaaren der Symmetrieebenen gilt die für die tetragonalen und rhomboedrischen Gitter abgeleitete Anordnung; sie wird am einfachsten aus der Eigensymmetrie des Würfels erkannt. Außer den Seitenflächen ist auch jede parallel zu ihnen durch M gehende Mittelebene sowie auch jede Diagonalebene eine Symmetrieebene des Gitters.

Die Achsenfiguren können bei den kubischen Gittern nur mit einer gewissen Beschränkung gezeichnet werden; auch ziehen

¹⁾ Vgl. auch Fig. 22 und 22a (S. 58).

solche zweizählige Achsen; sie bilden mit der Körperdiagonale eine Gruppe D_3 , und da jeder dieser Punkte auch Träger eines Symmetriezentrums ist, so ist die zugehörige Gesamtgruppe D_3^d .

Neue dreizählige Achsen werden durch die Translationen des Gitters Γ_c'' nicht bedingt. Dies wird zwar durch die Figur nahegelegt, soll aber doch näher erörtert werden, um so auch die Rolle und Bedeutung der Translationen $2\tau_d$, $2\tau_d'$, $2\tau_d''$, $2\tau_d'''$ zu beleuchten. Wie wir oben sahen, entsprechen die vier Translationen OA , OB , OC , OO' des Gitters Γ_c den Translationen OL_1 , OM_1 , ON_1 , OO' von § 14, also auch das Dreieck ABC dem Dreieck $L_1M_1N_1$.

Dieses Dreieck bestimmt die Lage der dreizähligen Schraubenachsen; sie gehen durch die Punkte, die seine Seiten in drei gleiche Teile teilen. Beim Gitter Γ_c'' stellen aber auch die Translationen MA , MB , MC , MO vier Translationen dar, die den Translationen OL_1 , OM_1 , ON_1 , OO' des rhomboedrischen Gitters entsprechen. Aber auch für sie entsprechen die Punkte A , B , C den

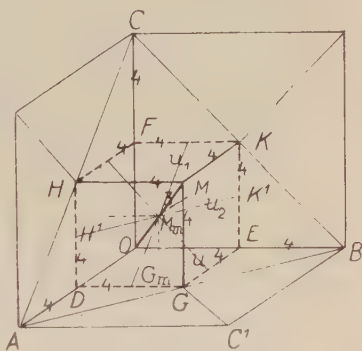


Fig. 95

Punkten L_1 , M_1 , N_1 von § 14; es können daher neue dreizählige Achsen nicht auftreten.

Neue Symmetrieebenen können ebenfalls nicht auftreten, wohl aber Gleitspiegelungsebenen, die in der Mitte zwischen je zwei Spiegelungsebenen verlaufen. Also folgt:

30. Beim Gitter Γ_c'' treten für jede der drei Hauptrichtungen diejenigen vierzähligen und zweizähligen Achsen auf, die dem Gitter Γ_q' in erster Auffassung entsprechen; von zweizähligen Nebenachsen diagonalen Richtung außer denen von Γ_c insbesondere noch solche, die durch die Mitten der halben Würfeldiagonalen gehen. Die dreizähligen Achsen stimmen mit denen des Gitters Γ_c überein. Zu den Spiegelungsebenen von Γ_c kommen noch weitere Gleitspiegelungsebenen.

Wir benutzen zur Veranschaulichung wieder den Teilwürfel w ($= OGHKM$) und erhalten (Fig. 95)¹⁾: 1) Die sechs Würfelkanten OD , OE , OF , MG , MH , MK sind vierzählige Drehungsachsen; die übrigen sechs Kanten DG , DH , EG , EK , FH , FK sind vierzählige Schraubenachsen; 2) die drei durch M_m gehenden Mittellinien sind zweizählige Schraubenachsen; 3) OM ist eine dreizählige Achse; 4) die Diagonalen OG , OH , OK , MD , ME , MF sind zweizählige Achsen; 5) die Geraden u , u_1 , u_2 durch die Mitte M_m von OM sind zweizählige Achsen; 6) jede Seitenfläche und jede durch OM gehende Diagonalebene ist eine Symmetrieebene; 7) alle Ecken und der Punkt M_m sind Symmetriezentra.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse beim Gitter I'_c . Es entsteht aus I'_c durch Flächenzentrierung; wir haben daher für die Verteilung der vierzähligen Achsen die *zweite* Auffassung des Gitters I'_q heranzuziehen, wie sie im Satz 25a dargestellt ist. Gerade mit Rücksicht auf das Gitter I'_c haben wir die dort enthaltene Beschreibung des tetragonalen Gitters I'_q ausgeführt. Es gehen also die vierzähligen Drehungsachsen durch die Ecken, die Flächenmitten und Seitenmitten; sie bilden in der Ebene γ ein Fußpunktenetz mit den Translationen τ_x , τ_y , die vierzähligen Schraubenachsen gehen durch die Zentra dieses Netzes und bestimmen so das rhombische Gesamtnetz aller vierzähligen Achsen. Die zweizähligen Schraubenachsen gehen wieder durch die Zentra dieses rhombischen Netzes; alle Achsen zusammen bilden also ein quadratisches Netz mit den Translationen $\frac{1}{2}\tau_x$, $\frac{1}{2}\tau_y$.

Eine wesentliche Änderung erfährt die Lagerung der dreizähligen Achsen. Da OG , OH , OK Translationen sind, so gehen auch durch jeden der drei Punkte G , H , K vier dreizählige Achsen, genau wie durch O . Durch den Oktanten w gehen daher ebenfalls vier, und das gleiche gilt für jeden der acht Teilwürfel, in die der Gesamtwürfel W zerfällt²⁾.

¹⁾ Im Interesse der Anschaulichkeit fehlen die diagonalen Achsen auf den Flächen von w ; sie sind aus Fig. 94 zu entnehmen.

²⁾ In ihn tritt an jeder der acht Ecken je eine dreizählige Achse ein; an jeder der sechs Flächenmitten je vier; dies sind genau die 32 Achsen, die die acht Teilwürfel erfüllen.

Dem Tripel $2\tau_l, 2\tau_m, 2\tau_n$ von § 14 entsprechen jetzt die Translationen OG, OH, OK ; demnach tritt hier das Dreieck GHK an die Stelle des dortigen Dreiecks $L_1M_1N_1$. Die zur Würfel diagonale OM parallelen dreizähligen Schraubenachsen gehen also jetzt durch die Punkte, die die Dreieckseiten GH, GK, HK in je drei gleiche Teile zerlegen.

Was die zweizähligen Nebenachsen betrifft, so genüge die Bemerkung, daß jetzt in jeder Seitenfläche des Oktanten w die beiden Diagonalen je eine zweizählige Achse darstellen und daß die Nebenachsenebenen in den Abständen τ_l, τ_h, τ_k aufeinander folgen. Alle Seitenflächen und Diagonalebene von w sind Symmetrieebenen; alle durch M_m gehenden Mittelebenen nur Ebenen gleitender Symmetrie. Also folgt:

31. Beim Gitter Γ'_c treten für jede der drei Hauptrichtungen diejenigen vierzähligen und zweizähligen Achsen auf, die dem Gitter Γ'_q in zweiter Auffassung entsprechen. Zweizählige Nebenachsen fallen jetzt

in jede Diagonale einer Seitenfläche des Oktanten w . Dreizählige Achsen gehen je vier durch jeden Oktanten. Jede Seitenfläche und Diagonalebene des Oktanten ist eine Symmetrieebene, jede seiner Ecken und Flächenmitten ein Symmetriezentrum.

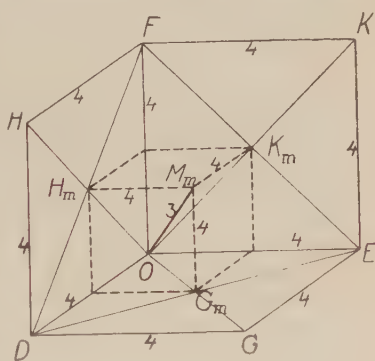


Fig. 96

Wir erhalten also für den Oktanten w (Fig. 96)¹⁾: 1) Jede Kante ist eine vierzählige Drehungsachse; jede durch M_m gehende Mittellinie eine vierzählige Schraubenachse, 2) jede Mittellinie einer Seitenfläche eine zweizählige Schraubenachse, 3) jede Diagonale eine dreizählige Drehungsachse, 4) jede Diagonale einer Seitenfläche eine zweizählige Drehungsachse, 5) jede

¹⁾ Im Gegensatz zu Fig. 94 und 95 stellt hier schon der größere Würfel den Oktanten w dar.

Seitenfläche und jede Diagonalebene eine Symmetrieebene, 6) jede Ecke und jede Flächenmitte ein Symmetriezentrum.

§ 16. **Tabelle der Gittersymmetrie.** Gewissen Punkten der einzelnen Gitter kommen Symmetriegruppen zu; sie besitzen Wichtigkeit für die Anwendungen und sollen daher für jedes Gitter vollständig angeführt werden. Von den Symmetriezentren und den Punkten der Symmetrieebenen kann jedoch abgesehen werden. Jedem Punkt einer Symmetrieebene kommt die Gruppe S_1 zu, jedem Symmetriezentrum die Gruppe S_2 ; das Auftreten der Symmetriezentra ist überdies für alle Gitter dasselbe und durch den Satz 16 von Kap. VIII geregelt.

Zunächst wollen wir für jedes einzelne Gitter der Reihe nach die Punkte nennen, denen eine besondere Symmetriegruppe zukommt; es genügt jedoch wieder (§ 11), daß wir uns auf einen Oktanten der Stammfigur beschränken. Die Punkte, die in erster Linie in Frage kommen, sind die in § 11 genannten Punkte

a) $O, D, E, F, G, H, K, M, D_m, E_m, F_m, G_m, H_m, K_m, M_m$.

Von ihnen kann auf die übrigen Punkte unmittelbar zurückgeschlossen werden. Außerdem ist aber auch jeder Punkt einer dem Gitter zukommenden Symmetrieachse zu erwähnen. Welches die Symmetriegruppen sind, die den einzelnen Punkten zukommen, ist aus den vorstehenden Figuren unmittelbar zu entnehmen; zu möglicher Erleichterung ist für jede nicht zweizählige Achse die Zähligkeit durch eine Ziffer angegeben worden. Für einzelne Gitter hat man die beiden sie betreffenden Figuren zweckmäßig zu kombinieren.

1) Die Gitter Γ_m und Γ'_m . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 73, 74, 75)

$$C_2^h \text{ und } C_2.$$

Die Gruppe C_2^h kommt sämtlichen Ecken des Oktanten p zu (§ 11), also den Punkten O, D, E, F, G^*, H, K, M ; die Gruppe C_2 jedem Punkt einer vertikalen Achse.

2) Das Gitter Γ'_v . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 77, S. 180)

$$V^h \text{ und } C_2^v;$$

die Gruppe V^h in den Punkten O, D, E, F, G, H, K, M ; die Gruppe C_2'' in jedem Punkt einer dem Gitter zukommenden zweizähligen Achse.

3) Das Gitter Γ_v' . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 79, S. 181)

$$V^h, C_2^h, C_2^v, C_2;$$

die Gruppen V^h und C_2^v wie beim Gitter Γ_v' ; außerdem die Gruppe C_2^h in G_m , die Gruppe C_2 in jedem Punkt der durch G_m gehenden Achse.

4) Das Gitter Γ_v'' . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 80, S. 182)

$$V^h, V, C_2^h, C_2^v, C_2;$$

die Gruppen V^h, C_2^v wieder wie beim Gitter Γ_v' ; außerdem die Gruppe V in M_m , die Gruppe C_2^h in G_m, H_m, K_m ; die Gruppe C_2 in jedem Punkt einer der zweizähligen Achsen durch G_m, H_m, K_m .

5) Das Gitter Γ_v''' ; übereinstimmend mit dem Gitter Γ_v (Fig. 81, S. 182).

6) Das Gitter Γ_r . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 91)

$$D_3^d, C_3^v, C_2^h, C_2;$$

die Gruppen D_3^d in den Ecken und in dem Zentrum O_m des Rhomboeders; die Gruppen C_3^v, C_2 in jedem Punkt einer dreizähligen und zweizähligen Achse, die Gruppe C_2^h in den Flächenmitten und Kantenmitten, z. B. in S_m^1).

7) Das Gitter Γ_q . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 85, S. 185)

$$D_4^h, V^h, C_4^v, C_2^v;$$

die Gruppe D_4^h in den Punkten O, F, G, M ; die Gruppe V^h in D, E, H, K , die Gruppe C_4^v in jedem Punkt einer vierzähligen Achse, die Gruppe C_2^v in jedem Punkt einer zweizähligen Achse.

8) Das Gitter Γ_q' . Wir haben die Figur 87 mit der Figur 89 (S. 186 und 189), die die zweizähligen Achsen diagonalen Rich-

¹⁾ Die Symmetrieebene ist die Ebene durch S_m und OO' , die zweizählige Achse ist L_1M_1 .

tung enthält, zu kombinieren. Sie ergeben als auftretende Symmetriegruppen:

$$D_4^h, V^h, V^d, C_4^v, C_2^v, C_2^h, C_2;$$

die Gruppen D_4^h, V^h, C_4^v, C_2^v übereinstimmend mit I_q . Außerdem V^d in den Mitten H' und K' der Strecken DH und EK , C_2^h in M_m und C_2 in jedem Punkt einer zweizähligen Achse, die in der durch F_m gehenden Gleitspiegelungsebene liegt. Zu beachten ist, daß die vierzähligen Schraubenachsen von Fig. 87 zugleich zweizählige Drehungsachsen sind. Ein Eingehen auf die zweite Auffassung von I_q' ist nicht erforderlich.

9) Das Gitter I_h . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 86, S. 186)

$$D_6^h, C_6^v, D_3^h, C_3, V^h, C_2^v;$$

die Gruppe D_6^h in O und F , die Gruppe D_3^h in B und C , die Gruppe V^h in D, E und G , die Gruppen C_6^v, C_3^v, C_2^v in jedem Punkt einer sechszähligen, dreizähligen, zweizähligen Achse.

10) Das Gitter I_r . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 94, S. 196)

$$O^h, D_4^h, C_4^v, C_3^v, C_2^v;$$

die Gruppe O^h in den Punkten O und M , die Gruppe D_4^h in D, E, F, G, H, K , die Gruppen C_4^v, C_3^v, C_2^v in jedem Punkt einer vierzähligen, dreizähligen und zweizähligen Symmetrieachse.

11) Das Gitter I_r' . Auftretende Symmetriegruppen sind (Fig. 96, S. 199)

$$O^h, T^d, C_4^v, C_3^v, V^h, C_2^v,$$

die Gruppe O^h in O, D, E, F, G, H, K, M ; die Gruppe T^d in M_m ; die Gruppe V^h in G_m, H_m, K_m , die Gruppen C_4^v, C_3^v in jedem Punkt einer vierzähligen und dreizähligen Achse und die Gruppe C_2^v in jedem Punkt einer zweizähligen Drehungsachse oder vierzähligen Schraubenachse

12) Das Gitter I_r'' . Auftretende Gruppen sind (Fig. 95, S. 197)

$$O^h, D_4^h, D_3^d, V^d, C_4^v, C_3^v, C_2^v, C_2,$$

und zwar treten alle Gruppen bis auf D_3^d, V^d und C_2 an den gleichen Stellen auf, wie beim Gitter I_r ; dazu kommt noch die Gruppe

D_3^d im Punkt M_m , die Gruppe V^d in H' , K' und den analogen Punkten (vgl. unter 8), in Übereinstimmung mit Γ_q' , von dem Γ_c'' ein Sonderfall ist, und die Gruppe C_2 in jedem Punkt der durch M_m gehenden Nebenachsen u , u_1 , u_2 .

Die so gefundenen Resultate sollen in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt werden. Sie ist so eingerichtet, daß sie für die Hauptpunkte des Gitters, insbesondere für die Punkte a) die einem jeden eigene Symmetrie für die einzelnen Gitter aufweist.

I. Die monoklinen und rhombischen Gitter

Gitter	O, M	G	H, K	D, E	F	G_m	H_m, K_m
Γ_m, Γ_m'	C_2^h	C_2^h	C_2^h	C_2^h	C_2^h	—	—
Γ_c, Γ_c''	V^h	V^h	V^h	V^h	V^h	—	—
Γ_r'	V^h	V^h	V^h	V^h	V^h	C_2^h	—
Γ_v''	V^h	V^h	V^h	V^h	V^h	C_2^h	C_2^h

II. Die tetragonalen Gitter¹⁾

Gitter	O, M	F, G	D, E	H, K	G_m	M_m	H', K'
Γ_q	D_4^h	D_4^h	V^h	V^h	C_2^v	—	C_2^v
Γ_q'	D_4^h	D_4^h	V^h	V^h	C_2^v	C_2^h	V^d

III. Die kubischen Gitter¹⁾

Gitter	O, M	G, H, K	D, E, F	D_m, E_m, F_m	G_m, H_m, K_m	M_m	H', K', v_{sym}
Γ_c	O^h	D_4^h	D_4^h	C_4^v	C_2^v	C_3^v	C_2^v
Γ_c'	O^h	O^h	O^h	C_4^v	V^h	T^d	C_4^v
Γ_c''	O^h	D_4^h	D_4^h	C_4^v	C_2^v	D_3^d	V^d

¹⁾ Für die Punkte H' und K' vergleiche unter 8).

Für das rhomboedrische und hexagonale Gitter kommen andere Punkte in Betracht (Fig. 72 und 87). Für das rhomboedrische nur O , $O_m = M$, S_m ; für das hexagonale außerdem die Punkte D , E , F , G , H , K und die Mitten B , C der primitiven gleichseitigen Dreiecke. So entspringt die folgende Tabelle:

IV. Rhomboedrisches und hexagonales Gitter

Gitter	O	B, C	F	D, E, G	$M = O_m$	S_m
Γ_{rh}	D_3^d	—	—	—	D_3^d	C_2^h
Γ_h	D_6^h	D_3^h	D_6^h	V^h	V^h	—

Kap. X. Die Strukturtheorien und die mathematische Problemstellung

§ 1. Die historische Entwicklung¹⁾. Unsere Vorstellungen über die Struktur der Kristallsubstanz haben sich in erster Linie an die Ideen von Ch. Haüy²⁾ angeschlossen; von ihm ist der Anstoß zur heutigen Denkweise ausgegangen. Er dachte sich den Kristall im wesentlichen aus parallelepipedisch gelagerten Elementarteilchen aufgebaut, die den Raum lückenlos erfüllen sollten. Ein erster organischer Fortschritt knüpft sich an G. Delafosse³⁾. Er verließ die Haüysche Vorstellung einer den Raum kontinuierlich erfüllenden Materie und ging zu einer mehr atomistischen Denkweise über. Die Haüysche Hypothese erhielt durch ihn die wesentlich präzisere und einfachere Form, daß *die Schwerpunkte der Kristallbausteine ein Punktgitter bilden*. Auf die Form der Bausteine ging er nicht näher ein. In Delafosse haben wir daher den eigentlichen Begründer der

¹⁾ Es handelt sich im Text nur um kurze Angabe der Grundgedanken und Fortschritte. Eine genauere historische Darstellung gibt L. Sohncke in seiner „Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur“, Leipzig 1879.

²⁾ Vgl. besonders Essai d'une théorie sur la structure des cristaux, Paris 1784.

³⁾ Recherches sur la cristallisation, Mémoires présentés par divers avants à l'Académie, Bd. 8, Paris 1843.

Gittertheorie zu erblicken. Einen ähnlichen Gedanken hatte auch bereits L. Seeber ausgesprochen¹⁾.

Die Beziehung dieser Hypothese zum kristallographischen Symmetriegesetz ist zuerst von L. Frankenheim zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen gemacht worden¹⁾. Er gab eine Aufzählung aller Gitter und fand, daß keine Gittersymmetrie existierte, die nicht zugleich eine der damals bekannten Kristallsymmetrien war. Damit war die erste starke Stütze des Strukturbildes gewonnen. Frankenheim hat freilich sein Resultat nur in vorläufiger Form kundgegeben, da er sich damals „mit der Annahme von Teilchen, die durch Zwischenräume getrennt waren, nicht befreunden konnte“. Ungefähr 15 Jahre später hat A. Bravais die Einteilung der Gitter nach der Symmetrie und die Bestimmung aller an sich möglichen kristallographischen Symmetriearten von neuem in Angriff genommen²⁾. Er bewies, daß die Punktgitter, genau wie die Kristalle, in sieben durch ihre Symmetrie sich unterscheidende Gattungen zerfallen, und daß man 14 verschiedene Typen zu unterscheiden habe. Er hat im Anschluß daran eine erste mathematisch wohlbegründete und wohlentwickelte Theorie des atomistischen Strukturaufbaues für die Kristalle entwickelt; eine Theorie, die für jede einzelne der 32 Kristallklassen in einer für alle übereinstimmenden Weise das strukturelle Gefüge zu geben imstande ist. Er hat so die erste organische Struktur-auffassung geschaffen³⁾.

¹⁾ Annalend. Physik, Bd. 76 (1824), S. 229 und Die Lehre von der Cohäsion, Breslau 1835.

²⁾ Die erste Abhandlung erschien 1850. Eine Zusammenstellung aller Resultate enthalten die *Études cristallographiques*, Paris 1866 [deutsch in Ostwalds Klassiker, Nr. 90]. Die grundlegende Bedeutung und Eigenart des Symmetriebegriffs hat übrigens zuerst C. Hessel in aller Klarheit erkannt, und auf ihrer Grundlage die 32 möglichen Kristallklassen abgeleitet (1830). Vgl. Gehlers physikalisches Wörterbuch, Artikel „Kristalle“.

³⁾ Von den 32 Kristallklassen ist diejenige, die der Gruppe S_4 entspricht und eine vierzählige Achse zweiter Art besitzt, in der Bravaisschen Abhandlung über die symmetrischen Polyeder nicht enthalten. Sie wird aber in den *Études cristallographiques* doch erwähnt.

§ 2. Die Bravais'sche Theorie. Wir wollen die Bravais'sche Strukturauffassung zunächst an einem Beispiel veranschaulichen.

Wir knüpfen an einen holoeidrischen Kristall des tetragonalen Systems an, z. B. das Zinn. Seine Symmetrie ist durch die Punktgruppe D_4^h gegeben; jede Deckoperation dieser Gruppe führt also die ihm zugehörige Kristallform in sich über. Wir wählen jetzt irgendein Gitter vom tetragonalen Typus aus, dessen Netzebene γ also ein quadratisches Netz enthält. Die Symmetriegruppe des Gitters für jeden Gitterpunkt ist ebenfalls D_4^h . Setzt man nun in jeden Gitterpunkt einen materiellen Baustein μ von der Symmetrie D_4^h (z. B. eine einfache Kristallform $\mathfrak{K}$) so ein, daß seine Symmetrieachsen und Symmetrieebenen mit denen des Gitters zusammenfallen, so ist damit die Bravais'sche Struktur für den genannten Kristall vorhanden. Ihr Grundgedanke ist also durch eine gewisse Selbstverständlichkeit ausgedrückt.

Wir haben uns nur noch zu überlegen, daß und inwiefern dem so gewonnenen materiellen Aufbau der Symmetriecharakter der tetragonalen Holoedrie zukommt. Betrachten wir z. B. die Ebene $\sigma_h = OAB$ von Fig. 69 (S. 166). Sie ist eine Symmetrieebene

Dort geht Bravais von der Aufgabe aus, alle Unterabteilungen der sieben Kristallsysteme zu ermitteln; hierbei ist ihm die bezügliche Polyederart nicht entgangen. Er sagt darüber folgendes: Un tel polyèdre obéirait à des lois de symétrie différentes de celles que je me suis borné à considérer dans mon Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. Ces polyèdres offriraient cette circonstance digne de remarque que deux faces inversement semblables pourraient être identiques quoique le polyèdre moléculaire ne possédât ni plans, ni centre de symétrie; rien de pareil n'a lieu pour les polyèdres moléculaires que nous nous sommes bornés à considérer jusqu'ici, ou que nous considérerons par la suite.

J'ai exclu les polyèdres qui offriraient ce singulier genre de symétrie de l'étude générale que j'ai faite des polyèdres symétriques, avec d'autant moins de scrupules qu'il ne paraît pas que ce cas singulier se rencontre dans la nature. (Études cristallographiques, Journ. de l'école polytechnique, Heft 34, S. 229.)

Übrigens hat Bravais das bezügliche Polyeder in der Schluß-tabelle doch aufgeführt; vgl. a. a. O. Tabelle IX, S. 275 nebst Anmerkung.

des Gitters und zugleich Symmetrieebene eines jeden Bausteins, der in einen ihrer Gitterpunkte O, A, B usw. eingesetzt ist. Ist ferner C' das Spiegelbild des Punktes C für diese Ebene, so ist auch C' Träger eines Bausteins $\mathfrak{R}'$; dieser Baustein $\mathfrak{R}'$ ist kongruent zum Baustein $\mathfrak{R}$ in C , und jeder von beiden besitzt eine horizontale Symmetrieebene. Durch Spiegelung gegen die Netzebene σ_h müssen also auch die Bausteine $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ körperlich miteinander zur Deckung kommen. Daher ist σ_h eine Symmetrieebene auch für die gesamte materielle Struktur. Ebenso lassen sich ihre andern Symmetrieeigenschaften erweisen. Dies ist es, was uns berechtigen darf, der Struktur die Symmetrie der Gruppe D_4^h beizulegen.

Betrachten wir zweitens einen hemiedrischen Kristall des tetragonalen Systems, z. B. das schwefelsaure Strychnin, dem die Ebenensymmetrie fehlt, und das nur Achsensymmetrie besitzt. Wir haben dann das obige Verfahren so abzuändern, daß wir in jedem Gitterpunkt den holoedrischen Baustein durch den entsprechenden hemiedrischen ersetzen. Er verhält sich nicht mehr spiegelbildlich gleich gegen die Ebene σ_h ; und deshalb kann diese Ebene auch nicht mehr eine Symmetrieebene des materiellen Aufbaues sein. Sie ist es freilich immer noch im geometrischen Sinn für das Punktgitter Γ_t , aber schon nicht mehr für die einzelnen in ihr enthaltenen kristallographischen Bausteine. Es kommen auch nicht mehr die beiden in C und C' befindlichen Bausteine $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ durch Spiegelung an σ_h materiell miteinander zur Deckung. Für ihre Mittelpunkte ist es freilich noch der Fall, für sie selbst aber nicht, da sich ja $\mathfrak{R}'$ mit dem aus $\mathfrak{R}$ durch die Spiegelung hervorgehenden Spiegelbild $\mathfrak{R}$ körperlich nicht deckt. Die Ebene σ_h ist also für die gesamte materielle Struktur — und die allein steht in Frage — keine Symmetrieebene mehr. Dagegen ist jede Symmetrieachse des Gitters auch noch eine Symmetrieachse der Struktur. Genau wie vorher, können wir schließen, daß der Struktur alle die Symmetrieelemente zukommen, die dem Punktgitter und der Kristallform gemeinsam sind; vorausgesetzt, daß man auch diesmal die Kristallform so in einen jeden Gitterpunkt einsetzt, daß ihre Symmetrieachsen mit denen des Gitters zusammenfallen.

§ 3. Mathematische Erörterung der Bravais'schen Theorie.

Beweismethode und Beweiskraft des vorstehenden Beispiels lassen sich auf jedes einzelne Kristallsystem und jede seiner Unterabteilungen übertragen. Wir ziehen jedoch vor, auf die Bravais'sche Strukturauffassung und auf die Hauptpunkte unserer Beweisführung noch genauer und zugleich allgemeiner einzugehen. Zunächst sei daran erinnert, daß sich alle Punkte eines Punktgitters aus einem von ihnen in der Weise ergeben, daß man diesen den sämtlichen Translationen der zugehörigen Translationengruppe I_τ unterwirft. Man kann daher die sämtlichen Bausteine der Struktur so erhalten, daß man auf einen einzelnen die sämtlichen Translationen von I_τ ausübt. Die Translation läßt den Baustein in paralleler Stellung; so erhalten wir bereits ein erstes allgemeines Resultat, und zwar das folgende:

1. *Alle Bausteine einer Bravais'schen Struktur befinden sich in paralleler Stellung.* Man sagt auch, sie seien *parallel orientiert*.

Um zu weiteren Resultaten zu gelangen, gehen wir so vor, daß wir zunächst einmal sowohl das Gitter I_τ , wie auch den Baustein μ , die wir miteinander kombinieren, ganz beliebig lassen, und wollen die Deckoperationen der so gebildeten Struktur — wir nennen sie eine Bravais'sche — bestimmen. Sei $\mathfrak{Q}$ eine Deckoperation, die einen Gitterpunkt O festläßt. Ferner sei G_μ die Punktgruppe für den in O vorhandenen Baustein μ und G_p die Symmetriegruppe des Gitters für den Punkt O . Dann führt die Operation $\mathfrak{Q}$ sowohl das Gitter, wie auch den Baustein μ in sich über, sie muß daher sowohl der Gruppe G_μ , wie auch der Gruppe G_p angehören. Ist zweitens $\mathfrak{Q}$ eine Deckoperation, die einen Gitterpunkt P in einen Gitterpunkt Q übergehen läßt, so können wir sie durch die Translation $\mathfrak{T}$ ersetzen, die den Punkt P nach Q bringt, und eine Operation $\mathfrak{Q}'$, die den Punkt Q festläßt; so daß also

$$1) \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{T}\mathfrak{Q}', \quad \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$$

ist. Es muß danach auch $\mathfrak{Q}'$ eine Deckoperation sowohl für das Gitter, wie für den in Q befindlichen Baustein μ sein, also ebenfalls eine gemeinsame Operation der beiden Gruppen G_μ

und G_p . Umgekehrt ist auch klar, daß jede gemeinsame Operation von G_μ und G_p eine Deckoperation der Struktur darstellt. Insgesamt können wir also sagen:

2. Ist G_p die Symmetriegruppe des Gitterpunktes und G_μ die Symmetriegruppe des Bausteins, so wird die Symmetrie der Struktur für jeden ihrer Punkte durch die größte gemeinsame Untergruppe von G_p und G_μ charakterisiert.

Wir bezeichnen die so definierte Untergruppe durch G_σ ; sie gibt die Punktsymmetrie der Struktur an. Weiter gilt nach 1):

3. Jede Deckoperation einer Bravais'schen Struktur ist das Produkt aus einer Deckoperation der Gruppe G_σ in eine Translation der dem Gitter zukommenden Translationsgruppe Γ_τ .

Das Resultat, das sich für die Gesamtsymmetrie der Struktur hieraus ergibt, können wir offenbar folgendermaßen aussprechen:

3a. Die Gesamtheit aller einer Bravais'schen Struktur zugehörigen Deckoperationen wird durch diejenige Gruppe dargestellt, die sich durch Multiplikation der Translationsgruppe Γ_τ des Gitters in die gemeinsame Untergruppe G_σ der Gruppen G_p und G_μ ergibt.

Bezeichnen wir diese Gruppe durch Γ , so können wir also schreiben:

$$\Gamma = \{ \Gamma_\tau, G_\sigma \}.$$

Diese Gruppe ist es also, in der die Symmetrie unserer Strukturen zum Ausdruck kommt.

Wir wollen nun wieder zu dem speziellen Fall der eigentlichen Bravais'schen Strukturen zurückkehren. Für sie ist G_p die Gruppe des Kristallsystems und G_μ die Gruppe einer seiner Unterabteilungen; es ist daher die Gruppe G_μ des Bausteins eine Untergruppe der Gruppe G_p und es ist daher G_σ mit G_μ identisch. Die vorstehenden Sätze gelten daher für die eigentlichen Bravais'schen Strukturen in der Weise, daß wir die in ihnen auftretende Gruppe G_σ durch G_μ ersetzen.

Wir können daher die Betrachtung mit folgendem zusammenfassenden Satz schließen, der die Bravais'sche Theorie kennzeichnet:

4. Für jede der 32 Kristallklassen lassen sich in übereinstimmender Weise Strukturen herstellen, deren Symmetrie genau der Symmetrie der Kristallklasse gleich ist. Es hat so zu geschehen, daß 1) in alle Gitterpunkte kongruente Bausteine eingesetzt werden, daß 2) das Gitter die Symmetrie des Kristallsystems besitzt, 3) der Baustein die Symmetrie der Kristallklasse, und daß 4) die Symmetrieelemente des Bausteins mit denen, die durch die Gitterpunkte gehen, sich überall decken.

Hieran schließen wir noch die folgende Bemerkung. Die Bravais'sche Strukturauffassung verwendet stets ein Gitter, dessen Typus dem Kristallsystem entspricht, und einen Baustein, der genau die Symmetrie des Kristalles besitzt. Es steht aber an sich nichts im Wege, die hierin enthaltene Beziehung zur kristallographischen Systematik (wie es oben geschehen ist) außer Betracht zu lassen und ein Gitter von beliebigem Typus mit einer beliebigen Kristallform zu kombinieren. Ob und inwieweit ein solcher Gedanke physikalische Geltung beanspruchen darf, mag auf sich beruhen; hier soll nur noch erörtert werden, wie wir die Symmetrie einer solchen Struktur einzuschätzen haben. Die Antwort hierauf haben wir bereits erteilt; sie ist in den oben abgeleiteten allgemeinen Sätzen enthalten; insbesondere ist es der Satz 2), der die Antwort an die Hand gibt. *Die Punktsymmetrie der Struktur ist stets durch die größte gemeinsame Untergruppe G_σ von G_μ und G_p gekennzeichnet* und damit auch ihre Gesamtsymmetrie. Wir folgern insbesondere noch, daß die Symmetrie G_σ niemals höher ist als die Symmetrie des Bausteins oder die Symmetrie des Gitters.

Bildet man also eine Struktur in der Weise, daß man in jeden Punkt eines aus Würfeln bestehenden Gitters einen völlig unsymmetrischen triklinen Baustein einfügt, so besitzt diese Struktur keinerlei geometrische Symmetrie, obwohl das Gitter dem kubischen Typus angehört. Die Symmetriegruppe G_σ reduziert sich in diesem Fall auf die Identität (d. h. die Gruppe C_1). Es ist auch an sich klar, daß dieser Struktur irgendeine Symmetrie des Gitters nicht mehr zukommen kann, da sie ja den Bausteinen abgeht.

Daß derartige allgemeinere Kombinationen von Gitter und Baustein vorkommen könnten, daß z. B. ein rhombischer Kristall mit einem quadratischen oder kubischen Gitter aufgebaut sein könnte, oder daß auch eine triklone Struktur in der Verbindung eines triklinen Gitters mit einem Baustein hoher Symmetrie bestehen kann usw. usw., ist immerhin denkbar, wenn auch physikalisch wenig wahrscheinlich¹⁾.

§ 4. Die Weiterentwicklung des Strukturbildes. Ein Gitter ist um zwei beliebige seiner Punkte, P und Q , in völlig gleicher Weise gelagert; wenn wir die Punkte P und Q voneinander unterscheiden wollen, so könnten wir dies nur durch Marken erreichen, mit denen wir sie versehen. Man nennt deshalb die Gesamtheit der Gitterpunkte ein *regelmäßiges Punktsystem*. Man fragt sofort, ob und wie es möglich sein mag, den so eingeführten Begriff der Regelmäßigkeit zu verallgemeinern. Kann es vielleicht außer den Gittern noch andere Punktsysteme geben, die gleichfalls so beschaffen sind, daß die Gesamtheit aller Punkte um irgend zwei von ihnen, wie P und Q , auf gleichartige Weise gelagert ist, und die wir deshalb ebenfalls als regelmäßig zu betrachten haben? Diese Frage muß uns als durchaus naheliegend erscheinen. Sie ist zuerst von Chr. Wiener²⁾ und L. Sohncke³⁾ gestellt und alsbald *bejahend* beantwortet worden.

Wir können sie in folgender Weise verständlicher machen. Nach Satz 1 besteht eine Eigenart der Bravais'schen Theorie darin, daß sich alle strukturellen Bausteine in paralleler Stellung befinden. Man erkennt sofort wieder, daß hier ein allgemeines mathematisches Problem eingeschlossen ist; man kann fragen, ob die parallele Stellung eine wesentliche Bedingung eines jeden möglichen Strukturbildes ist, oder ob es auch Strukturbilder gibt, die sie nicht erfüllen. Eine solche Frage ist um so dringender, als die Kristallographen schon vor längerer Zeit zu

¹⁾ E. Mallard verfuhr in dieser Weise.

²⁾ Grundzüge der Weltordnung. Leipzig und Heidelberg 1863, Bd. II, S. 82 ff.

³⁾ Die Gruppierung der Moleküle in den Kristallen. Pogg. Ann. 132 (1867), S. 75.

der Vorstellung gekommen waren, daß bei gewissen Kristallen, wie z. B. beim Quarz, eine parallele Stellung sämtlicher Bausteine nicht angenommen werden könne. Auch gibt es in der Natur, die unsere allererste Lehrmeisterin ist, sehr einfache, im obigen Sinn regelmäßige Anordnungen, deren Punkte nicht ein Punktgitter bilden. „Warum sollte z. B.“, heißt es bei Sohneke, „nicht eine derartige Anordnung der Molekelzentra in gewissen Kristallen möglich und sogar wahrscheinlich sein, bei der sie in einer Ebene die Ecken von lückenlos aneinander liegenden regelmäßigen Sechsecken, wie Bienenzellen bilden? Und doch ist eine solche Anordnung bei Annahme der Raumgitterstruktur ausgeschlossen!“¹⁾.

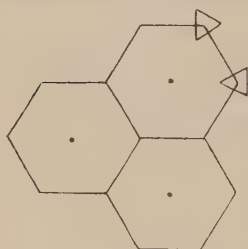


Fig. 97

Daß die hier erwähnte Anordnung in der Tat keine gitterhafte ist, ist leicht zu sehen. Für die Sechseckteilung ist jedes in einer Sechseckmitte errichtete Lot eine *sechszählige* Symmetrieachse und jedes in einer Ecke errichtete eine *dreizählige*. Setzt man nun in jede Ecke eines Sechsecks ein gleichseitiges Dreieck in der Stellung, die durch die *sesechszähligen* Symmetrie-

achsen gefordert wird, so befinden sich diese Dreiecke, wie Fig. 97 unmittelbar erkennen läßt, nicht mehr sämtlich in paralleler Orientierung²⁾.

Der Wiener-Sohnekesche Gedanke muß uns daher als durchaus begründet erscheinen. Im Anschluß an ihn erhoben sich die beiden genannten Forscher zu der grundlegenden Auffassung, daß als Eigenart des kristallographischen Aufbaues *einzig und allein* die Regelmäßigkeit der Struktur zu fordern ist, und daß es erst eine Frage der geometrischen Untersuchung sein kann, ob die so definierten regelmäßigen Strukturen mit den Gittern erschöpft sind oder nicht. Daß die Frage zu verneinen ist, wurde schon oben bemerkt; *der Aufstellung aller so beschaffenen Strukturen ist diese Schrift gewidmet.*

¹⁾ Theorie der Kristallstruktur, S. 23.

²⁾ Erst durch Hinzufügung der Sechseckmitten entsteht ein Punktnetz.

Hier mag zunächst noch auf die allgemeinen Konsequenzen der Wiener-Sohnckeschen Strukturhypothese hingewiesen werden, auf die mathematischen Vorstellungen, die sie einschließt, und auf die Probleme, die sie uns stellt. Im Interesse geometrischer Präzision legen wir zunächst eine nach allen Seiten sich *unbegrenzt* erstreckende Kristallsubstanz zugrunde. Eine erste Folgerung betrifft die *Qualität der Bausteine*. Sie sind in erster Linie physikalisch und chemisch gleichwertig anzunehmen. Damit ist aber ihre Eigenart noch nicht völlig gekennzeichnet. Die Regelmäßigkeit der Struktur drückt sich, wie stets, in gewissen Deckoperationen aus. Ist die Struktur um zwei Bausteine P und Q gleichgelagert, so muß sie eine oder mehrere Deckoperationen zulassen, die P in Q überführen. Es ist aber ein unmittelbares Ergebnis unserer kristallographischen Erfahrung, daß die Operationen erster und zweiter Art kristallographisch *gleichberechtigt* sind, es müssen daher als Deckoperationen der Strukturen sowohl solche erster Art, wie auch solche zweiter Art in Betracht gezogen werden. Dies führt zu dem Resultat, daß man Bausteine von *zweierlei* geometrischer Art in Betracht ziehen muß. Ist nämlich $\mathfrak{Q}$ eine Deckoperation zweiter Art, die einen Baustein P in einen Baustein Q überführt, so müssen P und Q , wie es einer Operation zweiter Art entspricht, zueinander spiegelbildlich gleich sein. Auf diese Notwendigkeit ist zu gleicher Zeit von dem russischen Mineralogen Fedorow und dem Verfasser hingewiesen worden. Von ihr ausgehend, hat die Theorie die erweiterte Form angenommen, die sie jetzt besitzt. Wir gelangen somit zu der folgenden genaueren Charakterisierung des Strukturbildes:

1) *Die allgemeine Forderung, der die Struktur genügen soll, ist die der Regelmäßigkeit; 2) Als Deckoperationen, die die Struktur in sich überführen, kommen sowohl Operationen erster Art, wie zweiter Art in Betracht; 3) Die Bausteine können in geometrischer Hinsicht von zweierlei Art sein, teils kongruent, teils spiegelbildlich gleich; 4) In physikalischer und chemischer Beziehung müssen sie sämtlich untereinander gleichwertig sein.*

§ 5. **Gruppentheoretische Folgerungen und Probleme.**
Wir haben zunächst darauf hinzuweisen, daß die Gesamtheit

der Deckoperationen, die eine Struktur zuläßt, aus dem üblichen Grunde den Gruppencharakter besitzt; sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ Deckoperationen, so ist es auch das Produkt $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$. Also

6. *Die sämtlichen Operationen, die eine Struktur in sich überführen, bilden eine Gruppe.*

Wir bezeichnen sie als *Raumgruppe* Γ und nennen sie, insofern als sie aus Deckoperationen der Struktur besteht, auch eine *Deckgruppe der Struktur*. Einige ihrer allgemeinen Eigenschaften haben wir zunächst vorzuführen.

1) Da sich jede Deckoperation $\mathfrak{L}$ der Struktur auch im umgekehrten Sinn ausführen läßt, so ist auch die zu $\mathfrak{L}$ inverse Operation $\mathfrak{L}^{-1}$ in der Gruppe enthalten.

2) Da außer $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ auch jedes aus $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ gebildete Produkt der Gruppe angehört, so gilt dies auch von der Operation $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{L}$, die aus $\mathfrak{M}$ durch Transformation mit $\mathfrak{L}$ hervorgeht und der Operation $\mathfrak{M}$ analog ist¹⁾.

3) Eine wesentliche Eigenschaft unserer Gruppen ist die, daß sie *keine* „unendlich kleinen“ Operationen enthalten. Dies bedeutet folgendes. Unsere Strukturen sind atomistisch aufgebaut, und es gibt für den Abstand zweier Bausteine (oder ihrer Schwerpunkte) einen kleinsten Wert d , unter den er nicht sinkt. Jede Deckoperation der Gruppe muß also einen jeden Baustein, den sie nicht festläßt (oder aber seinen Schwerpunkt), mindestens über einen Weg von der Länge d führen. Daher ist es unmöglich, daß Winkel und Translationskomponente einer Deckoperation zugleich unter jede beliebige Grenze sinken. Dies ist der Inhalt unserer Festsetzung. In ihm liegt auch die Erklärung dafür, daß wir uns in Kap. VIII, § 4 und 6 auf Translationengruppen von „kristallographischer Bedeutung“ beschränkt haben, d. h. auf solche, deren Translationen nicht beliebig klein werden können. Auch die in einer Raumgruppe enthaltenen Translationen dürfen nicht unter die eben genannte Grenze d sinken.

¹⁾ Diese Operation wird zwar für beliebige Operationen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ erst in Kap. XI, § 1 näher erörtert werden; ihre kristallographische Bedeutung ist gemäß Kap. V, § 7 auch schon an dieser Stelle ersichtlich.

4) Unmittelbar aus dem Begriff der Regelmäßigkeit fließt die nachstehende Folgerung. Sei a Achse einer Deckoperation und μ ein Baustein in ihrer Nähe. Ist dann μ_1 irgendein anderer Baustein, so folgt aus dem Regelmäßigkeitscharakter, daß in der Nähe von μ_1 eine zu a analoge Achse a_1 verläuft; wir wollen sie zu a gleichwertig nennen. Nun gibt es aber unendlich viele Bausteine, also folgt:

7a. *Eine Raumgruppe Γ enthält zu jeder Achse a unendlich viele zu a gleichwertige Achsen; in der Nähe eines jeden Strukturbausteins verlaufen solche Achsen.*

§ 6. Die kristallographischen Grundgesetze. Ist so die Eigenart der Strukturhypothese und der in ihr enthaltene Begriff der Regelmäßigkeit gruppentheoretisch gekennzeichnet, so sind nun noch die daraus erwachsenden Probleme näher zu umschreiben.

Die Bilder, die wir uns vom Naturgeschehen schaffen, sollen zwei wesentlichen Forderungen genügen; sie sollen *möglichst einfach* sein und mit den Ergebnissen der Erfahrung *übereinstimmen*. Die Einfachheit unseres Strukturbildes kann kaum gesteigert werden; ein einziger anschaulicher und durchsichtiger Gedanke bildet seinen Inhalt. So bleibt nur die Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erörtern. Vor allem kommen hier das *Symmetriengesetz* und das *Gesetz der rationalen Indizes* in Betracht; sie müssen sich als *unmittelbare* und *direkte* mathematische Folgerungen aus der zugrunde gelegten Annahme ergeben. Das sind die *Probleme*, die uns erwachsen, und einer zwingenden mathematischen Beweisführung bedürfen. Auf sie haben wir noch etwas näher einzugehen.

Der Inhalt des *Symmetriegesetzes* bedarf keiner näheren Erörterung. Die Kristalle zerfallen nach der Symmetrie in 32 Klassen; ferner können die Symmetrieachsen nur 2-, 3-, 4- und 6-zählig sein. Beide Tatsachen müssen aus der Definition der Regelmäßigkeit ohne weitere Annahmen gefolgert werden können. Auch Bravais stand bezüglich seiner eigenen Struktur-auffassung der gleichen Notwendigkeit gegenüber. Daß er dieser Notwendigkeit in vollem Umfang und mit vollem Erfolg zu genügen vermochte, ist die wissenschaftliche Leistung, die wir

ihm verdanken. Sie ist enthalten in seinen eingehenden Untersuchungen über die Symmetrie der Polyeder¹⁾, und in dem Nachweis, daß sich die Gitter nach ihrer Symmetrie genau in die sieben Haupttypen sondern, wie die Kristalle. Hier werden wir einen tiefer liegenden mathematischen Beweis zu führen haben. Der Hauptbeweisgrund wird darin bestehen, daß wir die allgemeineren Strukturen als gewisse Verallgemeinerungen der Bravais'schen erkennen werden. Für die Bravais'sche Theorie besteht die aus ihrer Eigenart unmittelbar sich ergebende charakteristische Eigenschaft, daß die Gruppe aller ihrer Deckoperationen eine *Translationengruppe* F_T enthält. *Das gleiche wird sich auch für die allgemeineren Strukturen ergeben*; auch für sie gibt es stets unendlich viele einander gleichwertige Stellen, die durch Translationen auseinander hervorgehen. Das ist es, was für die allgemeine Theorie von grundlegender Bedeutung ist, und was wir daher in erster Linie zu erweisen haben. Die 2-, 3-, 4-, 6-Zähligkeit der Achsen werden wir alsdann unmittelbar zu folgern vermögen.

Übrigens kommt dem Auftreten der Translationengruppe noch eine weitere Bedeutung physikalischer Art zu. Eine wesentliche Eigenschaft der Kristallsubstanz, zugleich eine Eigenschaft, die jeder homogenen Substanz zukommt, ist die Gleichwertigkeit der parallelen Richtungen. Für die Bravais'sche Gittertheorie ist sie eine direkte anschauliche Folge; für die allgemeine Theorie bedarf auch sie des Nachweises, und sie findet ihn in der Existenz der eben genannten Translationengruppe.

Vom kristallographischen Gesichtspunkt aus mag man freilich von vornherein die Auffassung zugrunde legen, daß eine regelmäßige homogene Anordnung, die nicht zugleich gitterhaft aufgebaut ist, eine physikalische Unmöglichkeit darstellt²⁾. Wie dem auch sei, eine mathematische Begründung der Strukturtheorien kann von dieser Auffassung keinen Gebrauch machen. Soll die Regelmäßigkeit der Anordnung die *einzige* allgemeine Hypothese bilden, die dem Strukturbild zugrunde gelegt wird,

¹⁾ Vgl. die Anmerkungen auf S. 205.

²⁾ In dieser Weise geht z. B. Niggli in seinem Werk *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums* (Leipzig 1918 und 1919) vor.

so muß es die mathematische Behandlung als ein Problem und damit als eine Frage der Untersuchung ansehen, in welcher Beziehung die Gitterhaftigkeit des Aufbaues zu ihr steht. Kommt die Gitterhaftigkeit tatsächlich *jeder* regelmäßigen Anordnung zu, so ist dies zu beweisen; ist sie aber — was an sich möglich ist — keine geometrische Folge der Regelmäßigkeit, und gibt es Anordnungen, die dem Gesetz der Regelmäßigkeit genügen, ohne gitterhaft zu sein, so ist uns ihre Kenntnis erst recht notwendig. Tatsächlich wird sich auch ein einzelner Fall regelmäßiger Anordnung ergeben, der *nicht* gitterhaft ist. Aber da die ihm entsprechende Struktur nicht allseitig ausgedehnt und daher ohne kristallographische Bedeutung ist, so scheidet sie als zulässiges Strukturbild aus. Für die *allseitig* ausgedehnten regelmäßigen Strukturen kann die gitterhafte Anordnung aus der Ausgangshypothese tatsächlich gefolgert werden.

Das *Gesetz der rationalen Indizes* behauptet die Rationalität der Indizesverhältnisse für die Grenzflächen der Kristalle. Auch dieses Gesetz muß als Folgerung der Strukturhypothese erscheinen. Dies wird sich in außerordentlich einfacher Weise ergeben; wir werden sogar sehen, daß selbst die tatsächlich zu meist auftretende Beschränkung der Rationalitätswerte auf kleine ganze Zahlen durchaus im Sinn der Hypothese liegt.

Beiläufig bleibe nicht unerwähnt, daß derjenige Teil des Symmetriegesetzes, der das allgemeine Vorkommen von 2-, 3-, 4-, 6-zähligen Achsen aussagt, als eine Folge des Gesetzes der rationalen Indizes anzusehen ist; Achsen von anderer Zähligkeit führen bekanntlich auf irrationale Indizeswerte. Insofern pflegt man vielfach das Gesetz der rationalen Indizes als *oberstes* Grundgesetz der Kristallsubstanz hinzustellen. Umgekehrt ist in dem erfahrungsmäßigen Auftreten von nur 2-, 3-, 4-, 6-zähligen Symmetrieachsen die beste *indirekte* empirische Bestätigung des Indizesgesetzes enthalten.

Kap. XI. Nachweis der kristallographischen Grundgesetze

Vorbemerkung. Erfahrungsgemäß ist jeder kristallographische Drehungswinkel ein rationaler Teil von 2π ; wir haben daher an erster Stelle zu zeigen, daß die Hypothese der regelmäßigen Anordnung die *Annahme von Drehwinkeln, die ein irrationales Verhältnis zu 2π besitzen, nicht zuläßt*. Da dieser Tatsache eine grundlegende Bedeutung innewohnt, wird ihr Beweis in zwingender Form zu führen sein. Zu dieser inneren Notwendigkeit tritt noch eine äußere. Es gibt nämlich Anordnungen, die ebenfalls Regelmäßigkeit in dem zugrunde gelegten Sinn aufweisen, und trotzdem irrationale Drehwinkel besitzen; sie sind freilich, wie schon erwähnt wurde und wie sich in § 3 zeigen wird, ohne kristallographische Bedeutung.

Die zentrale Stellung der eben genannten grundlegenden Tatsache erhellt am deutlichsten aus einer Folgerung, zu der sie fast unmittelbar Anlaß gibt. Sie liefert den am Ende des vorigen Kapitels genannten Satz, daß unsern regelmäßigen Strukturen stets eine Translationengruppe Γ_T zugehört. Mit dem Nachweis dieser Gruppe ist der Anschluß an die bereits abgeleiteten Ergebnisse vermittelt. Die Translationengruppen sind uns nach Eigenart und Symmetrie bekannt; von ihnen aus müssen wir daher in einfacher Weise zu Rückschlüssen auf die Eigenart und Symmetrie der Raumgruppen gelangen. Die Hilfsmittel, die diese Darlegungen erfordern, sind im wesentlichen in Kap. IV enthalten; wir haben ihnen noch die Einführung der allgemeinsten transformierten Operation und der isomorphen Gruppen, sowie einige einfache Hilfsformeln anzufügen.

§ 1. **Allgemeinste transformierte Operationen.** Wir wollen zunächst wieder die anschauliche Bedeutung des Begriffs zu ihrem Recht kommen lassen. Sei z. B. a eine vierzählige Achse und es gehe durch sie die Ebene σ_r der Operation $\mathfrak{S}_r(\tau)$. Durch Drehung um a möge die Ebene σ_v in σ_v' und die Translation τ in τ' übergehen, so ist $\mathfrak{S}_r'(\tau')$ die mit $\mathfrak{A}(\pi/2)$ trans-

formierte Operation. Es handelt sich darum, sie durch $\mathfrak{S}_v(\tau)$ und $\mathfrak{A}(\pi/2)$ auszudrücken.

Wir beginnen mit dem einfachen Fall einer Drehung $\mathfrak{A}$ um die Achse a und irgendeiner Operation $\mathfrak{Q}$ erster oder zweiter Art. Sie möge die Achse a in eine Lage b überführen, so ist die zu $\mathfrak{A}$ analoge Drehung um b die Operation, um die es sich handelt. Wir zeigen, daß sie durch das Produkt

$$1) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$$

dargestellt wird. In der Tat, wenn a durch die Operation $\mathfrak{Q}$ nach b gelangt, so gelangt die Gerade b durch die Operation $\mathfrak{Q}^{-1}$ nach a ; sie bleibt bei der Drehung $\mathfrak{A}$ fest, und kommt durch die dann folgende Operation $\mathfrak{Q}$ nach b zurück. Damit ist bereits gezeigt, daß das Produkt $\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$ eine Bewegung um die Achse b ist. Ferner bestehen, wie in Kap. V (§ 7), wieder die Gleichungen

$$\mathfrak{B}^2 = (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q})(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}) = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}^2\mathfrak{Q},$$

ebenso

$$\mathfrak{B}^3 = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}^3\mathfrak{Q}$$

usw. Ist nun wieder $\mathfrak{A}^n = 1$, so folgt daraus auch

$$\mathfrak{B}^n = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{Q} = 1,$$

und damit bleiben alle Schlüsse in Kraft, die wir in Kap. V aus dieser Gleichung gezogen haben. Es ist also der Drehungswinkel für $\mathfrak{B}$ derselbe, wie für $\mathfrak{A}$. Damit ist die mittels $\mathfrak{Q}$ aus $\mathfrak{A}$ hervorgehende (transformierte) Bewegung definiert. Es folgt also:

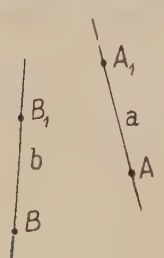
1. Die Operation, die aus der Drehung $\mathfrak{A}$ durch Transformation mit einer Operation $\mathfrak{Q}$ hervorgeht, ist eine zu $\mathfrak{A}$ analoge Drehung $\mathfrak{B}$ vom Winkel α um diejenige Gerade b , in welche die Achse a infolge der Operation $\mathfrak{Q}$ übergeht: sie wird durch die Gleichung 1) dargestellt.

Wir ersetzen jetzt $\mathfrak{A}$ durch eine Operation zweiter Art $\mathfrak{M}$, die einen Punkt festläßt, also eine Drehspiegelung (Spiegelung, Inversion) sein soll, und betrachten die Operation zweiter Art

$$2) \quad \bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{Q}.$$

Wie in Kap. VI, § 3 überzeugen wir uns zunächst wieder, daß für sie die obigen rechnerischen Schlüsse unmittelbar bestehen bleiben; es gibt auch für die Operation $\mathfrak{M}$ einen gewissen Exponenten m , so daß $\mathfrak{M}^m = 1$ ist, und daraus folgt ohne weiteres das übrige. Außerdem bleibt aber auch der geometrische Teil des Beweises sinngemäß in Kraft; nur mit der Maßgabe, daß wir die Achse a von $\mathfrak{A}$ durch die Verbindung von Achse und Ebene (die Ebene, den Punkt) zu ersetzen haben, an welche die Drehspiegelung (Spiegelung, Inversion) $\mathfrak{M}$ gekettet ist. D. h.

2. Ist $\mathfrak{M}$ eine Operation zweiter Art, die einen Punkt festläßt, so entsteht aus $\mathfrak{M}$ durch Transformation mit $\mathfrak{Q}$ eine



zu $\mathfrak{M}$ analoge Operation in bezug auf denjenigen Punkt, diejenige Achse, Ebene, in die Punkt, Achse, Ebene von $\mathfrak{M}$ durch die Operation $\mathfrak{Q}$ übergehen; sie wird durch die Gleichung 2) dargestellt.

Sei jetzt $\mathfrak{A}_1$ eine Schraubung um a vom Winkel α , so setzen wir zunächst

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(\alpha, t) = \mathfrak{A}(\alpha) \cdot \mathfrak{T}.$$

Fig. 98

In diesem Fall wird uns der Inhalt von Kap. IV zum Ziele führen. Wir haben zunächst, wenn $\mathfrak{B}_1$ die transformierte Operation ist,

$$3) \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{Q}^{-1} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^{-1} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{Q}.$$

Nun sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ isomorphe Operationen; wir folgern daher aus Satz 9 von Kap. IV, daß die vorstehende Operation $\mathfrak{B}_1$ zur Operation $\mathfrak{B}$ von Gleichung 1) isomorph ist. Es ist also auch $\mathfrak{B}_1$ eine Bewegung vom Winkel α . Genau wie oben, erkennen wir weiter, daß die Gerade b , in die a durch die Operation $\mathfrak{Q}$ übergeht, die Achse dieser Bewegung ist. Diese Gerade kommt (Fig. 98) durch die Operation $\mathfrak{Q}^{-1}$ zur Koinzidenz mit a , verschiebt sich dann infolge der Schraubung $\mathfrak{A}_1$ in sich und kommt durch die Operation $\mathfrak{Q}$ wieder nach b zurück. Es ist nur noch zu zeigen, daß die Translationskomponente von $\mathfrak{B}_1$ mit der von $\mathfrak{A}_1$ übereinstimmt. Dazu fassen wir irgendeinen Punkt B von b ins Auge. Durch $\mathfrak{Q}^{-1}$ gelange er in einen Punkt A von a ;

die Schraubung $\mathfrak{A}_1$ verschiebt ihn auf a bis zu einem Punkt A_1 , so daß $AA_1 = t$ ist. Die Operation $\mathfrak{Q}$ bringt wieder a mit b zur Koinzidenz, und zwar so, daß A auf B fällt; es fällt daher A_1 in einen Punkt B_1 , so daß $AA_1 = BB_1 = t$ ist. Die transformierte Operation $\mathfrak{B}_1$ bewirkt also, daß sich der Punkt B auf b um t bis B_1 verschiebt; es ist also t die Gleitungskomponente auch für $\mathfrak{B}_1$. Also folgt:

3. Aus der Schraubung $\mathfrak{A}_1$ entsteht durch Transformation mit der Operation $\mathfrak{Q}$ eine zu $\mathfrak{A}_1$ analoge Schraubung $\mathfrak{B}_1$ um diejenige Achse, in die die Achse a durch die Operation $\mathfrak{Q}$ übergeht.

Ersetzen wir die Schraubung $\mathfrak{A}_1$ durch eine Operation zweiter Art, die ebenfalls eine Translationskomponente enthält, also eine Gleitspiegelung $\mathfrak{S}(t)$ ist, so bleiben alle Schlüsse, die zum Satz 3 führen, in Kraft, nur mit der Maßgabe, daß die Achse a durch die Ebene σ der Operation $\mathfrak{S}(t)$ zu ersetzen ist. Ferner ist jetzt der Punkt B_1 von σ_1 derjenige bestimmte Punkt dieser Ebene, für den BB_1 vektoriell gleich der transformierten Gleitungskomponente ist. D. h.

4. Aus einer Gleitspiegelung $\mathfrak{S}(t)$ entsteht durch Transformation mit einer Operation $\mathfrak{Q}$ eine analoge Gleitspiegelung längs derjenigen Ebene σ_1 und mit derjenigen Gleitungskomponente t_1 , in die σ und t infolge der Operation $\mathfrak{Q}$ übergehen.

Sei endlich $\mathfrak{A}_1$ eine Translation $\mathfrak{T}$. Auch für diesen Fall bleiben unsere Schlüsse bestehen, mit der Besonderheit, daß jetzt $\alpha = 0$ ist. Also folgt:

5. Aus einer Translation $\mathfrak{T}$ entsteht durch Transformation mittels der Operation $\mathfrak{Q}$ wiederum eine Translation, und zwar diejenige, in die $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{Q}$ übergeht.

Ist insbesondere auch $\mathfrak{Q}$ eine Translation, so gilt der Satz:

6. Jede Translation wird durch eine Translation in sich selbst transformiert.

Ist nämlich $\mathfrak{T}$ die eine und $\mathfrak{T}_1$ die andere Translation, so folgt aus der Vertauschbarkeit der Translationen sofort

$$\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}.$$

Dies ist der Satz. Er wird auch durch seinen vektoriellen Inhalt in Evidenz gesetzt. Wenn in Fig. 38 (S. 111) OA und AC die Translationen $\mathfrak{T}_1^{-1}$ und $\mathfrak{T}$ darstellen, so ist CB die Translation $\mathfrak{T}_1$ und daher $OB = AC$ das aus diesen dreien gebildete Produkt (ihre vektorielle Summe).

Ein Punkt bedarf noch einer Ergänzung. Wir haben beim Satz 3 zu unterscheiden, ob $\mathfrak{Q}$ eine Operation erster oder zweiter Art ist. Eine Schraubung $\mathfrak{A}_1$ wird durch eine Bewegung in eine ihr *kongruente* Schraubung übergeführt, durch eine Operation zweiter Art dagegen in eine ihr *spiegelbildlich gleiche*. Mit andern Worten: Ist $\mathfrak{Q}$ eine Operation zweiter Art, so *dreht sich der Windungssinn der Schraubung bei der Transformation*

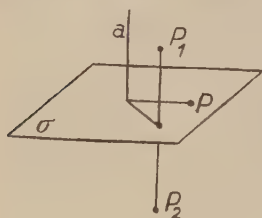


Fig. 99

mit $\mathfrak{Q}$ um. Es genüge, dies durch ein einfaches Beispiel zu veranschaulichen. Sei $\mathfrak{Q}$ eine Spiegelung $\mathfrak{S}$ an einer zur Achse a von $\mathfrak{A}_1$ senkrechten Ebene, und P ein Punkt in der Spiegelebene σ (Fig. 99); es fällt dann die Achse b der transformierten Schraubung mit a zusammen. Der Punkt P gelange durch die Schraubung $\mathfrak{A}_1$ nach

P_1 , er gelangt dann infolge der Schraubung $\mathfrak{B}_1$, wie wir sofort erkennen, nach P_2 . Bei der Spiegelung $\mathfrak{S}^{-1}$ bleibt er nämlich in Ruhe, die Schraubung $\mathfrak{A}_1$ bringt ihn nach P_1 und durch die dann eintretende Spiegelung geht er in den Punkt P_2 über, der das Spiegelbild von P_1 gegen σ ist. Die beiden Schraubungen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ haben also denselben Drehungswinkel und entgegengesetzte Translationen und damit in der Tat verschiedenen Windungssinn. Also:

7. Wird eine Schraubung $\mathfrak{A}_1$ mit einer Operation zweiter Art transformiert, so besitzt die transformierte Schraubung $\mathfrak{B}_1$ umgekehrten Windungssinn.

Achsen und Ebenen, die durch die Operationen einer Gruppe ineinander übergehen, also durch Transformation mittels der Operationen der Gruppe entstehen, sollen *gleichwertige* Achsen und Ebenen der Gruppe heißen.

§ 2. **Isomorphe Gruppen.** Wir wollen den in Kap. IV, § 5 eingeführten Begriff der *Isomorphie* auf Gruppen ausdehnen und zwar mittels der folgenden Definition:

8. *Zwei Gruppen G und Γ sollen isomorphe Gruppen heißen, wenn jeder Operation $\mathfrak{L}'$ der einen mindestens eine zu $\mathfrak{L}'$ isomorphe Operation $\mathfrak{L}$ der andern entspricht.*

Wir haben nur zu zeigen, daß es Gruppen G und Γ gibt, die in der vorstehenden Beziehung stehen. Seien dazu $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}$, ebenso $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}$ zwei Paare isomorpher Operationen von G und Γ . Ferner sei

$$\mathfrak{L}'\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}',$$

so ist auch $\mathfrak{N}'$ eine Operation von G . Ist nun

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{N},$$

so ist erstens, nach Kap. IV, Satz 9, $\mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{N}'$ isomorph und zweitens ist $\mathfrak{N}$ auch notwendig eine Operation von Γ . Unsere Definition erfüllt also die Gruppeneigenschaft, womit ihre Berechtigung nachgewiesen ist.

Auf die Eigenschaften isomorpher Gruppen werden wir im nächsten Kapitel (§ 1) näher eingehen.

§ 3. **Eine Raumgruppe besonderer Art.** Wir haben im Eingang des Kapitels auf besondere Anordnungen hingewiesen, denen ein regelmäßiger Charakter in dem zugrunde gelegten Sinn innewohnt, und die doch irrationale Drehwinkel besitzen. Diese Anordnungen wollen wir jetzt vorführen. Es geschieht am einfachsten so, daß wir direkt ihre Existenz und ihre Eigenart aufzeigen. Sie knüpfen an eine Eigenschaft der Schraubenlinie an, die wieder einer Eigenschaft des Kreises analog ist; wir gehen deshalb zunächst vom Kreise aus.

Ein Kreis geht durch Drehung um seinen Mittelpunkt in sich über; er ist die Bahn, die ein Punkt von ihm bei dieser Drehung beschreibt. Analog wird die Schraubenlinie von einem Punkt beschrieben, der einer fortgesetzten gleichmäßigen Schraubung unterworfen wird; er bewegt sich dabei auf einem Kreiszyylinder, dessen Achse die Schraubenachse ist. Eine solche Schraubenlinie geht bei dieser Schraubung ebenfalls in sich über — der

praktische Gebrauch aller Schrauben und Schraubengewinde beruht darauf.

Diese Analogie verfolgen wir weiter. Wir teilen den Kreis in n gleiche Teile (Fig. 100). Sind $P, P_1, \dots, P_{n-1}$ die n Teilpunkte, so bilden sie offenbar ein regelmäßiges Punktsystem. Jeder Punkt ist von der Gesamtheit der andern auf gleiche Weise umgeben. Jede der n Drehungen

$$4) \quad 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}; \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(2\pi/n)$$

führt die n Kreispunkte ineinander über.

Dies übertragen wir auf den Kreiszylinder. Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\omega, t)$

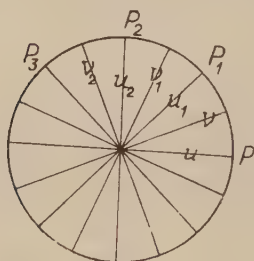


Fig. 100

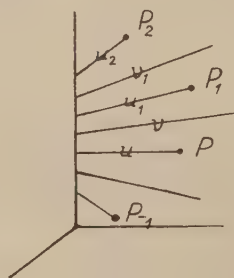


Fig. 101

eine Schraubung um seine Achse, so ist klar, daß die sämtlichen Potenzen

$$5) \quad 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^m \dots \text{in inf.}$$

Gruppencharakter besitzen, und dies bleibt bestehen, wenn wir noch die inversen Potenzen von $\mathfrak{A}$ hinzufügen. Durch diese Schraubungen möge ein auf dem Kreiszylinder gelegener Punkt P in die Lagen $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ gelangen (Fig. 101)¹⁾ ebenso durch die inversen Schraubungen in die Lagen $P_{-1}, P_{-2}, \dots, P_{-m}, \dots$, so liegen alle diese Punkte P_i auf einer gewissen auf dem Zylinder verlaufenden Schraubenlinie. Offenbar bilden auch sie ein regelmäßiges Punktsystem. Jeder Punkt ist von der Gesamtheit aller übrigen auf die gleiche Weise umgeben, und es ist wieder klar, daß alle diese Punkte durch

¹⁾ Die Figur enthält nur einige dieser Punkte.

jede Schraubung der Reihe 5) ineinander übergehen. *Ihre Anzahl ist unendlich.*

Wir wollen die Analogie noch weiter verfolgen; wir wollen die Deckgruppen suchen, die den beiden regelmäßigen Anordnungen zukommen. Die Deckgruppe der Kreisfigur ist offenbar die Diödergruppe D_n . Zu den n Drehungen 4), die die n Punkte P_i in sich überführen, kommen noch n Umwendungen. Wir wollen insbesondere $n = 2r$, also als gerade Zahl annehmen¹⁾. Dann sind es die r Umwendungen um die r Durchmesser u_i , die je zwei Punkte P_i enthalten, und r weitere Umwendungen um die r Durchmesser v_i , die die Winkel je zweier Durchmesser u_i halbieren; also die n Umwendungen

$$6) \quad \mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_{r-1}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{r-1}.$$

Für die schraubenförmige Anordnung haben wir ebenfalls bereits gewisse Deckbewegungen kennen gelernt, nämlich alle Schraubungen der Reihe 5). Zu ihnen kommen, genau wie beim Kreis, noch gewisse Umwendungen. Legen wir durch den Punkt P eine Achse u , die auf der Zylinderachse senkrecht steht, so geht durch Umwendung um sie die gesamte Schraubenlinie in sich über, wofür die Anschaulichkeit angerufen werden mag. Es gehen daher auch die sämtlichen Punkte P_i ineinander über. Das gleiche gilt für die Umwendung $\mathfrak{U}_i$ um eine Achse u_i , die durch P_i senkrecht zur Zylinderachse verläuft. Das gleiche gilt aber auch für die Achsen v_i , die im mittleren Abstand zwischen je zwei Achsen u_i verlaufen. Alle diese Achsen bilden, wie man leicht sieht, kurz gesprochen die Kanten aufeinanderfolgender Stufen einer Wendeltreppe. Der Abstand je zweier dieser Achsen ist $1/2 t$, ihr Winkel $1/2 \omega$.

Wir wollen uns auch noch rechnerisch überzeugen, daß alle diese Operationen

$$\mathfrak{A}_i, \mathfrak{U}_i, \mathfrak{B}_i$$

eine Gruppe bilden, und zwar eine Gruppe, die durch die beiden Bewegungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U}$ bestimmt ist. Dies ist eine unmittelbare Folge des Satzes 3 von Kap. IV. Aus ihm folgt nämlich, in-

¹⁾ Die Figur zeigt den Fall $n = 8$.

dem wir Gleichung 7a) von Kap. IV linksseitig mit $\mathfrak{U}$ multiplizieren

$$\mathfrak{U}\mathfrak{A} = \mathfrak{B},$$

und zwar ist die Achse v so bestimmt, daß sie auf a im Abstand $\frac{1}{2}t$ von u senkrecht steht, und daß $\angle(uv) = \frac{1}{2}\omega$ ist; wie es sein muß. In derselben Weise folgt weiter

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_1\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \text{ usw.},$$

womit der rechnerische Beweis für den Gruppencharakter erbracht ist.

Wir kehren noch einmal zu dem Drehungswinkel ω zurück. Er kann jeden beliebigen Wert annehmen. Hat er, wie beim Kreis, den Wert $\omega = 2\pi/n$, so ist nach Kap. II, § 7 $\mathfrak{A}^n(\omega, t)$ eine Translation der Länge nt parallel zur Achse a ; der Punkt P_{n-1} , der aus P durch die n -malige Schraubung hervorgeht, kann also auch durch eine Translation der Länge nt aus P gewonnen werden. Ist dagegen ω kein rationaler Winkel, so kann sich $\mathfrak{A}^n(\omega, t)$ niemals auf eine Translation reduzieren; da es in diesem Fall keine Potenz von $\mathfrak{A}(\omega)$ gibt, die der Identität äquivalent ist. Dann gehört der Gruppe eine Translation überhaupt nicht an. Denn eine Translation, die die Punkte P_i ineinander überführt, müßte doch auch den Kreiszylinder in sich überführen, und daher der Achse parallel sein. Beachten wir nun, daß die Gruppe durch die beiden Bewegungen

$$\mathfrak{A}(\omega, t) \text{ und } \mathfrak{U},$$

wie wir soeben sahen, bereits völlig bestimmt ist, so können wir schließlich den folgenden Satz aussprechen.

8. Eine Schraubung $\mathfrak{A}(\omega, t)$ und eine Umwendung $\mathfrak{U}$, deren Achse u auf der Schraubenachse a senkrecht steht, erzeugen auch bei irrationalem Winkel ω eine aus lauter endlichen Bewegungen bestehende von unendlich kleinen Bewegungen freie Raumgruppe. Eine Translation gehört dieser Gruppe nicht an.

Das zu dieser Gruppe gehörige regelmäßige Punktsystem ist aber nicht allseitig ausgedehnt und daher ohne kristallographische Bedeutung. Es kommt also für die Lösung unseres Problems nicht in Betracht.

§ 4. **Beweis einiger Hilfssätze.** Wir gehen zum Beweis des Haupttheorems über und schicken zunächst einige Hilfssätze voraus. Ein erster betrifft eine Eigenschaft irrationaler Zahlen. Er beruht auf folgendem evidenten Prinzip. Hat man n Schachteln und $n + 1$ Kugeln, und verteilt die Kugeln irgendwie in die Schachteln, so gibt es *wenigstens eine* Schachtel, in der sich *mehr als eine* Kugel befindet.

Sei ϑ eine *irrationale* Zahl. Dann ist auch jedes ganzzahlige Vielfache $m\vartheta$ irrational und liegt also zwischen zwei gewissen aufeinander folgenden ganzen Zahlen p und $p + 1$; man hat also

$$p < m\vartheta < p + 1.$$

Für die Differenz $m\vartheta - p$, die wir durch d bezeichnen, folgt hieraus

$$7) \quad d = m\vartheta - p < 1,$$

und es ist auch d irrational. Man teile nun die Einheitsstrecke in n gleiche Teile δ , deren jeder also die Länge $1/n$ hat, so wird die Zahl d in irgendeines dieser n Teilintervalle δ hineinfallen. Dies gilt, welches auch die ganze Zahl m ist. Gibt man nun dem m die $n + 1$ Werte $1, 2, 3, \dots, n + 1$, so erhält man $n + 1$ verschiedene Differenzen d , jede fällt in eines der n Teilintervalle hinein, und nach dem obigen Schachtelprinzip muß es daher mindestens ein Teilintervall δ' geben, in das *mehr als ein* Zahlenwert d hineinfällt; also wenigstens zwei. Diese zwei bezeichnen wir durch d' und d'' , und es möge d'' die größere Zahl sein. Wir haben dann, da das Intervall δ' die Länge $1/n$ hat, jedenfalls

$$0 < d'' - d' < 1/n.$$

Ferner ist gemäß 7)

$$d' = m'\vartheta - p' \text{ und } d'' = m''\vartheta - p'';$$

durch Einsetzen dieser Werte geht daher die vorstehende Ungleichung über in

$$0 < (m'' - m')\vartheta - (p'' - p') < 1/n.$$

Setzen wir nun noch

$$m'' - m' = \mu, p'' - p' = \nu,$$

so verwandelt sie sich schließlich in

$$I) \quad \mu \vartheta < \nu + 1/n.$$

In der Existenz der beiden ganzen Zahlen μ und ν , die dieser Ungleichung genügen, besteht der Hilfssatz. Sein Inhalt werde noch einmal umschrieben. Die irrationale Zahl ϑ war beliebig; ebenso aber auch die Zahl n , d. h. die Zahl der Teilintervalle der Einheitsstrecke. Welche Werte also auch ϑ und n haben mögen, es gibt stets zwei ganze Zahlen μ und ν , die die Relation I) erfüllen¹⁾.

Weitere Formeln knüpfen sich an eine Schraubung $\mathfrak{A}(\varepsilon, \tau)$, die um eine Achse a stattfindet; eine Gerade a_1 gelange durch sie in die Lage a_2 . Dann sind die beiden Winkel (aa_1) und (aa_2) einander gleich; wir setzen

$$\angle(aa_1) = \angle(aa_2) = \varphi; \angle(a_1a_2) = \varphi_1.$$

Wir legen nun durch einen Punkt O von a die Geraden $b_1 \parallel a_1$ und $b_2 \parallel a_2$, und es mögen die Achsen a, b_1, b_2 eine um O gelegte Kugel in A, B_1, B_2 durchdringen. Es ist dann

$$\widehat{AB_1} = \widehat{AB_2} = \varphi, \angle B_1AB_2 = \varepsilon, \widehat{BB_1} = \varphi_1.$$

Fällen wir also in dem gleichschenkligen sphärischen Dreieck AB_1B_2 von A die Höhe AD auf B_1B_2 , so ist

$$\angle B_1AD = 1/2 \varepsilon,$$

und wir erhalten aus dem rechtwinkligen Dreieck B_1AD unmittelbar die trigonometrische Gleichung

$$\sin B_1D = \sin B_1A \cdot \sin B_1AD$$

oder aber

$$II) \quad \sin 1/2 \varphi_1 = \sin \varphi \cdot \sin 1/2 \varepsilon.$$

Dies ist unsere zweite Hilfsformel.

¹⁾ Das Vorzeichen von μ und ν bleibt unbestimmt, ist aber auch belanglos.

²⁾ Vgl. Fig. 14 (S. 32) in der Weise, daß c, a, b durch a, b_1, b_2 zu ersetzen ist.

Eine dritte Formel erhalten wir, wenn wir die Schraubung $\mathfrak{A}(\varepsilon, \tau)$ und die Geraden a_1 und a_2 selbst in Betracht ziehen. Sei A_1 ein Punkt von a_1 . Von ihm fällen wir (Fig. 102) ein Lot A_1A' auf die Achse a ; es liegt zugleich in einer Ebene η , die auf a senkrecht steht. Wir unterwerfen nun den Punkt A_1 der Schraubung um a , und zwar möge er erst die Drehung und dann die Translation ausführen. Durch die Drehung gelange er von A_1 nach B_1 , wo B_1 in η liegt, und von B_1 durch die Translation nach A_2 , so ist $B_1A_2 = \tau$ und $B_1A_2 \perp \eta$. Durch den Punkt A_2 geht die Gerade a_2 ; ihr Schnitt mit η sei C_2 . Setzen wir nun noch

$$9) \quad A'A_1 = d, \quad A_1C_2 = \delta,$$

so finden wir zunächst aus dem Dreieck $A_1B_1C_2$

$$\delta < A_1B_1 + B_1C_2.$$

Nun ist $\sphericalangle B_1A_2C_2 = \sphericalangle(aa_2) = \varphi$ und $\sphericalangle A_1A'B_1 = \varepsilon$, also folgt

$$A_1B_1 = 2d \sin^{1/2} \varepsilon, \quad B_1C_2 = \tau \operatorname{tg} \varphi,$$

und wir erhalten weiter

$$\delta < 2d \sin^{1/2} \varepsilon + \tau \operatorname{tg} \varphi.$$

Für jeden positiven Winkel α gilt aber die Relation $\sin \alpha < \alpha$, also ergibt sich schließlich als *dritte Hilfsformel*

$$\text{III)} \quad \delta < d\varepsilon + \tau \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir fällen vom Punkte C_2 auf die Gerade a_1 das Lot C_2A_1' und bezeichnen seine Länge durch d_1 , so ergibt sich aus dem bei A_1' rechtwinkligen Dreieck $A_1C_2A_1'$

$$d_1 < \delta$$

und infolgedessen nach III) weiter

$$\text{IV)} \quad d_1 < d\varepsilon + \tau \operatorname{tg} \varphi,$$

und dies ist die *vierte Hilfsformel*. Da d der Abstand zweier Punkte von a und a_1 ist, und ebenso d_1 der Abstand zweier Punkte von a_1 und a_2 , so stellt sie eine Beziehung für die Abnahme der Abstände der Geraden a , a_1 , a_2 voneinander dar.

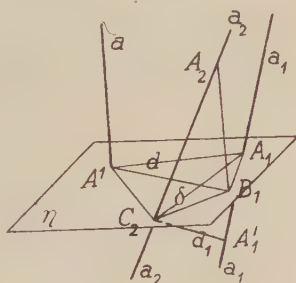


Fig. 102

Eine letzte Hilfsformel erhalten wir dadurch, daß wir die Schraubung $\mathfrak{A}(\varepsilon, \tau)$ gemäß Kap. IV, § 1 durch das Produkt aus einer Translation $\mathfrak{T}'$ und einer Schraubung $\mathfrak{A}'(\varepsilon, \tau)$ um eine zu a parallele Achse a' ersetzen, die durch A_1 hindurchgeht (Fig. 102); wir setzen also $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\mathfrak{T}'$. Da in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ dieselbe Translation τ auftritt, so hängt die Translation $\mathfrak{T}'$ (a. a. O., § 1) nur vom Winkel ε und vom Abstand der Achsen a und a' ab, also von d ; sie bestimmt sich nach Kap. III, Gl. 3) und hat daher den Wert

$$V) \quad \tau' = 2d \sin \frac{1}{2} \varepsilon,$$

und das ist unsere *fünfte* und *letzte* Hilfsformel.

Hierzu fügen wir endlich den bekannten Satz der Sphärik, daß auf der Einheitskugel der Flächeninhalt eines Dreiecks den Wert

$$\mathfrak{F} = 2\pi(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

hat, wenn α, β, γ seine drei Winkel sind.

§ 5. Unmöglichkeit irrationaler Drehungswinkel. Wir nehmen jetzt an, in einer Raumgruppe I' seien zwei Bewegungen 10)

$$\mathfrak{A}(\alpha, t_a) \text{ und } \mathfrak{B}(\beta, t_b)$$

enthalten, von denen *mindestens eine*, nämlich $\mathfrak{A}$ einen Drehungswinkel besitzt, der ein *irrationales* Verhältnis zu 2π hat. Wir setzen

$$\alpha = \vartheta 2\pi,$$

dann ist ϑ eine irrationale Zahl. Sei ferner $\mathfrak{A}_1$ die Bewegung, die aus $\mathfrak{A}$ durch Transformation mit $\mathfrak{B}$ entsteht, und a_1 ihre Achse. Die Bewegung $\mathfrak{A}_1$ gehört ebenfalls der Gruppe I' an.

Die Achse a_1 wird im allgemeinen von der Achse a verschieden sein; den einen einzigen Fall ausgenommen, daß a und b sich rechtwinklig schneiden, und $\mathfrak{B}$ eine Umwendung $11(\pi)$ ist. In diesem Fall erzeugen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ die in § 2 beschriebene Sondergruppe. Wie wir dort sahen, kommt sie für uns nicht in Betracht. Wir sehen daher von diesem Fall ab und setzen demgemäß jetzt voraus, daß $\mathfrak{B}$ *keine* Umwendung ist.

Dann fällt die Achse a_1 der Bewegung $\mathfrak{A}_1$ *nicht mit a zusammen*. Auf die Achse a wenden wir jetzt die obigen Formeln

an. Wir machen zunächst von der Formel 1) über die irrationale Zahl ϑ Gebrauch. Durch Multiplikation mit 2π folgt aus ihr

$$\mu \vartheta 2\pi < 2\pi\nu + \frac{2\pi}{n},$$

wo μ und ν ganze Zahlen sind. Die ganze Zahl n kann jeden Wert haben; wir wollen sie so wählen, daß $\frac{2\pi}{n}$ sehr klein wird. Es ist also n eine bestimmte endliche große Zahl. Beachten wir endlich noch, daß $\vartheta 2\pi = \alpha$ ist, so können wir von der vorstehenden Ungleichung zu der Gleichung

$$11) \quad \mu\alpha = 2\pi\nu + \varepsilon; \quad \varepsilon < \frac{2\pi}{n}$$

übergehen.

Wir denken uns nun die Schraubung $\mathfrak{A}(\alpha, t_a)$ μ -mal wiederholt, betrachten also ihre μ -te Potenz¹⁾

$$\mathfrak{A}^\mu = \mathfrak{A}(\mu\alpha, \mu t_a).$$

Da ν eine ganze Zahl ist, so ist diese Schraubung gemäß 11) einer Schraubung um den kleinen Winkel ε äquivalent. Allerdings hat sich die Translation μ -mal vergrößert. Die so gewonnene Schraubung bezeichnen wir durch

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0(\varepsilon, \tau); \quad \tau = \mu t_a.$$

Sie gehört der Gruppe an, und sie soll es sein, die wir dem weiteren Verfahren zugrunde legen. Es soll zu einer Schraubung führen, bei der auch die Translationskomponente sehr klein ist.

Dazu knüpfen wir an eine unbegrenzte Folge transformierter Schraubungen an, die wir folgendermaßen gewinnen: Aus der Schraubung $\mathfrak{A}_0(\varepsilon, \tau)$ um die Achse a gehe, wenn sie der Schraubung $\mathfrak{B}$ unterworfen wird, die transformierte Schraubung $\mathfrak{A}_1(\varepsilon, \tau)$ um die Achse a_1 hervor; diese Schraubung $\mathfrak{A}_1$ unterwerfen wir der Schraubung $\mathfrak{A}_0$ und erhalten dadurch die transformierte Schraubung $\mathfrak{A}_2(\varepsilon, \tau)$ um die Achse a_2 . Weiter entstehe aus $\mathfrak{A}_2(\varepsilon, \tau)$ durch die Schraubung $\mathfrak{A}_1$ die transformierte Schraubung $\mathfrak{A}_3(\varepsilon, \tau)$ um die Achse a_3 usw. Wir erhalten so eine unbegrenzte Folge von Schraubungen

¹⁾ Ist μ negativ, so wird man die positive Richtung des Drehungsinns umkehren und erhält ein positives μ , wie es der Text voraussetzt.

12) $\mathfrak{A}_0(\varepsilon, \tau), \mathfrak{A}_1(\varepsilon, \tau), \mathfrak{A}_2(\varepsilon, \tau), \dots \mathfrak{A}_3(\varepsilon, \tau), \dots, \dots,$
um die Achsen

12a) $a, a_1, a_2, a_3 \dots,$

die sämtlich der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmten Gruppe angehören müssen. Wir werden nun zeigen, daß das Produkt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A}_m \mathfrak{A}_{m+1}^{-1}$$

eine Schraubung darstellt, deren Drehungswinkel *und* Translationskomponente, wenn wir nur m groß genug wählen, beliebig klein ausfällt, die also die behauptete „unendlich kleine“ Bewegung liefert. Zuvor sei noch bemerkt, daß auch τ eine vielleicht große, aber doch *feste* endliche Länge darstellt; τ hängt zwar von n , aber nicht mehr von m ab.

Wir knüpfen an je drei aufeinanderfolgende Schraubungen der Reihe 13) an und wenden auf sie die Formeln II) und IV) an; wir setzen zuvor

14) $\mathfrak{X}(aa_1) = \varphi, \mathfrak{X}(a_1a_2) = \varphi_1, \mathfrak{X}(a_2a_3) = \varphi_2$ usw.

Die Formeln II) und IV) liefern zunächst für die Achsen a, a_1, a_2 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varphi_1 &= \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \sin \varphi \text{ und} \\ 15) \quad d_1 &< d \cdot \varepsilon + \tau \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

Die erste dieser beiden Relationen verwandeln wir noch in eine Ungleichung. Dazu multiplizieren wir sie mit der Ungleichung

$$2 \cos \frac{1}{2} \varphi_1 < 2$$

und finden

$$2 \sin \frac{1}{2} \varphi_1 \cos \frac{1}{2} \varphi_1 < 2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin \varphi.$$

Die linke Seite hat den Wert $\sin \varphi_1$; ferner ist $\sin \frac{1}{2} \varepsilon < \frac{1}{2} \varepsilon$ und wir finden daher schließlich

$$16) \quad \sin \varphi_1 < \varepsilon \sin \varphi.$$

Diese Relation gibt uns bereits das Resultat, daß, wenn ε eine kleine Größe ist, auch $\sin \varphi_1$, also auch φ_1 selbst eine kleine Größe von der gleichen Ordnung ist.

Die Formeln 15) und 16) müssen nun auf je drei aufeinanderfolgende Achsen der Reihe 13a) übertragen werden; zunächst also auf a_1, a_2, a_3 . Wir müssen also von einem Punkt der Achse a_2 aus in der gleichen Weise konstruktiv verfahren, wie wir es bei der Ableitung der Hilfsformeln vom Punkt A_1 aus taten. Der Punkt A_1 war ein *beliebiger* Punkt der Achse a_1 ; ebenso darf daher der Punkt der Achse a_2 ein beliebiger Punkt sein. Wir wählen für ihn den Punkt C_2 von Fig. 102. Das von ihm auf die Achse a_1 gefällte Lot $C_2A'_1 = d_1$ bestimmt eine Ebene $\eta_1 \perp a_1$, mit der wir ebenso operieren können¹⁾, wie oben mit η ; sie schneide a_3 in einem Punkt C_3 und von C_3 fallen wir das Lot $C_3A'_2$ auf a_2 . Dann gilt für d_2 und d_1 die Formel IV, also

$$17) \quad d_2 < d_1 \varepsilon + \tau \operatorname{tg} \varphi$$

und zu ihr kommt noch die zu 16) analoge Relation

$$18) \quad \sin \varphi_2 < \varepsilon \sin \varphi_1.$$

Die Formeln zeigen, daß φ_2 eine kleine Größe zweiter Ordnung und d_2 eine kleine Größe erster Ordnung ist.

Analoge Formeln können wir für je drei aufeinanderfolgende Achsen ableiten; sie werden die Form haben

$$19) \quad \begin{aligned} d_{m+1} &< d_m \cdot \varepsilon + \tau \operatorname{tg} \varphi, \\ \sin \varphi_{m+1} &< \varepsilon \sin \varphi_m, \end{aligned}$$

wo d_m der Abstand zweier Punkte ist, die in gewisser Weise auf a_m und a_{m+1} liegen. Sie zeigen, daß φ_{m+1} eine *kleine Größe der $(m+1)$ ten Ordnung* und daher d_{m+1} eine *kleine Größe von der m ten Ordnung* ist. Nun war $\varphi_m = \angle(a_m a_{m+1})$; wir folgern daher, daß die Richtungen der Achsen a_m und a_{m+1} *immer weniger voneinander abweichen*, und ebenso zeigt das Abnehmen von d_m , daß sie *auch selbst einander immer näher kommen*.

Wir kehren nun zu dem schon oben genannten Produkt

$$20) \quad \Re = \mathfrak{A}_m \mathfrak{A}_{m+1}^{-1} = \Re(\varrho, t_r)$$

zurück; es ist nach dem Vorstehenden ein Produkt von zwei Schraubungen gleicher Art, die um zwei beinahe parallele,

¹⁾ Vgl. Fig. 103 (S. 234), die sich auf eine beliebige Achse a_m bezieht.

sehr naheliegende Achsen im umgekehrten Sinn vor sich gehen. Dies Produkt soll uns die „unendlich kleine“ Bewegung liefern, also eine Schraubung, für die sowohl der Drehungswinkel ϱ , wie auch die Translation t_r beliebig klein werden, wenn wir m groß genug wählen.

Um die Schraubung $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, erinnern wir zunächst an die in Fig. 103 dargestellte Lage der Achsen a_m und a_{m+1} . Analog zu Fig. 102 (S. 229) konstruieren wir eine Ebene $\eta_m \perp a_m$, die a_m in A'_m und a_{m+1} in C_{m+1} schneidet, und es ist $A'_m C_{m+1} = d_m$. Wir wollen nun zunächst $\mathfrak{U}_m$ und $\mathfrak{U}_{m+1}$ durch ihre volleren Ausdrücke

$$\mathfrak{U}_m = \mathfrak{T}_m \mathfrak{U}_m(\varepsilon), \quad \mathfrak{U}_{m+1} = \mathfrak{U}_{m+1}(\varepsilon) \mathfrak{T}_{m+1}$$

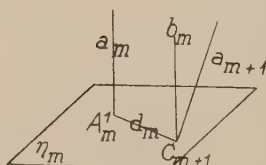


Fig. 103

ersetzen, wo $\mathfrak{T}_m$ und $\mathfrak{T}_{m+1}$ die Länge τ haben und vektoriell in a_m und a_{m+1} fallen. Wir finden so zunächst

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{T}_m \mathfrak{U}_m(\varepsilon) \mathfrak{U}_{m+1}^{-1}(\varepsilon) \mathfrak{T}_{m+1}^{-1}.$$

Wir zeichnen nun $b_m \parallel a_m$ durch den Punkt C_{m+1} und können nach Kap. III, § 1 die Drehung $\mathfrak{U}_m(\varepsilon)$ durch eine Translation $\mathfrak{T}'$ und eine Drehung $\mathfrak{B}_m(\varepsilon)$ um die Achse b_m ersetzen, und zwar hat diese Translation nach Hilfsformel V) die Länge

$$\tau' = 2 d_m \sin^{1/2} \varepsilon.$$

Somit erhalten wir jetzt

$$21) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{T}_m \mathfrak{T}' \mathfrak{B}_m(\varepsilon) \cdot \mathfrak{U}_{m+1}^{-1}(\varepsilon) \cdot \mathfrak{T}_{m+1}^{-1}.$$

Hier liefert das Produkt $\mathfrak{B}_m(\varepsilon) \cdot \mathfrak{U}_{m+1}^{-1}(\varepsilon)$, da die Achsen b_m und a_{m+1} beide durch C_{m+1} gehen, eine Drehung vom Winkel ϱ um eine durch C_{m+1} gehende Achse r ; damit haben wir $\mathfrak{R}$ in eine Form gebracht, die die Bestimmung des Winkels ϱ und der Translation t_r leicht gestattet. Wir beginnen mit der Translation t_r ; es ist aber nur nötig, ihre Größenordnung abzuschätzen. Sie hängt ab von den drei Translationen $\mathfrak{T}_m$, $\mathfrak{T}_{m+1}$ und $\mathfrak{T}'$, genauer von ihrer vektoriellen Summe, und ist diejenige Komponente dieser Summe, die in die Achse r von $\mathfrak{R}$ fällt. Wir bestimmen zunächst die Resultante der Translationen $\mathfrak{T}_m = OT_m$

und $\mathfrak{T}_{m+1}^{-1} = OT_{m+1}$ (Fig. 104); sie sind zu a_m und a_{m+1} parallel und haben beide die Länge τ , so daß also $\angle T_m OT_{m+1} = \pi - \varphi_m$ ist; sie liefern daher als Resultante die Translation

$$OT' = 2 OT_m \sin \frac{1}{2} \varphi_m = 2 \tau \sin \frac{1}{2} \varphi_m.$$

Diese Translation haben wir nun noch mit $\mathfrak{T}'$ zusammenzusetzen, und dann die Komponente längs r zu ermitteln. Diese Komponente ist aber sicher nicht größer als die Summe der Längen von OT' und $\mathfrak{T}'$ selbst, d. h. also

$$22) \quad 2 d_m \sin \frac{1}{2} \varepsilon + 2 \tau \sin \frac{1}{2} \varphi_m,$$

und dieser Ausdruck stellt eine kleine Größe der m ten Ordnung dar. Diese Größenordnung überträgt sich daher erst recht auf die Komponente t_r .

Es ist nun noch der Winkel ϱ abzuschätzen.

Hierzu dient der am Schluß von § 4 genannte Hilfssatz, und zwar unter Hinweis auf die Figur 14 des Eulerschen Satzes (S. 32). Für das in 21) enthaltene Produkt $\mathfrak{B}_m \mathfrak{A}_{m+1}^{-1}$ nimmt diese Figur die Besonderheit an, daß der Bogen AB die Größe φ_m hat, und die Winkel α und β den Wert ε ; überdies

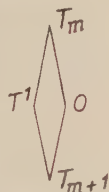


Fig. 104

sind jetzt die Bogen AC und BC — wegen $\mathfrak{A}_{m+1}^{-1}$ — nach entgegengesetzten Seiten von AB gerichtet. Das Dreieck ABC geht daher in ein sehr schmales sphärisches Dreieck über, dessen an AB liegende Winkel die Werte $\frac{1}{2} \varepsilon$ und $\pi - \frac{1}{2} \varepsilon$ besitzen. Dieses Dreieck hat einen sehr kleinen Flächeninhalt, und daher eine Winkelsumme, deren Überschuß über π nach dem genannten Hilfssatz beliebig klein gemacht werden kann. Da nun die Winkel bei A und B bereits die Summe π besitzen, so muß ϱ beliebig klein werden können, und damit ist unser Satz bewiesen. Das Produkt $\mathfrak{R}$ liefert, wenn wir nur m hinlänglich groß wählen, eine Schraubung, bei der Winkel und Translation jeden Grad der Kleinheit erreichen können; d. h.:

Hauptsatz I. Bei den kristallographisch verwendbaren Raumgruppen stehen die Drehungswinkel sämtlich in einem rationalen Verhältnis zu 2π .

Nur die so bestimmten Gruppen bilden den Gegenstand unserer Untersuchung; auf sie allein wenden wir im folgenden die Bezeichnung *Raumgruppen* an.

§ 6. Die in den Raumgruppen enthaltenen Translationengruppen. Seien

$$23) \quad \mathfrak{A}(\alpha, t_a), \mathfrak{B}(\beta, t_b), \mathfrak{C}(\gamma, t_c) \dots$$

die sämtlichen in einer Raumgruppe Γ enthaltenen Drehungen und Schraubungen, und es seien $a, b, c, \dots$ ihre Achsen. Wir legen durch einen Punkt O die Geraden $a', b', c' \dots$ parallel zu $a, b, c, \dots$ und betrachten die zu den Operationen von 23) isomorphen Drehungen

$$23a) \quad \mathfrak{A}'(\alpha), \mathfrak{B}'(\beta), \mathfrak{C}'(\gamma) \dots,$$

so bilden sie ebenfalls eine Gruppe, und zwar eine zu Γ isomorphe Punktgruppe G . Dies folgt unmittelbar aus dem Satz 9 von Kap. IV. Denn ist

$$\mathfrak{A}(\alpha, t_a) \cdot \mathfrak{B}(\beta, t_b) = \mathfrak{L} \text{ und } \mathfrak{A}'(\alpha)\mathfrak{B}'(\beta) = \mathfrak{L}',$$

so sind nach ihm auch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ isomorphe Operationen; und da $\mathfrak{L}$ der Gruppe Γ angehört, so kommt auch $\mathfrak{L}'$ in der Reihe 23a) vor, und dies ist die Behauptung.

Nun haben wir soeben bewiesen, daß alle Drehungswinkel $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ von Γ in einem rationalen Verhältnis zu 2π stehen; außerdem können sie nicht beliebig klein sein. Das gleiche gilt daher auch von den Drehungen der Gruppe G . Damit haben wir die Haupttatsache gewonnen, deren wir benötigt sind. Die sämtlichen diesen beiden Voraussetzungen entsprechenden Punktgruppen haben wir nämlich in Kap. V, § 9 bestimmt, und wir folgern somit, daß die zu Γ isomorphe Gruppe G in allen Fällen nur eine der dort aufgeführten Gruppen sein kann. Wir fanden drei Arten solcher Gruppen: die zyklischen Gruppen C_n für jedes n ; die Diëdergruppen D_n für jedes n ; und die Gruppen der regelmäßigen Körper. Zu ihnen muß daher die zu Γ isomorphe Gruppe G gehören.

Welches nun auch diese Gruppe G sei, so wissen wir, daß sie nur eine *endliche* Zahl verschiedener Achsenrichtungen aufweist; es kann also auch in Γ nur eine endliche Zahl ver-

schieden gerichteter Achsen vorkommen. Aber ihr gehören doch unendlich viele Achsen an; und so folgt, daß es auch unendlich viele Achsen geben muß, die *derselben* Achse von G parallel sind; d. h. also unendlich viele Bewegungen von gleicher Achsenrichtung und gleichem Drehungswinkel. Dies gilt sogar, wie wir sehen werden, für eine jede Achsenrichtung von Γ^1). Nun gibt es in der Gruppe Γ zu jeder Bewegung $\mathfrak{A}$ auch die inverse Bewegung; es gibt also auch Bewegungen um parallele Achsen von entgegengesetztem Winkel und diese bedingen gemäß Kap. IV, § 1 Translationen von endlicher Größe. Da das Produkt von zwei Translationen wieder eine Translation ist, so bilden alle diese Translationen selbst eine Gruppe; mit andern Worten, in jeder Raumgruppe Γ ist eine Translationsgruppe Γ_T als Untergruppe enthalten; d. h.

Hauptsatz II. In jeder Raumgruppe Γ von kristallographischer Bedeutung ist eine Gruppe Γ_T von Translationen als Untergruppe enthalten.

Damit haben wir das schon mehrfach erwähnte wichtige Theorem erreicht, das eines der Hauptresultate der Theorie ist. Auf zwei Einzelheiten ist noch hinzuweisen.

1) Die Translationengruppen haben wir in Kap. VIII und IX sämtlich erörtert; sie sind entweder linear oder eben oder räumlich. Von einer linearen oder ebenen Translationsgruppe haben wir aber bei den allseitig ausgedehnten Strukturen abzusehen und werden daher nur den Fall räumlicher Translationsgruppen Γ_T in Betracht ziehen²⁾.

¹⁾ Vgl. § 1 des nächsten Kapitels.

²⁾ Man kann keineswegs beweisen, daß eine jede der von uns betrachteten Gruppen Γ (also der Gruppen mit rationalen Drehungswinkeln) eine räumliche Translationsgruppe enthält. Wenn z. B. die zu Γ isomorphe Drehungsgruppe G eine zyklische Gruppe C_n ist, so sind alle Achsen von Γ der n -zähligen Achse von C_n parallel; und solche Gruppen existieren in der Tat auch so, daß die Translationsgruppen Γ_T eben oder gar linear ist. Wir erhalten sie aus den Gruppen Γ mit räumlicher Gruppe Γ_T , indem wir einer oder zwei der primitiven Translationen von Γ_T den Wert Null geben. Dieser Umstand bedingt auch die allgemeine Form, die wir für den Beweis des Hauptsatzes gewählt haben.

2) Ist $\mathfrak{T}$ eine Translation einer Gruppe Γ und $\mathfrak{Q}$ irgend-eine Operation von Γ , so gehört auch die Translation, in die $\mathfrak{T}$ durch die Operation $\mathfrak{Q}$ übergeht, der Gruppe Γ an; wir setzen

$$24) \quad \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}_1.$$

Die Translation $\mathfrak{T}_1$ wird im allgemeinen von $\mathfrak{T}$ verschieden sein; sie gehört aber stets zu Γ_τ . Dies gilt für jede Translation $\mathfrak{T}$ von Γ_τ und für jede Operation $\mathfrak{Q}$ von Γ . Wir können dies kurz folgendermaßen aussprechen:

10. *Die Translationengruppe Γ_τ einer Raumgruppe Γ wird durch jede Operation $\mathfrak{Q}$ von Γ in sich transformiert.*

Man drückt dies auch durch die Gleichung

$$24a) \quad \mathfrak{Q}^{-1}\Gamma_\tau\mathfrak{Q} = \Gamma_\tau$$

aus. Ihre Bedeutung ist die, daß sie die *unendlich vielen Gleichungen 24) zusammenfaßt*, die für jede einzelne Translation existieren.

§ 7. Symmetriegesetz und Gesetz der rationalen Indizes.

Mit dem Hauptsatz I ist die erstrebte Verbindung der Theorie mit den Erfahrungsgesetzen der Kristallographie erreicht. Auf Grund des soeben abgeleiteten Satzes 10 folgert man zunächst den Inhalt des *Symmetriegesetzes*. Nach diesem Satz führt jede in einer Raumgruppe enthaltene Operation $\mathfrak{Q}$ die Translationengruppe Γ_τ in sich über; die Operation $\mathfrak{Q}$ muß daher einer solchen Drehung oder Spiegelung isomorph sein, die eine Deckoperation für Γ_τ ist. Drehungen, die Deckoperationen einer Gruppe Γ_τ sind, können aber nur 2-, 3-, 4-, 6-zählig sein, und so folgt:

Hauptsatz III. Achsen, die in einer Raumgruppe auftreten, sind stets 2-, 3-, 4-, 6-zählig.

Die Punktgruppen G , denen eine jede Raumgruppe Γ gemäß § 5 isomorph ist, werden durch diesen Satz auf die bekannten kristallographischen Gruppen beschränkt; also folgt weiter:

Hauptsatz IV. Jede Raumgruppe Γ ist einer der 32 kristallographischen Gruppen isomorph.

Wir haben endlich noch das *Gesetz der rationalen Indizes* als eine Folge der Theorie nachzuweisen. Dieses Gesetz

zerfällt bekanntlich inhaltlich in zwei ihrer Natur nach verschiedene Teile. Der eine Bestandteil kommt darauf hinaus, daß als Symmetrieachsen eines Kristalles nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Achsen auftreten, er bezieht sich demgemäß auf die durch das Symmetriegesetz verbundenen Flächen eines Kristalles; der andere zeigt den Zusammenhang, der beliebige gleichsam unabhängige Kristallflächen miteinander verbindet. Der erste Satz hat sich als eine unmittelbare Folgerung der Strukturhypothese erkennen lassen, während die Ableitung des zweiten erst eine Angabe darüber erforderlich macht, welche Lagenbeziehung eine Ebenenschaar zur Anordnung der Kristallbausteine haben muß, wenn wir in ihr mögliche Kristallflächen erblicken wollen.

Schon Bravais hat eine einfache Hypothese hierüber ausgesprochen. Sie besagt, daß *jede Netzebene der in der Raumgruppe enthaltenen Translationengruppe Γ_T die Richtung einer möglichen Kristallfläche darstellen kann*. Es ist ersichtlich, daß das Gesetz der rationalen Indizes hieraus unmittelbar entspringt. Werden nämlich irgend drei Translationen eines primitiven Tripels als Koordinatenachsen gewählt, so sind in ihnen drei willkürlich gewählte Netzebenen (also auch Kristallflächen) vorhanden und man zeigt leicht, daß für jede andere Netzebene (mögliche Kristallfläche) die Indizes rational sind. Sind nämlich $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ und ξ'', η'', ζ'' die Koordinaten von drei Punkten, die eine Netzebene bestimmen, so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\xi &= 2\mu_1\tau_1, & \eta &= 2\mu_2\tau_2, & \zeta &= 2\mu_3\tau_3, \\ \xi' &= 2\nu_1\tau_1, & \eta' &= 2\nu_2\tau_2, & \zeta' &= 2\nu_3\tau_3, \\ \xi'' &= 2\pi_1\tau_1, & \eta'' &= 2\pi_2\tau_2, & \zeta'' &= 2\pi_3\tau_3,\end{aligned}$$

wo alle Koeffizienten ganze Zahlen sind. Die Gleichung der Netzebene setzen wir am einfachsten in die Form

$$\begin{vmatrix} x - \xi, & y - \eta, & z - \zeta \\ x - \xi', & y - \eta', & z - \zeta' \\ x - \xi'', & y - \eta'', & z - \zeta'' \end{vmatrix} = 0$$

und erkennen unmittelbar, daß durch das Ausmultiplizieren der Determinante immer nur ganzzahlige Koeffizienten auftreten.

Die Indizes der Netzebene sind also sämtlich rational. *Das Gesetz der rationalen Indizes erscheint somit in seinem vollem Umfang als unmittelbare und prinzipielle Folgerung der regelmäßigen Anordnung.*

Nimmt man noch an, daß diejenigen Netzebenen am leichtesten und öftesten als Kristallflächen auftreten, die am dichtesten mit Netzpunkten besetzt sind, die also (Kap. VIII, § 9) in möglichst großen Abständen aufeinander folgen, so würde damit auch der Umstand erklärt sein, daß die Indizes sich im allgemeinen als Verhältnisse kleiner ganzer Zahlen darstellen.

Kap. XII. Allgemeine Sätze über Raumgruppen

Vorbemerkung. Die Grundlegung der Theorie ist durch das vorstehende Kapitel erledigt; ihr hat die Ableitung aller vorhandenen Gruppen und Strukturen und die Darlegung ihrer geometrischen und kristallographischen Eigenart zu folgen. Zwei Aufgaben allgemeiner Art harren der Erledigung. In erster Linie haben wir den inneren Bau der Raumgruppen und ihre Beziehung zu den 32 Punktgruppen zu studieren; wir werden dabei auf gewisse Gesetze der Isomorphie stoßen, die die Ableitung aller Gruppen in einfacher Weise ermöglichen. Zweitens haben wir den Zusammenhang zwischen Raumgruppe und Struktur näher zu erörtern. Die Struktur ergibt sich so aus der Raumgruppe, daß wir einen beliebigen Baustein allen Operationen der Raumgruppe unterwerfen, also ganz analog wie die Kristallform aus der Punktgruppe; die einfache Analogie zwischen Symmetrie um einen Punkt herum und raumerfüllender Symmetrie tritt darin zutage. Der Aufbau der Struktur kann aber von der Anfangslage des Bausteines abhängig sein; so entsteht die Aufgabe, diese Abhängigkeit zu untersuchen. Insbesondere kann die Anfangslage dem Baustein eine gewisse ihm notwendig anhaftende Eigensymmetrie aufprägen; die Bedingungen dafür und ihre Folgen werden zu entwickeln sein.

§ 1. **Isomorphie zwischen Punktgruppen und Raumgruppen.** Nach dem Hauptsatz II des vorigen Kapitels wohnt jeder Raumgruppe Γ eine Translationengruppe Γ_t inne; sie ist

es, die die Isomorphie zwischen Raumgruppe und Punktgruppe beherrscht.

Die Translationengruppe I'_τ enthält unendlich viele Translationen; wir bezeichnen sie von nun an durch

$$1) \quad I'_\tau = \{\mathfrak{T}_i\} = 1, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots \mathfrak{T}_i, \dots$$

Sei ferner $\mathfrak{L}'$ eine Operation von G und $\mathfrak{L}$ eine zu $\mathfrak{L}'$ isomorphe Operation von Γ . Da I' unendlich viele Operationen enthält, so läßt sich erwarten, daß in I' auch unendlich viele zu $\mathfrak{L}'$ isomorphe Operationen existieren. Dies ist in der Tat der Fall. Setzen wir nämlich

$$2) \quad \mathfrak{L}\mathfrak{T}_i = \mathfrak{L}_i,$$

so ist $\mathfrak{L}_i$ eine Operation von I' und zugleich (Kap. IV, § 5) zu $\mathfrak{L}'$ isomorph. Die Gesamtheit der so (d. h. durch Multiplikation mit den $\mathfrak{T}_i$) aus $\mathfrak{L}$ entstehenden zu $\mathfrak{L}'$ isomorphen Operationen bezeichnen wir durch

$$3) \quad \{\mathfrak{L}_i\} = \mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots \mathfrak{L}_i, \dots$$

wofür wir auch, mit Rücksicht auf Gleichung 2) in zusammenfassender Bezeichnung

$$3a) \quad \{\mathfrak{L}_i\} = \{\Gamma\mathfrak{L}_\tau\}$$

schreiben wollen. Wir erkennen aber auch leicht, daß es in Γ keine andern zu $\mathfrak{L}'$ isomorphen Operationen geben kann. Um dies zu zeigen, erörtern wir zunächst die Vorfrage, welche Operationen von Γ der Identität von G isomorph sind. Gemäß dem Begriff der Isomorphie (Kap. IV, § 5) sind es nur solche Operationen von I' , die, genau wie die Identität, weder an eine Achse noch an eine Ebene oder einen Punkt gekettet sind, und dies sind nur die Translationen von I'_τ . Also folgt:

1. Bei der Isomorphie zwischen einer Raumgruppe Γ und einer Punktgruppe G entspricht der Identität von G die Translationengruppe I'_τ von Γ ; genauer die Gesamtheit ihrer Translationen.

Nun haben wir am Schluß von Kap. IV den Hilfssatz bewiesen, daß das Produkt von zwei entgegengesetzten isomorphen Operationen eine Translation ist. Seien also $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ irgend

zwei Operationen der Schaar 3), so besteht für sie nach diesem Satz die Gleichung

$$\mathfrak{L}_1^{-1}\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{T}, \text{ also } \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1\mathfrak{T}.$$

Andererseits gilt für die zu $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ isomorphe Operation $\mathfrak{L}'$

$$\mathfrak{L}'^{-1}\mathfrak{L}' = 1;$$

nach Satz 1 muß daher $\mathfrak{T}$ eine Translation von Γ_τ sein. Das ist aber die obige Behauptung. Wir haben sie sogar in einem verallgemeinerten Sinn bewiesen. Denn man hat auch

$$\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1^{-1} = \mathfrak{T}', \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{T}'\mathfrak{L}_1,$$

wo nun auch $\mathfrak{T}'$ eine Translation von Γ_τ ist. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

1a. Bei der Isomorphie zwischen einer Raumgruppe Γ und einer Punktgruppe G entspricht jeder Operation $\mathfrak{L}'$ von G die Schaar aller isomorphen Operationen

$$\{\mathfrak{L}_i\} = \{\mathfrak{L}\Gamma_\tau\} = \{\Gamma_\tau\mathfrak{L}\},$$

die sich aus irgendeiner zu $\mathfrak{L}'$ isomorphen Operation $\mathfrak{L}$ durch Multiplikation mit den Translationen von Γ ergeben.

Alle diese Operationen $\mathfrak{L}_i$ sind an Achsen und Ebenen gebunden, die der Achse oder Ebene von $\mathfrak{L}$ parallel sind.

Die Gesetze der Isomorphie zwischen G und Γ wollen wir nun weiter verfolgen. Dazu schicken wir eine Folgerung aus den vorstehenden Formeln voraus. Seien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ irgend zwei Translationen von Γ_τ , und sei insbesondere $\mathfrak{T}_1\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{L}_2$, so haben wir

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{L}\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{L}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{L}_2,$$

es ist also auch $\mathfrak{T}_1\mathfrak{L}\mathfrak{T}_2$ eine zu $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ isomorphe Operation. Weiter führen wir die folgende bleibende Bezeichnung ein. Wir bezeichnen (wie S. 236) die Operationen der Punktgruppe G durch

$$4) \quad 1, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \dots \mathfrak{H}'.$$

Ferner seien jetzt

$$4a) \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots \mathfrak{H}$$

irgendwelche Operationen von Γ , die den Operationen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, ... $\mathfrak{H}'$ isomorph sind, die aber sonst zunächst unbestimmt bleiben mögen. Dann lassen sich die Operationen von Γ nach Satz 1) und 1a) in die Form setzen

$$\Gamma_i, \{\mathfrak{A}\Gamma_i\}, \{\mathfrak{B}\Gamma_i\}, \dots \{\mathfrak{H}\Gamma_i\}$$

oder, in anderer Schreibweise

$$\{\mathfrak{T}_i\}, \{\mathfrak{A}_i\}, \{\mathfrak{B}_i\}, \dots \{\mathfrak{H}_i\},$$

und wir wollen zeigen, in welcher Art sie die obengenannte Isomorphieeigenschaft erfüllen. Sind $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ zwei Operationen, die zu $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ isomorph sind, so soll der Gleichung

$$6) \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}'$$

von G der Isomorphie gemäß die Gleichung

$$6a) \quad \mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_k = \mathfrak{C}_l$$

zur Seite stehen, wo $\mathfrak{C}_l$ eine wohlbestimmte zu $\mathfrak{C}'$ isomorphe Operation der Schaar $\{\mathfrak{C}_i\}$ ist; ihr Index l bleibt zwar unbestimmt, doch ist dies ohne Belang. Nun haben wir doch für gewisse Translationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{T}_1\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}'\mathfrak{T}_2,$$

also auch

$$\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_k = \mathfrak{T}_1\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{C}'\mathfrak{T}_2,$$

und damit ist in der Tat $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_k$ als eine zu $\mathfrak{C}'$ isomorphe Operation $\mathfrak{C}_l$ erwiesen. Wir können dies allgemeiner auch so ausdrücken, daß der Gleichung 6) die Gleichung

$$6b) \quad \{\mathfrak{A}_i\}\{\mathfrak{B}_i\} = \{\mathfrak{C}_i\}$$

entspricht; in der Bedeutung, daß das Produkt irgend zweier Operationen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ stets einer gewissen Operation $\mathfrak{C}_l$ äquivalent ist. Damit ist die Eigenart der Isomorphie zwischen einer Gruppe G und einer Gruppe Γ gekennzeichnet.

§ 2. **Reduzierte Operationen.** Wir haben uns in Kap. I von vornherein auf Drehungen beschränkt, deren Winkel kleiner als 2π ist; jede Drehung ist einer solchen Drehung äquivalent. Eine analog vereinfachende Festsetzung wollen wir auch für die in einer Gruppe Γ auftretenden Operationen treffen.

Ist a eine n -zählige Schraubenachse einer Gruppe Γ , und 2τ die primitive Translation längs a , so soll die Schraubung $\mathfrak{A}^{(2\pi/n, t)}$ *reduziert* heißen, falls $0 < t < 2\tau$ ist. Von einer reduzierten Schraubung $\mathfrak{A}^{(2\pi/n, t)}$ von Γ beweisen wir, daß t *einen der Werte*

$$7) \quad 0, \frac{2\tau}{n}, \frac{4\tau}{n}, \dots (n-1) \frac{2\tau}{n}$$

besitzt. . . . Zugleich mit der Schraubung $\mathfrak{A}$ ist nämlich auch $\mathfrak{A}^n$ eine Operation der Gruppe. Diese Operation stellt aber nach Kap. II, § 7 eine Translation der Länge nt dar, und wir folgern daher, daß nt ein Vielfaches von 2τ ist; also

$$nt = 2m\tau; \quad t = m/n \cdot 2\tau.$$

Geben wir nun der ganzen Zahl m alle Werte, bei denen $t < 2\tau$ ist, so erhalten wir genau die n Werte der Reihe 7).

Insbesondere entsprechen für die Werte $n = 3, 4, 6$ den reduzierten Bewegungen nur die Translationen

$$0, \frac{2}{3}\tau_z, \frac{4}{3}\tau_z; \quad 0, \frac{1}{2}\tau_z, \tau_z, \frac{3}{2}\tau_z; \\ 0, \frac{1}{3}\tau_z, \frac{2}{3}\tau_z, \tau_z, \frac{4}{3}\tau_z, \frac{5}{3}\tau_z.$$

Die 3-, 4-, 6-zähligen Schraubungen mit den Translationen

$$a) \frac{2}{3}\tau_z, \frac{4}{3}\tau_z; \quad b) \frac{1}{2}\tau_z, \frac{3}{2}\tau_z; \quad c) \frac{1}{3}\tau_z, \frac{5}{3}\tau_z; \quad \frac{2}{3}\tau_z, \frac{4}{3}\tau_z$$

haben *entgegengesetzten Windungssinn*.

Wir haben in § 1 die Gruppe Γ mit gewissen Operationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots \mathfrak{H}$ aufgebaut und zeigen nun, daß wir die in dieser Reihe enthaltenen Schraubungen stets in reduzierter Form wählen können. Sei nämlich $\mathfrak{A}^{(2\pi/n, t_a)}$ eine Schraubung, für die $t_a > 2\tau$ ist. Dann wird in t_a ein Vielfaches von 2τ enthalten sein; wir können also setzen

$$t_a = 2\lambda\tau + t_1; \quad t_1 < 2\tau.$$

Bezeichnen wir die Translation 2τ durch $\mathfrak{T}$, so gehört der Gruppe auch die Operation

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{T}^{-\lambda} = \mathfrak{A}^{(2\pi/n, t_a - 2\lambda\tau)} = \mathfrak{A}^{(2\pi/n, t_1)}$$

an, und dies ist eine Schraubung, deren Translation positiv und kleiner als 2τ ist; also eine reduzierte Schraubung. Da sie ein

Produkt aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{T}^{-1}$ ist, so gehört sie der Schaar $\{\mathfrak{A}_i\}$ an, und wir dürfen also in der Tat auch sie als die Operation $\mathfrak{A}$ der Reihe 4a) wählen.

Ein ähnlicher Sachverhalt besteht für eine Gleitspiegelung $\mathfrak{S}(t)$. Der Gruppe Γ , die $\mathfrak{S}(t)$ enthält, gehört auch $\mathfrak{S}^2(t)$ an, und dies ist nach Kap. II, § 7 eine Translation der Länge $2t$. Sie muß eine Translation von Γ_t sein. Sind also $2\tau_1$ und $2\tau_2$ das primitive Paar für die Ebene σ von $\mathfrak{S}(t)$, so haben wir

$$2t = 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2; \quad t = m_1\tau_1 + m_2\tau_2.$$

Wir spalten nun von m_1 und m_2 die größten in ihnen enthaltenen geraden Zahlen ab, setzen also

$$m_1 = 2p_1 + q_1, \quad m_2 = 2p_2 + q_2$$

und erhalten

$$t = 2p_1\tau_1 + 2p_2\tau_2 + q_1\tau_2 + q_2\tau_2 = 2\tau' + t';$$

$$t' = q_1\tau_1 + q_2\tau_2.$$

Hier ist $2\tau'$ eine Translation der Gruppe; dagegen ist t' , da q_1 und q_2 nur die Werte 0 und 1 haben können, eine *halbe* Translation. Bezeichnen wir wieder $2\tau'$ durch $\mathfrak{T}$, so ist auch

$$\mathfrak{S}(t)\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{S}(t - 2\tau') = \mathfrak{S}(t')$$

eine Operation der Gruppe. Sie stellt eine Operation dar, bei der t' nur einen der vier Werte

$$8) \quad 0, \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2$$

haben kann. Wir bezeichnen sie ebenfalls als eine *reduzierte* Operation und erkennen wie oben, daß wir die in der Reihe 4a) auftretenden Operationen der Form $\mathfrak{S}(t)$ ebenfalls in reduzierter Form annehmen dürfen.

§ 3. **Sätze über die Erzeugung der Raumgruppen.** Die Erzeugung der Raumgruppen geht der Erzeugung der Punktgruppen parallel; auch für ihre Erzeugung gelten, wie wir erkennen werden, die Gesetze der Isomorphie. Sei zunächst an den Weg erinnert, auf dem wir zu den sämtlichen Punktgruppen gelangten. Er nahm seinen Ausgangspunkt von den Sätzen 12 und 13 in Kap. V und 5 in Kap. VI. Wir erzeugten aus den zyklischen Gruppen die Diödergruppen, aus der Vierergruppe

die Tetraedergruppe und aus ihr die Oktaedergruppe; ebenso ganz allgemein aus den Gruppen erster Art die Gruppen zweiter Art, und zwar auf Grund des folgenden Erzeugungsprinzips: Jede Operation $\mathfrak{Q}'$, die die Achsen einer Punktgruppe G in sich überführte, ohne aber selbst zu G zu gehören, lieferte durch Multiplikation mit G eine neue Gruppe G_1 . Diese Methode wird uns auch zur Gesamtheit der Raumgruppen führen. Um sie insgesamt zu erhalten, haben wir Schritt für Schritt solche Operationen $\mathfrak{Q}$ zu suchen, die Deckoperationen für das Achsen-system einer schon vorhandenen Gruppe Γ sind; immer liefern sie durch Multiplikation mit Γ eine neue Gruppe Γ_1 . Damit ist bereits ein allgemeiner Ausblick auf den Plan unserer Untersuchungen eröffnet.

Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Sätzen, zunächst dem folgenden:

2. *Jede Raumgruppe Γ zweiter Art enthält eine Raumgruppe erster Art als Untergruppe.*

Der Beweis folgt unmittelbar dem Beweis des analogen Satzes für Punktgruppen in Kap. VI. Von diesem Satz haben wir den gleichen Gebrauch zu machen, wie in Kap. VI; auch hier werden wir also zunächst die Gruppen Γ bestimmen, die nur Bewegungen enthalten, und von ihnen zu den Gruppen zweiter Art aufsteigen.

Sei also Γ eine Bewegungsgruppe und $\mathfrak{Q}$ die Operation, mit der wir aus Γ die neue Gruppe Γ_1 gewinnen wollen. Insbesondere sei $\mathfrak{Q}$ zunächst eine n -zählige Schraubung $\mathfrak{Q}^{(2\pi/n, t)}$ um die Achse l , die wir gemäß § 2 in reduzierter Form annehmen. Auch werden wir naturgemäß nur eine solche Gruppe Γ_1 in Betracht ziehen, die dieselbe Translationengruppe Γ_τ besitzt, wie Γ selbst. Da $\mathfrak{Q}^n$ (Kap. II, § 7) eine Translation von der Länge nt ist, die in die Achse l fällt, und da diese Translation in Γ_τ enthalten sein muß, so folgt zunächst wieder, daß t nur einen der Werte aus der Reihe 7) haben kann. Das analoge gilt, wenn wir eine Operation $\mathfrak{S}(t)$ als erzeugende Operation benutzen; in diesem Fall hat t einen der Werte 8).

Damit haben wir zunächst eine äußere Bedingung für die erzeugende Operation abgeleitet.

Eine Bedingung *innerer* Art knüpft daran an, daß $\mathfrak{Q}$ eine Deckoperation des gesamten Achsensystems von Γ sein soll. Wir werden den folgenden Satz beweisen:

3. *Ist $\mathfrak{Q}$ eine Deckoperation für die sämtlichen Achsenschaaren einer Raumgruppe Γ , so gibt es auch eine zu $\mathfrak{Q}$ isomorphe Operation $\mathfrak{Q}'$, die Deckoperation für die Achsen der zu Γ isomorphen Punktgruppe G ist.*

Dies beweisen wir folgendermaßen. Möge durch die Operation $\mathfrak{Q}$ die Bewegung $\mathfrak{A}$ von Γ in die Bewegung $\mathfrak{B}$ transformiert werden, so daß also (Kap. XI, § 1)

$$\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}$$

ist und auch $\mathfrak{B}$ der Gruppe Γ angehört. Ferner seien $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ die zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphen Operationen der zu Γ isomorphen Gruppe G und O der Punkt, durch den die Achsen a' und b' hindurchgehen. Ist dann $\mathfrak{Q}'$ eine zu $\mathfrak{Q}$ isomorphe Operation, die den Punkt O festläßt, so besteht auch die Relation

$$\mathfrak{Q}'^{-1}\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}' = \mathfrak{B}';$$

die linke Seite stellt nämlich eine Drehung dar, die erstens den Punkt O festläßt, und zweitens (nach 6 und 6a) zu $\mathfrak{B}$ isomorph ist; und das ist eben die Drehung $\mathfrak{B}'$. Es führt also $\mathfrak{Q}'$ die Drehung $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{B}'$ über. Nehmen wir nun an, daß die Operation $\mathfrak{Q}$ eine Deckoperation für *alle* Bewegungen von Γ und ihre Achsen ist, so muß auch $\mathfrak{Q}'$ eine Deckoperation für alle Drehungen von G und ihre Achsen sein, und dies ist der Satz.

Aus diesem Satz ergibt sich bereits die Berechtigung des oben genannten Verfahrens, dem wir für die Ableitung aller Raumgruppen folgen wollen. Er gestattet nämlich unmittelbar die folgende Folgerung. Läßt sich eine Gruppe Γ_1 aus einer Gruppe Γ mittels einer Operation $\mathfrak{Q}$ erzeugen, so gibt es auch eine isomorphe Erzeugung einer Punktgruppe G_1 aus einer Gruppe G mittels einer zu $\mathfrak{Q}$ isomorphen Operation $\mathfrak{Q}'$. Das ist die methodische Bedeutung unseres Satzes. Gerade mit Rücksicht hierauf haben wir in Kap. V und VI die Punktgruppen schrittweise durch Erzeugungsprozesse gewonnen. *Es kann uns also keine Raumgruppe entgehen, wenn wir alle*

diejenigen Operationen $\mathfrak{A}$ zur Ableitung neuer Gruppen Γ_1 aus Gruppen Γ verwenden, die den in Kap. V und VI benutzten erzeugenden Operationen $\mathfrak{A}'$ isomorph sind. In dieser Folgerung haben wir das grundlegende Erzeugungstheorem für die Raumgruppen zu erblicken.

Wir fügen noch zwei einfache Hilfssätze an. 1) Sei $\mathfrak{A}$ eine vertikale Drehung, die eine Deckoperation für die vertikalen Achsen eines Gitters oder eine Raumgruppe darstellt, so ist auch $\mathfrak{A}(t)$ eine solche Deckoperation. Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß die Translation t jede vertikale Achse in sich gleiten läßt. Aus demselben Grunde gilt: 2) Sei $\mathfrak{S}_r$ eine vertikale Spiegelung, die ebenfalls eine solche Deckoperation ist, so ist auch jede Operation $\mathfrak{S}_r(t)$ eine Deckoperation, wenn t den Achsen parallel ist.

Hier kann t an sich, d. h. rein geometrisch betrachtet, jeden beliebigen Wert haben. Sollen die Operationen $\mathfrak{A}(t)$ und $\mathfrak{S}_r(t)$ außerdem erzeugende Operationen einer Gruppe sein, so muß t naturgemäß den Bedingungen von § 2 genügen.

§ 4. Die Raumgruppen vom zyklischen Typus. Aus dem Ergebnis von § 3 ergibt sich, daß die Herstellung der Raumgruppen vom zyklischen Typus den Ausgangspunkt für alles weitere bildet; sie muß daher direkt ausgeführt werden. Es genügt, die Methode an einem Beispiel darzulegen; wir wählen die Gruppen der Symmetrieklasse C_4 .

Die Operationen der Gruppe C_4 sind

$$9) \quad 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3; \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'(\pi/2).$$

Nach § 1 stellen sich die Operationen jeder zu C_4 isomorphen Raumgruppe Γ in der Form

$$10) \quad \{\mathfrak{A}_i\}, \{\mathfrak{A}_i\}, \{\mathfrak{A}_i^2\}, \{\mathfrak{A}_i^3\}; \{\mathfrak{A}_i\} = \{\mathfrak{A}\Gamma_i\}$$

dar, wenn $\mathfrak{A}$, also auch jedes $\mathfrak{A}_i$, eine vierzählige Drehung oder Schraubung ist. Außerdem muß $\mathfrak{A}$ eine Deckoperation für die in Γ enthaltene Gruppe Γ_i sein. Dies legt zunächst die Gruppe Γ_i fest; sie muß einem Punktgitter vom tetragonalen Typus entsprechen, also die Gruppe Γ_q oder Γ_q' sein. Außerdem hat nach § 2 die Translation t von $\mathfrak{A}$ einen der vier Werte

$$11) \quad 0, \frac{1}{2} \tau_1, \tau_2, \frac{3}{2} \tau_1.$$

Wir haben nun zu zeigen, daß bei jeder diesen Bedingungen genügenden Wahl von Γ_τ und von t die Operationen 10) eine Gruppe bilden. Dies kann leicht geschehen.

Seien $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_k^2$ irgend zwei Operationen der Klammerausdrücke $\{\mathfrak{A}_i\}$ und $\{\mathfrak{A}_k^2\}$, so gibt es nach § 1 zwei wohlbestimmte Translationen $\mathfrak{T}_i$ und $\mathfrak{T}_k$ von Γ_τ , so daß

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{T}_i \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_k^2 = \mathfrak{A}^2 \mathfrak{T}_k$$

ist. Man hat daher

$$\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k^2 = \mathfrak{T}_i \mathfrak{A}^3 \mathfrak{T}_k$$

und dies muß, damit die Gruppeneigenschaft vorhanden ist, eine Operation $\mathfrak{A}_l^3$ des Klammerausdrucks $\{\mathfrak{A}_l^3\}$ sein. Das haben wir aber in § 1 bewiesen. Das gleiche gilt, wenn man mit zwei andern Klammerausdrücken von 10) operiert. Damit ist der Gruppencharakter für die Operationen 10) erwiesen.

Der Beweis überträgt sich ohne weiteres auf jede zyklische Gruppe C_n . Er gilt aber auch für jede zyklische Gruppe zweiter Art: denn die Relationen, auf die sich der Beweis stützt, gelten nach § 1 allgemein für alle Arten von Operationen.

Von den so bestimmten zyklischen Gruppen erweisen wir die folgende wichtige Eigenschaft.

4. *Die Achsenschaar einer zyklischen Gruppe ist identisch mit den vertikalen Achsen der in ihr enthaltenen Translationengruppe Γ_τ .*

Wir knüpfen wieder an das Beispiel der Gruppe C_4 an und betrachten zunächst den einfacheren Fall, daß $\mathfrak{A}$ eine Drehung $\mathfrak{A}(\pi/2)$ ist. Die Achsenschaar des tetragonalen Gitters ergab sich in Kap. IX, § 13 so, daß wir alle Produkte in Betracht zogen, die den obigen Drehungen 9) mit den Translationen des Gitters entsprachen; in völlig gleicher Weise entstehen hier die Ausdrücke $\{\mathfrak{A}_i\}$, $\{\mathfrak{A}_i^2\}$, . . . der Gleichung 10) in der Weise, daß wir alle Produkte bilden, die sich durch Multiplikation von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^2$, . . . mit den Translationen von Γ_τ ergeben — damit ist die volle Übereinstimmung der beiden Verfahren dargetan. Diese Übereinstimmung überträgt sich aber (nach Satz 6 von Kap. IV) auch auf den Fall, daß statt der Drehung $\mathfrak{A}$ eine Schraubung oder Drehspiegelung benutzt wird. Nach diesem

Satz hängt nämlich die Lage der Achsen *nur* von der Gruppe I_τ ab; sie ist aber unabhängig von der in $\mathfrak{A}$ etwa enthaltenen Translation oder, falls $\mathfrak{A}$ eine Operation $\mathfrak{A}$ ist, von der ihr anhaftenden Spiegelungsebene.

Die *Art* der Achsen bestimmt sich nach den Formeln 3) und 3a) von Kap. IV. Sei I_τ zunächst eine Gruppe, in der keine Translation einen Bruchteil von $2\tau_z$ enthält, so können sich durch Multiplikation von $\mathfrak{A}$ mit den Translationen von I_τ die vertikalen Translationskomponenten von $\mathfrak{A}$ nicht ändern; in den genannten Formeln von Kap. IV ist in diesem Fall $t_a = 0$ oder ein Vielfaches von $2\tau_z$. *Alle gleichzähligen Achsen sind daher auch gleichartig*: also entweder sämtlich Drehungsachsen oder Schraubenachsen mit dem gleichen Wert t .

Enthält dagegen die Gruppe I_τ eine Translation, in die ein Bruchteil τ_z' von $2\tau_z$ als Komponente eingeht, so geht durch Multiplikation mit dieser Translation aus $\mathfrak{A}(\alpha, t)$ die Schraubung $\mathfrak{A}(\alpha, t + \tau_z')$ hervor; den gleichzähligen Achsen kommen also sowohl die Werte t , wie $t + \tau_z'$ zu.

Endlich ist der Fall einer Gruppe zweiter Art zu erörtern; d. h. also der zu S_4 isomorphen Gruppen. Ihre Ausgangsoperation ist $\mathfrak{A}(\pi/2)$; die zugehörige Symmetrieebene sei σ . Durch Multiplikation von $\mathfrak{A}$ mit einer horizontalen Translation bleibt auch σ ungeändert. Ist aber $\mathfrak{T}$ eine Translation, die τ_z als Komponente enthält, und ist $\mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{T} = \mathfrak{B}(\pi/2)$, so hat (Kap. IV, § 4) die Ebene σ_1 der Operation $\mathfrak{B}$ den Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ von σ . Dagegen stimmt, wie schon erwähnt, die Lage der Achsen selbst mit der bei den Gruppen $\mathfrak{C}_4$ überein. Die Art, in der die Achsenschaaren der zyklischen Gruppen von den Translationen der Gruppe I_τ abhängen, ist damit gekennzeichnet¹⁾.

Endlich sei hervorgehoben, daß durch die Achsenschaaren einer zyklischen Gruppe *die zugehörige Translationengruppe bestimmt ist*. Dies gilt sogar allgemeiner für jede Gruppe; auch genügt es, eine einzige Schaar von Operationen $\{\mathfrak{Q}_i\}$ von

¹⁾ Vgl. auch Kap. XV, § 2.

§ 1 zu kennen. Für jedes Paar $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_i$ besteht nämlich eine Gleichung 2), also

$$\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}\mathfrak{T}_i; \quad \mathfrak{T}_i = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}_i,$$

wenn also i alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, so durchläuft $\mathfrak{T}_i$ alle in Γ_τ enthaltenen Translationen. Die Translationengruppe Γ_τ einer Gruppe Γ ist also durch eine einzige ihrer Operationenschaaren $\{\mathfrak{L}_i\}$ bestimmt.

§ 5. Der Hauptsatz über die Erzeugung der Raumgruppen erster Art. In § 3 haben wir die Bedingungen aufgestellt, denen eine Operation $\mathfrak{L}$ genügen muß, damit sie aus einer Gruppe Γ eine Gruppe Γ_1 hervorgehen läßt. Wir zeigen umgekehrt, daß auch jede so beschaffene Operation $\mathfrak{L}$ aus der Gruppe Γ eine Gruppe Γ_1 hervorgehen läßt. Wir beweisen zunächst den folgenden

Hauptsatz. Ist $\mathfrak{L}$ eine Deckbewegung des Achsensystems einer Gruppe Γ von der Art, daß die Potenzen von $\mathfrak{L}$ nur solche Translationen liefern, die der Translationengruppe Γ_τ von Γ angehören, und daß $\mathfrak{L}$ selbst nicht zu Γ gehört, so entsteht durch Multiplikation von Γ mit $\mathfrak{L}$ eine neue Gruppe Γ_1 , deren Translationengruppe wieder Γ_τ ist.

Da diesem Satz eine grundlegende Bedeutung innewohnt, soll sein Beweis in aller Ausführlichkeit dargestellt werden. Einige Hilfssätze schicken wir voran. Ist ihr Inhalt auch an sich einleuchtend, so mag doch mit Rücksicht auf die zentrale Stellung unseres Satzes der kurze Beweis angegeben werden:

a) Ein erster formaler Satz ist der folgende. Gehen aus $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ durch Transformation mit $\mathfrak{L}$ die Operationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{N}_1$ hervor, so geht aus dem Produkt $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ das Produkt $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1$ hervor. Nach Voraussetzung ist nämlich

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{L} \text{ und } \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{N}\mathfrak{L},$$

und hieraus folgt durch Multiplikation

$$\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{L}\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{N}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{L}.$$

b) Jede Operation $\mathfrak{L}$ einer Gruppe Γ führt die sämtlichen Achsenschaaren von Γ in sich über. Dieser Satz steht dem Satz 11 von Kap. V isomorph zur Seite. Er folgt unmittelbar

daraus, daß jede dieser Operationen $\mathfrak{L}$ eine Deckoperation für die zu I' gehörigen Strukturen ist; damit ist sie es auch für die Achsenschaaren dieser Strukturen. Insbesondere führt also auch jede Translation von I_τ die Achsenschaaren in sich über.

c) Sei wieder $\mathfrak{L}'$ die zu $\mathfrak{L}$ isomorphe Deckoperation für die Punktgruppe G ; gehört $\mathfrak{L}$ nicht zu I' , so gehört auch $\mathfrak{L}'$ nicht zu G . Wir wollen annehmen, daß durch $\mathfrak{L}'$ die Achse a' in b' , also die Drehung $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{B}'$ übergeht, so haben wir die Gleichungen

$$\mathfrak{L}'^{-1}\mathfrak{A}'\mathfrak{L}' = \mathfrak{B}'; \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'\mathfrak{B}'.$$

Die analoge Beziehung für die Gruppe I' können wir in die abkürzende Form

$$\mathfrak{L}^{-1}\{\mathfrak{A}_i\}\mathfrak{L} = \{\mathfrak{B}_i\}; \quad \{\mathfrak{A}_i\}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\{\mathfrak{B}_i\}$$

setzen, die folgende Bedeutung hat. Sie vertritt unendlich viele einzelne Gleichungen der Form

$$\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{A}_i\mathfrak{L} = \mathfrak{B}_k,$$

wo $\mathfrak{B}_k$ eine gewisse der unendlich vielen Operationen $\{\mathfrak{B}_i\}$ ist, deren Index k freilich unbestimmt bleibt, aber auch für unsere Beweis Zwecke ohne Belang ist.

d) Zugleich mit der Operation $\mathfrak{L}$ ist auch jede in

$$\{\mathfrak{L}_i\} = \{\mathfrak{L}I_\tau\}$$

enthaltene Operation $\mathfrak{L}_i$ eine Deckoperation für die Gruppe I' . Es ist nämlich $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}\mathfrak{T}_i$. Nun ist aber nach b) die Translation $\mathfrak{T}_i$ eine Deckoperation für die Achsen von I' , also nach a) auch $\mathfrak{L}\mathfrak{T}_i$, und dies ist die Behauptung.

e) Eine letzte Folgerung ist die, daß eine Operation $\mathfrak{L}$, die Deckoperation der Achsen von I' ist, auch Deckoperation für die in I' enthaltene Gruppe I_τ ist. Nach dem Schluß von § 4 ist nämlich die Gruppe I_τ durch die Achsen eindeutig bestimmt. Führt also $\mathfrak{L}$ die Achsenschaaren in sich über, so führt sie auch die Gruppe I_τ in sich über. Wir setzen dies in die Form

$$\mathfrak{L}^{-1}\{I_\tau\}\mathfrak{L} = I_\tau.$$

Damit sind die für den Beweis notwendigen Vorbereitungen getroffen. Mit ihrer Hilfe können wir ihn in einer zu den Schlüssen von Kap. V, § 7 völlig isomorphen Weise durchführen, ohne daß irgendwelche neue Beweismomente erforderlich sind.

Wir knüpften dort an eine Drehungsgruppe G an, und schreiben jetzt gemäß § 1 ihre Operationen in der Form

$$12) \quad 1, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \dots \mathfrak{H}';$$

die Operation $\mathfrak{L}'$ war zunächst eine Umwendung. Wir schreiben die Formeln hin, die aussagen, daß die Operationen 12) eine Gruppe bilden, und daß die Umwendung $\mathfrak{L}'$ Deckoperation der Achsen $a', b', \dots$ ist. Sei insbesondere

$$13) \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{G}' \text{ und } \mathfrak{L}'^{-1}\mathfrak{A}'\mathfrak{L}' = \mathfrak{B}';$$

für $\mathfrak{L}'$ als Umwendung bestehen außerdem noch die Gleichungen

$$14) \quad \mathfrak{L}'^{-1} \cdot 1 \cdot \mathfrak{L}' = 1 \text{ und}$$

$$15) \quad \mathfrak{L}'^2 = 1,$$

von denen die erste auch so gelesen werden kann, daß $\mathfrak{L}'$ die Identität in sich überführt. Auf dieser Grundlage bewiesen wir dann a. a. O., daß die Operationen

$$16) \quad \begin{array}{l} 1, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \dots \mathfrak{H}' \\ \mathfrak{L}', \mathfrak{A}'\mathfrak{L}', \mathfrak{B}'\mathfrak{L}', \dots \mathfrak{H}'\mathfrak{L}' \end{array}$$

eine Gruppe G_1 bilden.

Dies läßt sich unmittelbar isomorph auf den vorliegenden Fall übertragen. Die Gruppe Γ besteht jetzt aus den Operationen

$$12a) \quad \{\mathfrak{T}_i\}, \{\mathfrak{A}_i\}, \{\mathfrak{B}_i\}, \dots \{\mathfrak{H}_i\},$$

und wenn $\mathfrak{L}$ eine Deckoperation für sie ist, so bestehen die zu 13) isomorphen Relationen

$$13a) \quad \{\mathfrak{A}_i\}\{\mathfrak{B}_i\} = \{\mathfrak{G}_i\} \text{ und } \mathfrak{L}^{-1}\{\mathfrak{A}_i\}\mathfrak{L} = \{\mathfrak{B}_i\},$$

ferner ist nach e)

$$14a) \quad \mathfrak{L}^{-1}\{\Gamma_\tau\}\mathfrak{L} = \Gamma_\tau.$$

Die Operation $\mathfrak{L}$ kann eine Translationskomponente t enthalten; es ist aber stets

$$15a) \quad \mathfrak{L}^2 = 1 \text{ oder } \mathfrak{L}^2 = \mathfrak{T},$$

wo $\mathfrak{I}$ der Gruppe Γ_τ angehört. Wie also die Gleichung 15) aussagt, daß $\mathfrak{Q}'^2$ die Identität ist, so sagt die Gleichung 15a) aus, daß $\mathfrak{Q}^2$ eine Operation von $\{\mathfrak{I}_i\}$ ist. In den Gleichungen 12a) bis 15a) sind mithin die sämtlichen zu 12) bis 15) isomorphen Relationen vorhanden, und damit die Grundlage, auf denen die Schlüsse von Kap. V beruhen und aus denen sie rein rechnerisch folgen. Wir können also in derselben Weise, wie dort, zeigen, daß die Operationen

$$16a) \quad \begin{array}{l} \{\mathfrak{I}_i\}, \quad \{\mathfrak{A}_i\}, \quad \{\mathfrak{B}_i\}, \quad \dots \quad \{\mathfrak{H}_i\} \\ \{\mathfrak{I}_i\}\mathfrak{Q}, \quad \{\mathfrak{A}_i\}\mathfrak{Q}, \quad \{\mathfrak{B}_i\}\mathfrak{Q}, \quad \dots \quad \{\mathfrak{H}_i\}\mathfrak{Q} \end{array}$$

eine neue Gruppe Γ_1 bilden. Damit ist der Satz 4 zunächst für den Fall der Gleichung 15a) bewiesen.

Außer der Umwendung $\mathfrak{Q}'$ hatten wir in Kap. V, § 7 auch den Fall $\mathfrak{Q}'^3 = 1$ zu betrachten. Auch für ihn lassen sich die Schlüsse von Kap. V direkt übertragen; statt der Gleichung 15a) tritt dann die Gleichung

$$15b) \quad \mathfrak{Q}^3 = 1 \text{ oder } \mathfrak{Q}^3 = \mathfrak{I}$$

auf, und alles weitere ergibt sich wieder, wie vorstehend.

§ 6. **Erzeugung der Raumgruppen zweiter Art.** Nicht anders steht es mit dem Erzeugungssatz, mit dem wir in Kap. VI die Gruppen zweiter Art gewonnen haben; auch er ist einer unmittelbaren Ausdehnung auf den vorliegenden Fall fähig.

Wir benutzten dort zur Erzeugung einer Gruppe $\bar{G}_1$ zweiter Art eine Operation $\bar{\mathfrak{S}}'$, die Deckoperation für eine Drehungsgruppe G ist. Zu den Gleichungen 12) des vorigen Paragraphen treten also statt der (Gleichungen 13), 14) und 15) in diesem Fall die Gleichungen

$$17) \quad \bar{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{A}'\bar{\mathfrak{S}}' = \mathfrak{B}'; \quad \bar{\mathfrak{S}}'^{-1} \cdot 1 \bar{\mathfrak{S}}' = 1; \quad \bar{\mathfrak{S}}'^2 = 1.$$

Ist nun $\bar{\mathfrak{S}}$ eine zu $\bar{\mathfrak{S}}'$ isomorphe Deckoperation für eine Gruppe Γ , so bestehen für sie die isomorphen Gleichungen

$$17a) \quad \begin{array}{l} \bar{\mathfrak{S}}^{-1}\{\mathfrak{A}_i\}\bar{\mathfrak{S}} = \{\mathfrak{B}_i\}; \quad \bar{\mathfrak{S}}^{-1}\{\Gamma_\tau\}\bar{\mathfrak{S}} = \Gamma_\tau, \\ \bar{\mathfrak{S}}^2 = 1 \text{ oder } \bar{\mathfrak{S}}^2 = \mathfrak{I}; \end{array}$$

wo $\mathfrak{I}$ wieder der Gruppe Γ_τ , also den Translationen $\{\mathfrak{I}_i\}$ angehört. Damit sind wiederum die Relationen vorhanden, die

die in Kap. VI gezogenen Schlüsse stützen. D. h. es gilt der Satz:

5. Ist Γ eine Bewegungsgruppe und $\mathfrak{S}$ eine Operation zweiter Art, die eine Deckoperation für Γ ist und zugleich der Bedingung genügt, daß ihr Quadrat die Identität oder eine Translation von Γ_τ ist, so ergibt sich durch Multiplikation von Γ mit $\mathfrak{S}$ eine Gruppe Γ_1 zweiter Art.

Es fehlt aber noch das letzte Glied in der Schlußkette, das sozusagen dem Inhalt von Kap. VI, S. 81 isomorph ist; nämlich der Beweis, daß die im Satz 5 genannten Operationen $\mathfrak{S}$ zur Erzeugung aller Raumgruppen zweiter Art ausreichen. Es ist leicht, diesen Beweis zu führen. Gemäß Kap. VI haben wir Gruppen zweiter Art aus den Gruppen erster Art nur mit solchen Operationen $\mathfrak{S}'$ gebildet, für die $\mathfrak{S}'^2 = 1$ ist; d. h. mit der Inversion und der Spiegelung. Als Operationen $\mathfrak{S}$, mit denen die Raumgruppen zweiter Art zu erzeugen sind, kommen daher (nach dem Hauptsatz von § 3) nur Inversion $\mathfrak{I}$, Spiegelung $\mathfrak{S}$ und Gleitspiegelung $\mathfrak{S}(t)$ in Frage: mit der Maßgabe, daß die Translationskomponente t einer halben Translation von Γ_τ gleich ist.

Damit ist der Erzeugungssatz für die Gruppen zweiter Art so gut wie erledigt. Eine wesentliche Bemerkung ist freilich noch hinzuzufügen. Wie wir in Kap. XI, § 1 sahen, führt eine Operation zweiter Art $\mathfrak{S}$ eine Schraubenachse in eine Achse von entgegengesetztem Windungssinn über. Soll also die Operation $\mathfrak{S}$ eine Deckoperation des gesamten Achsensystems einer Gruppe Γ sein, so muß es in dieser Gruppe Schraubenachsen von zweierlei Windungssinn geben; genauer solche, die sich (abgesehen von der Richtung) nur durch den Windungssinn unterscheiden. Da ein Unterschied des Windungssinns bei einer zweizähligen Schraubenachse noch nicht auftritt, so können wir sagen:

5a. Die Operation $\mathfrak{S}$ zweiter Art kann nur dann eine Deckoperation für eine Gruppe Γ sein, wenn die Achsen von Γ entweder Drehungsachsen und zweizählige Schraubenachsen sind, oder wenn zu jeder mehr als zweizähligen Schraubung die gleiche Schraubung von entgegengesetztem Windungssinn existiert.

Eine Gruppe Γ ist also für eine Erzeugung einer Gruppe zweiter Art nicht verwendbar, wenn in ihr Achsenschaaren eines einzigen bestimmten Windungssinns existieren, ohne eine Schaar von Achsen mit dem entgegengesetzten Windungssinn¹⁾.

§ 7. Identität verschiedenartig erzeugter Gruppen. Wie bei den Punktgruppen, bedürfen wir eines Satzes, der uns die Sicherheit gewährt, daß wir zu jeder Raumgruppe nur einmal gelangen. Ein solcher Satz muß auf denselben Tatsachen und Erwägungen ruhen, wie dort. Die Grundlage bildet, daß zwei Raumgruppen identisch sind, wenn sie dieselben Operationen enthalten; sie sind verschieden, wenn dies nicht der Fall ist.

Wir betrachten zunächst zwei einfache Beispiele. Das Produkt $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ zweier Inversionen, deren Zentra O und O_1 um eine halbe Translation der Gruppe voneinander entfernt sind, ist eine Translation $\mathfrak{T}$ von Γ (Kap. II, § 4); neben der Gleichung $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}$ ist auch

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{T}\mathfrak{S}_1, \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{T}.$$

Die mit der einen Inversion gebildete Gruppe enthält also auch die andere Inversion, und die mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ erzeugten Gruppen sind daher identisch. Ebenso ist es, und zwar gemäß Kap. III, § 1, wenn $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ Umwendungen um parallele Achsen u , u_1 sind, deren Abstand gleich einer halben Translation von Γ ist; die mit $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ erzeugten Gruppen erweisen sich aus dem gleichen Grund als identisch.

Seien nun allgemein $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei Operationen, mit denen sich aus Γ dieselbe Gruppe Γ_1 erzeugen läßt, so kommen in dieser Gruppe Γ_1 sowohl $\mathfrak{L}$ wie $\mathfrak{M}$ vor. Ebenso ist aber auch das umgekehrte wahr; d. h. es besteht der Satz:

6. Enthält die aus der Gruppe Γ mittels der Operation $\mathfrak{L}$ ableitbare Gruppe Γ_1 eine Operation $\mathfrak{M}$, die der Gruppe Γ nicht angehört, so läßt sich Γ_1 aus Γ auch mittels der Operation $\mathfrak{M}$ erzeugen.

Um ihn auch formal zu beweisen, wollen wir die mit $\mathfrak{M}$ ableitbare Gruppe zunächst mit Γ_2 bezeichnen, setzen also

$$\Gamma_1 = \{\Gamma, \mathfrak{L}\}; \quad \Gamma_2 = \{\Gamma, \mathfrak{M}\}.$$

¹⁾ Vgl. auch den Schluß von § 8.

Die Gruppe Γ_2 ist, wie diese Erzeugungsgleichung erkennen läßt, *eindeutig* dadurch bestimmt, daß sie Γ und $\mathfrak{M}$ enthält. Aber nach Voraussetzung enthält auch die Gruppe Γ_1 sowohl Γ wie auch $\mathfrak{M}$, und daher sind Γ_1 und Γ_2 identisch.

Eine zweite Form des so gewonnenen Kriteriums ist die folgende. Soll die mit der Operation $\mathfrak{L}$ erzeugte Gruppe Γ_1 die Operation $\mathfrak{M}$ enthalten, so heißt dies, daß sich $\mathfrak{M}$ ergibt, wenn eine gewisse Operation $\mathfrak{B}$ von Γ mit $\mathfrak{L}$ multipliziert wird. Nun ist klar, daß die Gruppe Γ_1 aus Γ auch mittels der Operation $\mathfrak{L}^{-1}$ erzeugbar ist; denken wir also Γ_1 mit $\mathfrak{L}^{-1}$ erzeugt, so muß danach eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{B}\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{M}, \text{ also } \mathfrak{B} = \mathfrak{M}\mathfrak{L}$$

bestehen. Also können wir folgern:

6a. Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei solche Deckoperationen einer Gruppe Γ , daß ihr Produkt eine Operation von Γ liefert, so erzeugen sie aus Γ dieselbe Gruppe Γ_1 .

§ 8. Raumgruppe und regelmäßige Anordnung (Struktur).

In welcher Weise die regelmäßige Anordnung an der Hand der Raumgruppe entsteht, bedarf kaum der Erörterung. Sie ergibt sich, indem wir einen beliebigen Baustein den sämtlichen Operationen der Gruppe unterwerfen; die sämtlichen Lagen, in die er gelangt, bilden die Anordnung (die Struktur). In ähnlicher Weise konnten wir in Kap. V, § 4 die Kristallform mittels der Punktgruppe entstehen lassen. So evident dies alles erscheinen darf, so soll die Beziehung zwischen Gruppe und Struktur doch einer näheren Erörterung unterzogen werden. Es erhöht auch die Einsicht in die innere Gesetzmäßigkeit der Struktur, wenn wir darlegen, nach welchen Regeln infolge der einzelnen Operationen die verschiedenen Bausteine ineinander übergehen. Wir beweisen:

7. Wird ein beliebiger Baustein μ allen Operationen einer Raumgruppe Γ unterworfen, so bilden die sämtlichen Lagen, in die er dadurch gelangt, eine regelmäßige Anordnung.

Für den Beweis führen wir vorübergehend eine neue Bezeichnung ein. Wir bezeichnen die sämtlichen Operationen der Gruppe Γ durch

$$1, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \dots$$

und es seien

$$18a) \quad \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$$

die Bausteine, die aus μ durch diese Operationen entstehen. Es entsteht also μ_i aus μ durch $\mathfrak{R}_i$. Wir führen nun die nämlichen Betrachtungen durch, wie in Kap. V. Seien also $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{R}_k$ irgend zwei Operationen der Reihe 18), so gibt es gemäß dem Gruppenbegriff eine Operation $\mathfrak{R}_\nu$, mit wohldefiniertem Index ν , so daß

$$19) \quad \mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}_\nu, \text{ also } \mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}_i^{-1} \mathfrak{R}_\nu$$

ist; welches dieser Index ν ist, ist ohne Belang. Wir entnehmen den Gleichungen 19) zunächst, daß der Baustein μ_i durch die Operation $\mathfrak{R}_k$ in μ_ν übergeht. Wie wir soeben sahen, geht μ durch $\mathfrak{R}_i$ in μ_i über. Durch $\mathfrak{R}_i^{-1}$ kommt daher der Baustein μ_i zunächst nach μ und dann durch $\mathfrak{R}_\nu$ nach μ_ν , also kommt er in der Tat durch das Produkt $\mathfrak{R}_i^{-1} \mathfrak{R}_\nu$, und damit durch $\mathfrak{R}_k$ nach μ_ν . Die Operation $\mathfrak{R}_k$, durch die der Baustein μ_i in μ_ν übergeht, bestimmt sich also nach 19). Ebenso lehrt diese Gleichung, in welchen Baustein ein Baustein μ_i durch eine gegebene Operation $\mathfrak{R}_k$ übergeht; er geht in μ_ν über, und insofern ist es jetzt die Operation $\mathfrak{R}_\nu$ oder ihr Index ν , der sich aus i und k gemäß den Gleichungen 19) bestimmt.

Damit ist der Satz 7 bewiesen; in dieser Weise drückt sich also der Zusammenhang zwischen regelmäßiger Anordnung und Gruppe aus. Wir treffen daher auf die gleichen Beziehungen, die Punktgruppe und Kristallform miteinander verbinden; wie dort, ziehen wir auch hier die Folgerung, daß es das gleiche ist, ob wir von den Deckoperationen einer regelmäßigen Anordnung sprechen, oder von den Deckoperationen einer Raumgruppe Γ und ihrer Achsen- und Ebenenschaaren. Die Raumgruppe Γ und die regelmäßige Anordnung, zu der sie Anlaß gibt, stellen sachlich ein und dasselbe Objekt dar, genau wie Translationengruppe und Punktgitter oder wie Punktgruppe und Kristallform; die Anordnung in kristallographischer Hinsicht, die Raumgruppe in mathematischer. Wir wollen dies noch ausdrücklich als Satz aussprechen, als einen Satz, der dem Satz 11 von Kap. V isomorph ist:

8. *Jede Operation einer Raumgruppe Γ ist Deckoperation für die Gesamtheit aller Achsen und Ebenen von Γ .*

Der Satz 7 ist auch aus dem Grunde ausführlich bewiesen worden, um zu zeigen, daß dem Baustein μ im allgemeinen eine *völlig unbestimmt bleibende Qualität* zukommt, die an keinerlei Beschränkung gebunden ist. An keiner Stelle des Beweises kommt diese Qualität irgendwie in Betracht. Dieser Umstand bildet eine wesentliche und prinzipiell wichtige Eigenart der allgemeinen Strukturtheorien und des allgemeinen Begriffs der regelmäßigen Anordnung.

Wir haben in § 4 davon gesprochen, daß es Gruppen geben kann, in denen Schraubenachsen von nur einerlei Windungssinn auftreten. Es gibt dann immer auch Gruppen von völlig demselben Bau, die sich von den eben genannten nur durch den Windungssinn ihrer Schraubenachsen unterscheiden. Die mit ihnen abgeleiteten Strukturen zeigen dann den gleichen Gegensatz; sie stellen enantiomorphe Strukturen dar. Derartige Anordnungen kommen offenbar *enantiomorphen Kristallen* zu.

§ 9. **Parallelepipedischer Aufbau der Strukturen.** Die in Γ enthaltene Translationengruppe Γ_T zerlegt den Raum in parallelepipedische Bereiche Π ; da die Translationen von Γ_T zu den Deckoperationen von Γ gehören und überdies die Bereiche Π ineinander überführen, muß in jedem Bereich Π die *gleiche Anordnung* von Bausteinen enthalten sein. Dabei soll von vornherein darauf hingewiesen werden, daß der Konstruktionspunkt O , von dem aus die parallelepipedischen Bereiche des Gitters ausgehen, hier keine Rolle spielt, und bei näherer Betrachtung überhaupt an sich unbestimmt und willkürlich bleibt. Mag die Wahl dieses Punktes O zunächst offen bleiben.

Wir wollen nun denjenigen Komplex von Bausteinen betrachten, der in der Stammfigur Π_0 unseres Gitters enthalten ist. Aus ihm geht, dem vorstehenden gemäß, die gesamte Struktur so hervor, daß wir ihn allen Translationen von Γ_T unterwerfen. Diesen Komplex wollen wir gruppentheoretisch näher bestimmen.

Die Gruppe Γ charakterisierten wir in § 1 mittels der Ausgangsoperationen

20) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots \mathfrak{H}.$

Sie waren dort unbestimmt geblieben; wir wollen sie jetzt in bestimmter Weise auswählen. Zunächst wollen wir die Lagen, die der Baustein μ durch sie erhält, durch

20a) $\mu_a, \mu_b, \dots \mu_h$

bezeichnen; die Ausgangslage μ möge in die Stammfigur Π_0 fallen. Dann liegt es nahe, die Operationen so auszuwählen, daß auch die Bausteine 20a) sämtlich in Π_0 hineinfallen. Wir wollen annehmen, für den Baustein μ_a sei es nicht der Fall, und sei Π das Parallelepipedon, das ihn enthält. Dann gibt es nach dem vorstehenden einen zu μ_a gleichwertigen Baustein μ_a' auch in der Stammfigur Π_0 , und es gibt auch eine Operation $\mathfrak{A}_1$, die ihn aus μ entstehen läßt. Das gleiche gilt für jeden andern Baustein der Reihe 20a). Ersetzen wir daher die bisher unbestimmt gebliebenen Operationen 20), soweit nötig, durch die Operationen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \dots$ so werden alle Lagen, die der Baustein μ durch sie erhält, in Π_0 enthalten sein. In dieser Weise denken wir uns die Operationen 20) von nun an gewählt. Dann können wir die Beziehung zwischen den Operationen von 4a) und der Struktur in folgender einfachen Weise veranschaulichen: *Die Reihe 4a) von § 1 liefert uns alle diejenigen Bausteine, die die Stammfigur Π_0 erfüllen; die Translationen von Γ_τ erzeugen aus ihnen die gesamte Anordnung, und jeder Klammerausdruck $\{\mathfrak{A}_i\}$ liefert alle diejenigen Bausteine, die aus dem Baustein μ_a von Π_0 durch die Translationen von Γ_τ hervorgehen, die also in den sämtlichen Parallelepipedon Π die nämliche Lage haben, wie μ_a in Π_0 ¹⁾.*

§ 10. Einordnung der Bravais'schen Strukturen in die allgemeine Theorie. Die Bravais'schen Strukturen ergaben sich durch Einfügung von Bausteinen bestimmter Symmetrie in das Zentrum M eines jeden parallelepipedischen Bereiches Π . Um

¹⁾ Die aus μ_a entstehenden Bausteine bilden ein Punktgitter; man sagt deshalb, daß die gesamte Struktur aus *ineinander gestellten* Gittern besteht.

die Vorstellungen zu fixieren, gehen wir von einem rhombischen Gitter Γ_v aus und fügen in jedes Zentrum M einen Baustein (eine Kristallform) ein, der der Holoedrie des rhombischen Systems entspricht; z. B. eine Doppelpyramide mit rhombischer Basis. Sei wieder μ dieser in der Stammfigur Π_v enthaltene Baustein; andere Bausteine sind in ihr nicht vorhanden. Die Punktgruppe des Bausteins ist V^h ; ihre Operationen sind

$$1, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}', \mathfrak{S}', \mathfrak{S}_u', \mathfrak{S}_v', \mathfrak{S}_w'.$$

Sie führen den Baustein in sich über und sind außerdem diejenigen Operationen, die wir im Sinn des vorstehenden Paragraphen als die Ausgangsoperationen 20) zu wählen haben. Die Operationen der so entstehenden Gruppe Γ' nehmen daher (§ 1) in diesem Fall die einfache Form an

$$\Gamma_v, \{\mathfrak{U}'\Gamma_v\}, \{\mathfrak{B}'\Gamma_v\}, \{\mathfrak{B}'\Gamma_v\}, \{\mathfrak{S}'\Gamma_v\}, \{\mathfrak{S}_v'\Gamma_v\}, \{\mathfrak{S}_u'\Gamma_v\}, \{\mathfrak{S}_w'\Gamma_v\}.$$

Wir erhalten demnach die Operationen von Γ' in der einfachen Weise, daß wir die Operationen von V_h mit den sämtlichen Translationen von Γ_v multiplizieren.

Dies läßt sich ohne weiteres verallgemeinern. Liege eine Bravais'sche Struktur vor, deren Baustein die Punktsymmetrie der Gruppe G besitzt. Die Gruppe G enthalte die Operationen

$$21) \quad 1, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \dots \mathfrak{S}',$$

so sind sie es, die den in Π_v gelegenen Baustein μ in sich überführen. Dann nehmen genau wie eben, die sämtlichen Operationen der zugehörigen Gruppe Γ' die einfache Form an

$$21a) \quad \Gamma_v, \{\mathfrak{U}'\Gamma_v\}, \{\mathfrak{B}'\Gamma_v\}, \dots \{\mathfrak{S}'\Gamma_v\};$$

die Operationen von Γ' entstehen also wiederum so, daß wir die Operationen der Punktgruppe G mit den sämtlichen Translationen von Γ_v multiplizieren. Wir sprechen dies folgendermaßen aus:

9. Die Bravais'schen Strukturen entsprechen denjenigen Raumgruppen Γ , die sich durch Multiplikation einer Punktgruppe G mit einer gewissen Translationengruppe Γ_v ergeben.

Damit ist die Eigenart dieser Gruppen gekennzeichnet. Es bleibt aber noch eine andere Frage zu erörtern. Im Schluß

von § 8 ergab sich, daß mittels *jeder* Gruppe I' Strukturen gebildet werden können, deren Ausgangsbaustein μ *symmetrielos* ist; dies muß also auch für diejenigen Raumgruppen I' der Fall sein, die dem Satz 9 entsprechen. Man wird daher fragen, wie beides zusammenhängt, wie also ein Übergang von der Bravais'schen Struktur mit symmetrischem Baustein zu einer allgemeinen Struktur mit symmetrielošem Baustein möglich ist. Die Antwort lautet kurz gesprochen so, daß *man den symmetrischen Bravais'schen Baustein atomisiert*. Im Fall der oben erörterten rhombischen Struktur wird man die Doppelpyramide durch acht isolierte identische materielle Teilchen ersetzen, die so um das Zentrum M herumliegen, wie es die Gruppe V_h bedingt; z. B. in der Weise, daß man in jede der acht Flächen der Doppelpyramide an analogen Stellen je einen atomistischen Baustein einsetzt. Dann bilden diese acht Teilchen einen Komplex, der aus einem von ihnen durch die acht Operationen der Gruppe V_h hervorgeht; er ist zugleich der in § 9 genannte in der Stammfigur II_0 enthaltene Baustein-komplex. Damit ist der Übergang von der Bravais'schen Struktur zur allgemeinen vollzogen. Diese atomistische Auflösung des Bausteins läßt sich für jede Bravais'sche Struktur in völlig gleicher Weise ausführen. Übrigens hat Bravais auf ihre Möglichkeit bereits selbst mit aller Klarheit hingewiesen¹⁾. Wir schließen mit dem Satz:

¹⁾ Man vergleiche besonders folgende Stelle der *Études cristallographiques*, S. 204. A la vérité, on peut objecter, que la difficulté d'expliquer l'état symétrique des Assemblages cristallins est simplement reculée, et qu'il reste à faire voir pourquoi le polyèdre moléculaire est symétrique. La théorie atomique fournit une réponse toute prête à cette dernière demande, en nous montrant chaque molécule d'un corps comme composée d'un nombre fini d'atomes de différentes espèces. Déjà par des considérations d'un tout autre ordre, Ampère était arrivé, en 1814, à ce résultat que le polyèdre moléculaire devait être formé d'atomes disposées symétriquement autour de son centre de gravité . . .

Ferner a. a. O. S. 194: Nous abordons maintenant une question plus délicate, celle de la *structure moléculaire* et par là nous entendons la disposition géométrique des éléments qui constituent la molécule autour de son centre de gravité.

10. Von jeder Bravais'schen Struktur kann man dadurch zu einer allgemeinen Struktur übergehen, daß man den symmetrischen Bravais'schen Baustein durch N Einzelbausteine ersetzt, die symmetrisch um das Zentrum M der Stammfigur H_0 herum liegen.

§ 11. Strukturen mit symmetrischen Bausteinen. Um die Möglichkeiten, die hier auftreten können, zu übersehen und zu ordnen, erörtern wir die Verhältnisse zunächst in dem wesentlich einfacheren Fall, daß wir statt der Raumgruppe Γ eine Punktgruppe G betrachten. Auch genügt es, ein Beispiel zu behandeln; es sei die Vierergruppe V , mit den drei Achsen u, v, w und den Operationen

$$1, U, V, W.$$

Wir nehmen irgendwo einen Baustein μ an und unterwerfen ihn diesen vier Operationen; seien (Fig. 105)

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3$$

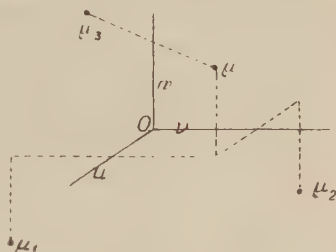


Fig. 105

die vier Lagen, die sich so ergeben. Sie bilden zusammen eine

geometrische Figur F von der Punktsymmetrie V . Die Qualität des Bausteins kommt dabei nicht in Betracht.

Wir wollen nun gewisse *Sonderlagen* von μ in Betracht ziehen. Wir legen μ zunächst in eine zweizählige Achse, z. B. in die Achse w . Durch die Umwendungen U und V entsteht dann aus ihm der ebenfalls auf der w -Achse gelegene Baustein μ' . Dagegen läßt die Umwendung W aus μ und μ' keine neuen Bausteine hervorgehen. Soll also die Figur der beiden Bausteine μ, μ' die Gruppe V als Deckgruppe zulassen, so müssen μ und μ' selbst die Achse w als zweizählige Achse besitzen; sie müssen also *Eigensymmetrie* haben.

Wir nehmen zweitens für den Baustein μ eine noch speziellere Lage an; wir lassen ihn in den Schnittpunkt der drei Achsen fallen. Dann folgern wir analog, daß er die Symmetrie der Gruppe V besitzen muß, er muß durch jede ihrer Operationen in sich übergehen.

Es gibt aber noch eine zweite Gattung von Sonderlagen, freilich von ganz anderem Charakter. Wir werden in ihnen Sonderlagen erkennen, die bei gewisser Symmetrie von μ der entstehenden Figur F eine Symmetrie geben, die *höher als V ist*. Zweckmäßig gehen wir zunächst davon aus, daß wir dem Baustein μ die *höchste* Symmetrie geben, die es gibt; wir nehmen ihn als Punkt an, oder, was auf dasselbe herauskommt, als Kugel. Seine Ausgangslage befinde sich irgendwo in der (uv) Ebene. Dann liegen alle vier Bausteine in dieser Ebene, und da die Kugel jegliche Symmetrieeigenschaft besitzt, so kommt der Figur F von selbst die (uv) Ebene als Symmetrieebene zu; ihre Gesamtsymmetrie steigert sich daher auf die Gruppe V^h . Analog können wir eine Figur F erhalten, der die Gesamtsymmetrie V^d zukommt; wir erreichen es, wenn wir μ in die Diagonalebene δ legen, die den Winkel (uv) halbiert. Diese Ebene ist wieder eine Symmetrieebene für den Kugelpunkt μ , und so erhält die Gesamtfigur F die Symmetrie der Gruppe V^d . Legt man endlich den Baustein μ so, daß er sowohl in die Ebene δ , wie auch in die Ebene (uv) fällt (also in ihre Schnittlinie), so erhält die Figur F der vier Bausteine sowohl die Symmetrie V^d , wie auch die Symmetrie V^h , und damit die Symmetrie der Gruppe D_4^h ; was man auch leicht direkt bestätigen kann. Dagegen sei ausdrücklich bemerkt, daß die Figur 105, die den Ausgangsbaustein μ in nicht spezieller Lage voraussetzt, auch durch die Kugelsymmetrie von μ *keine höhere Symmetrie erlangt*. Weder die Ebene (uv) , noch die Diagonalebene δ sind Symmetrieebenen der aus den vier Bausteinen bestehenden Figur F .

Offenbar braucht der Baustein μ keine volle Kugelsymmetrie zu besitzen, um der Figur F die Symmetrien aufzuprägen, die wir eben aufzählten. Im ersten Fall, wo sich die Gesamtsymmetrie V^h einstellte, genügt es, daß er die (uv) Ebene als Symmetrie besitzt; im zweiten Fall genügt es, wenn er die Diagonalebene δ als Symmetrieebene besitzt, und im letzten Fall muß er beide Symmetrieebenen und damit auch ihre Schnittlinie als zweizählige Achse besitzen. Alle diese Fälle zeigen, wie eine gewisse Bausteinsymmetrie bei besonderen Ausgangs-

lagen die Gesamtsymmetrie der Figur *über das gewollte Maß* hinaus beeinflussen kann. Insgesamt haben wir also drei Fälle kennen gelernt:

1) *Allgemeine Lage des Bausteins μ* . Seine Qualität kommt nicht in Frage und ist ohne Belang. Die Symmetriegruppe ist immer V .

2) *Sonderlagen, die eine gewisse notwendige Eigensymmetrie für μ bedingen*, damit die Figur die Gesamtsymmetrie V hat.

3) *Sonderlagen, bei denen eine gewisse Eigensymmetrie von μ die Gesamtsymmetrie über die Gruppe V hinaus erhöht*. Die Figur erhält eine *nicht gewollte Übersymmetrie*.

Der dritte Fall bedingt eine gewisse Vorsicht. Will man nämlich dem Baustein μ die bezügliche Sonderlage geben, aber doch der Figur F nur die Symmetrie V aufprägen, so darf der Baustein μ diejenige Symmetrie, die die Übersymmetrie der Figur F bedingen würde, *nicht besitzen*.

Der zweite Fall gibt zu einer theoretischen Bemerkung Anlaß. In ihm *spaltet sich* offenbar die Gesamtsymmetrie der Figur in zwei Teile. Der eine wird durch die Eigensymmetrie von μ dargestellt, der andere durch die Anordnung; oder wenn wir zu den Operationen der Gruppe V übergehen, durch die beiden Umwendungen $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{B}'$, die μ in μ' überführen.

Analoge Verhältnisse werden wir bei den Raumgruppen vorfinden. Da wir aber die einzelnen Raumgruppen noch nicht kennen, müssen wir uns darauf beschränken, dies hier in großen Zügen anzudeuten. Wir kommen bei den einzelnen Gruppen darauf zurück¹⁾.

Wir beginnen mit Ausführungen, die an den Fall 2) anknüpfen. Wir haben bisher zwei Arten räumlicher Strukturen kennen gelernt; die allgemeinen Strukturen von § 8 und die Bravais'schen Strukturen. Die erste Art entspricht dem Fall 1), die zweite dem Fall 2). Beide Arten bilden die äußersten Glieder einer Reihe verschiedener Möglichkeiten. Bei den allgemeinen Strukturen kommt der Baustein μ durch *jede* Ope-

¹⁾ In dem Paragraph über die Eigensymmetrie der Bausteine.

ration der Reihe 20) in eine *neue* Lage; bei den Bravais'schen Strukturen geht er durch *jede* dieser Operationen *in sich* über. Um Strukturen anzugeben, die sozusagen ein *mittleres* Verhalten zeigen, haben wir nur die oben erörterten Verhältnisse zu übertragen. Nehmen wir einmal an, in der Gruppe Γ sind dreizählige Drehungsachsen enthalten, und wir legen den Ausgangsbaustein μ in eine solche Achse. Dann muß er durch die Drehungen um sie in sich übergehen, und muß daher notwendig selbst mit einer dreizähligen Achse behaftet sein. Wird er in eine Symmetrieebene von Γ gelegt, so muß er durch Spiegelung an ihr in sich übergehen, und diese Ebene als Symmetrieebene besitzen. Legen wir ihn in einen Punkt, in dem sich drei zweizählige Drehungsachsen von Γ schneiden, so muß er notwendig die Symmetrie der Vierergruppe V besitzen usw. usw. Auch haben, wie aus dem Begriff der Regelmäßigkeit erhellt, alle Bausteine diese Eigensymmetrie.

Die Eigenart dieser Strukturen zeigt sich auch an der Lage und Zahl der Bausteine, die in der Stammfigur Π_0 enthalten sind. Ist N die Zahl der Operationen der zu Γ isomorphen Gruppe, so ist N auch die Zahl der Bausteine, die sich bei *allgemeiner* Ausgangslage innerhalb Π_0 einstellen. Ferner stelle die Gruppe G_μ die Eigensymmetrie eines symmetrischen Bausteins μ dar, und es sei n die Zahl ihrer Operationen. Von den N Lagen des allgemeinen Falls treten dann immer je n zu einem einzigen symmetrischen Baustein der Symmetrie G_μ zusammen; ist

$$N = nv,$$

so enthält die Stammfigur v symmetrische Bausteine. Jeder von ihnen vertritt n andere und ist n -fach zu zählen. Näher hierauf einzugehen, ist an dieser Stelle weder nötig noch möglich. Nur auf eine Analogie zu dem, was wir für die Punktgruppen mit symmetrischem Baustein ausführten, sei noch hingewiesen. Wie bei ihnen, *spaltet sich* auch bei den räumlichen Anordnungen die Gesamtsymmetrie der Struktur in *zwei Teile*: der eine tritt in den Operationen zutage, die den Baustein in sich überführen, die also seiner Eigensymmetrie entsprechen,

der andere in denen, die ihn in die übrigen Lagen überführen. Dieser allein stellt die eigentliche Anordnungsregelmäßigkeit dar, auf der Verbindung beider beruht die Gesamtsymmetrie der Struktur. Nun ist die Bausteinsymmetrie G_μ notwendig eine Untergruppe von Γ , also können wir sagen:

11. Enthält eine Raumgruppe Γ die Operationen einer Punktgruppe G' als Untergruppe, so können mit ihr Strukturen mit symmetrischem Baustein μ von der Eigensymmetrie G' gebildet werden. Die Gesamtsymmetrie der Struktur spaltet sich dann in zwei Teile; der eine wird durch die Eigensymmetrie der Bausteine dargestellt, der andere durch ihre Anordnung.

Auch der Fall 3) kann sich bei den Raumgruppen einstellen; über ihn können hier nur einige vorläufige Erörterungen Platz finden. Eine überzählige Eigensymmetrie der Bausteine muß bei den Raumgruppen dieselbe störende Wirkung haben, wie bei den Punktgruppen; für alles dies kann immer wieder auf die Isomorphie zwischen Punktgruppe und Raumgruppe verwiesen werden. Ist die Struktur mit einer Raumgruppe Γ erzeugt, so kann eine Übersymmetrie der Struktur entstehen, wenn Lage und Eigensymmetrie des Bausteins für die Struktur die Deckoperationen einer höheren Gruppe Γ_1 zuläßt. Umgekehrt wird sich also die der Gruppe Γ eigene Struktur für solche Bausteinlagen nur einstellen, wenn dem Baustein eine gewisse Symmetriebeschränkung auferlegt wird. Analoge Verhältnisse haben wir bereits im Fall der Bravais'schen Strukturen kennen gelernt; die Strukturen einer Unterabteilung stellen sich immer nur dann ein, wenn die Eigenart des Bausteins die ihnen entsprechende Symmetriebeschränkung erfährt. Dieser Hinweis mag hier genügen.

§ 12. **Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte.** Das in § 8 und 9 dargestellte Verfahren, das aus einem Baustein μ die gesamte Anordnung entstehen läßt, soll in die Sprache der analytischen Geometrie übertragen werden; in Analogie zu den isomorphen Betrachtungen von Kap. VII. Wir müssen uns auch hier zunächst auf gewisse allgemeine Überlegungen beschränken.

Wir haben den Baustein μ zuvörderst den $N-1$ Operationen

$$22) \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots \mathfrak{S}$$

zu unterwerfen, und dann noch den sämtlichen Translationen der Gruppe Γ_τ . Die $N-1$ Operationen 22) sind isomorph zu den $N-1$ Operationen

$$23) \quad \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \dots \mathfrak{S}'$$

der zu I' isomorphen Punktgruppe G . Die Koordinatenwerte, die durch diese Operationen aus einem Punkt xyz hervorgehen, sind in Kap. VII bestimmt worden. Die hier zu lösende Aufgabe betrifft gewisse möglicherweise zu ihnen hinzutretende Zusatztranslationen. Voraussetzung ist naturgemäß, daß *das Koordinatensystem und die Lage der erzeugenden Operationen zu ihm in der gleichen Weise gewählt wird, wie in Kap. VII*; dies soll also stets geschehen. Die Zusatzwerte stellen sich in folgender Weise ein. In Kap. VII gehen aus xyz die andern Koordinatentripel durch die in 23) enthaltenen Drehungen, Spiegelungen usw. hervor, deren Achsen und Ebenen durch O gehen; bei den Raumgruppen treten die allgemeineren Operationen 22) an ihre Stelle. Möge insbesondere $x_a'y_a'z_a'$ der Punkt sein, der aus xyz durch $\mathfrak{A}'$ hervorgeht, und ebenso $x_ay_az_a$ der Punkt, der durch die Operation $\mathfrak{A}$ entsteht, so ist die Beziehung zwischen $x_ay_az_a$ und $x_a'y_a'z_a'$ zu ermitteln.

Nun besteht zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ stets eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\mathfrak{T}',$$

wo $\mathfrak{T}'$ eine wohlbestimmte Translation ist¹⁾. Gemäß dieser Gleichung entsteht der Punkt $x_ay_az_a$ auch so, daß wir xyz zuerst in $x_a'y_a'z_a'$ übergehen lassen, und ihn dann noch der Translation $\mathfrak{T}'$ unterwerfen. *Dies bedingt die ebengenannten Zusatztranslationen.* Hat die Translation $\mathfrak{T}'$ den vektoriellen Wert τ' , so können wir in vektorieller Schreibweise

$$24) \quad (x_ay_az_a) = (x_a'y_a'z_a') + \tau'$$

¹⁾ Eine Translation von Γ_τ ist τ' nicht.

setzen¹⁾; die Werte x_a, y_a, z_a selbst ergeben sich hieraus, wenn wir τ' nach den Koordinatenachsen in seine drei Bestandteile spalten. Ist also

$$\tau' = x_\tau + y_\tau + z_\tau,$$

so erhalten wir

$$25) \quad x_a = x_a' + x_\tau, \quad y_a = y_a' + y_\tau, \quad z_a = z_a' + z_\tau.$$

Sind in dieser Weise die Koordinatentripel $(x_a y_a z_a)$ für jede Operation von 22) bestimmt, so haben wir diese Tripel noch den sämtlichen Translationen von Γ_τ zu unterwerfen, und gelangen so von den Werten 25) zu den vektoriell geschriebenen Werten

$$26) \quad (x_a y_a z_a) + 2m_1\tau_1 + 2m_2\tau_2 + 2m_3\tau_3.$$

Sie bilden die Koordinatentripel der sämtlichen Strukturpunkte.

Aus der vorstehenden Ableitung schließen wir noch, daß bei denjenigen Gruppen, in denen die Operationen 22) mit den Operationen 23) der Punktgruppe G *identisch* sind — also bei den Gruppen vom Bravais'schen Typus — Translationskomponenten x_τ, y_τ, z_τ *nicht auftreten*; bei ihnen ist eine jede Operation $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}'$ *identisch*. Also folgt:

12. *Enthält eine zur Punktgruppe G isomorphe Raumgruppe Γ die Gruppe G selbst als Untergruppe (Bravais'scher Typus), so gehen in die Koordinaten der gleichwertigen Punkte Translationskomponenten nicht ein.*

An unserer Betrachtung ist freilich noch etwas unbestimmt geblieben, nämlich der Punkt, der gemäß § 9 den Ausgangspunkt für die Konstruktion des Gitters und seiner Parallelepipede bildet. Über ihn ist also noch eine Festsetzung zu treffen. Er bildet zugleich den Anfangspunkt des Koordinatensystems; wir bezeichnen ihn für den Augenblick durch O' . Diesen Punkt O' verlegen wir aber nicht in eine Ecke, sondern vielmehr in den *Mittelpunkt* der Stammfigur Π_0 ; so wollen wir das Gitter gestellt denken. Nehmen wir dann den Punkt (xyz) von Kap. VII *hinlänglich nahe bei O' an*, so werden wir es erreichen, daß alle Punkte, die durch die Operationen 22) aus

¹⁾ τ' kann sich auch auf Null reduzieren.

(xyz) hervorgehen, ebenfalls in der so gewählten Stammfigur enthalten sind. Insbesondere haben sie im Fall der Bravais'schen Strukturen in Π_0 die gleiche Lage zu O' und den Achsen, wie bei der ihr entsprechenden Punktgruppe G ¹⁾.

Kap. XIII. Die Raumgruppen vom triklinen und monoklinen Typus

§ 1. Vorbemerkungen, Figuren, Bezeichnungen. Der Ableitung der Gruppen seien einige Bemerkungen über den allgemeinen Gang der Untersuchung, die Bezeichnungen und die Figuren vorausgeschickt.

1) Die Grundlagen für die Ableitung sind in den allgemeinen Sätzen und Formeln von Kap. XII enthalten; zumal im Satz 1 über die Isomorphie der Gruppen I und G , im Satz 3 über die schrittweise Erzeugung, in den Ergebnissen von § 4 über die Raumgruppen vom zyklischen Typus und in den Erzeugungssätzen von § 5 und § 6. Auf sie ist die gesamte Ableitung zu stützen. Als Einteilungsgrund wird uns der Symmetriecharakter des Gitters dienen, und damit zugleich das Kristallsystem, dem die Gruppe angehört. Immer beginnen wir mit den Gruppen vom zyklischen Typus und schreiten von den Gruppen Γ niederer Symmetrie aufwärts zu den Gruppen Γ_1 höherer Symmetrie; und zwar mittels einer solchen Operation $\mathcal{Q}$, die eine Deckoperation für die Achsenschaaren der niederen Gruppe Γ ist.

2) Für die anschauliche Erfassung und die praktische Verwendung der Raumgruppen kommt in erster Linie die Lage ihrer Achsenschaaren und Ebenenschaaren in Betracht; wir werden versuchen, sie durch möglichst zweckmäßige Figuren darzustellen. Sie sind nach demselben Verfahren gezeichnet, von dem wir in Kap. IX Gebrauch machten, und das dort eingehend erörtert wurde. Wir nennen die Figuren die *Achsen-*

¹⁾ Bei Wahl eines andern Anfangspunktes erfahren alle Zusatztranslationen (oder Tripel) die gleiche dieser Wahl entsprechende Änderung.

figuren der Gruppen Γ . Sie werden uns in doppelter Richtung nützlich sein. Erstens sollen sie die Auffindung der oben erwähnten Operationen $\mathfrak{Q}$ an die Hand geben, mittels deren wir die Erzeugung der neuen Gruppen Γ_1 bewerkstelligen. Zweitens werden sie dazu dienen, die in Kap. XII, § 11 aufgeworfene Frage nach der Eigensymmetrie der Bausteine und ihrer Bedeutung für die Struktur zu beantworten; sie werden uns zu ähnlichen Tabellen führen, wie sie am Schluß von Kap. IX für die Gitter vorhanden sind.

3) Für die Beziehungen der Punktgruppen G zu den Raumgruppen Γ behalten wir die Bezeichnungen von Kap. XI bei; $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \dots$ sind Operationen der Gruppe G , und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ sind isomorphe Operationen von Γ . Nach wie vor soll γ eine *horizontale* Ebene darstellen und zwar die Grundfläche der Stammfigur Π_0 ; α und β die zu ihr *vertikalen* Seitenflächen durch den Punkt O .

In erster Linie sind die *vertikalen Achsen* der Raumgruppen in Betracht zu ziehen. Sie bestimmen in der Grundebene γ durch ihre Fußpunkte eine Figur, die wieder das *Fußpunktenetz* heißen soll. Achsen, die durch die Operationen von Γ unter sich zur Deckung gelangen, heißen *gleichwertige* Achsen. Die ungleichwertigen Achsen unterscheiden wir, wie in Kap. IX, durch Buchstaben $a, b, c \dots$. Achsen, die für eine Gruppe Γ ungleichwertig sind, können für eine Gruppe Γ_1 höherer Symmetrie gleichwertig werden.

4) Die Bezeichnung der Raumgruppen selbst schließt sich an die Bezeichnung der Punktgruppen an, denen sie isomorph sind; mit der Maßgabe, daß wir die lateinische Bezeichnung der Punktgruppen durch deutsche Buchstaben ersetzen. Jeder Punktgruppe entsprechen im Allgemeinen mehrere isomorphe Raumgruppen; sie werden durch einen *oberen* Index gekennzeichnet werden, während alle übrigen Indizes nach unten versetzt werden. So entsprechen den Punktgruppen

$$C_2, C_4^r, D_6^h \dots$$

die Raumgruppen

$$\mathfrak{C}_2^m, \mathfrak{C}_{6v}^m, \mathfrak{D}_{3h}^m, \dots$$

wo m die Nummer der Raumgruppen jeder einzelnen Symmetriegattung bedeutet, also der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 . . . erhält.

5) In eine jede Raumgruppe I' geht eine Translationengruppe I_τ ein. Ihr entspricht ein Punktgitter, und dies Gitter leistet für die geometrische Vorstellbarkeit der Raumgruppen bessere Dienste, als die Translationengruppe; es ist deshalb zweckmäßiger, immer von dem in I' enthaltenen *Punktgitter* I_τ zu sprechen.

§ 2. Die Gruppen vom triklinen Typus. Das Gitter ist von beliebiger Art, also ein Gitter I_τ . Es ist nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch ein unsymmetrisches Gitter; auch ihm kommen aber die in Satz 16 von Kap. IX genannten Symmetriezentra zu; also insbesondere die Punkte

1) $O, A, B, C, D, E, F, G, H, K, M.$

Wir wollen dies nochmals als Satz aussprechen, und zwar in folgender Form:

1. *Für jedes Gitter sind die Gitterpunkte, sowie die Mitten der Verbindungslinien zweier Gitterpunkte sämtlich Symmetriezentra; oder*

1a. *Ein Symmetriezentrum O bedingt alle Punkte, die von O um eine halbe Translation entfernt sind, ebenfalls als Symmetriezentra.*

Wir folgern daraus noch, daß alle diese Punkte als erzeugende Inversionszentra im Sinn von Kap. XII, § 7 *gleichwertig* sind.

Die Symmetriegruppen vom triklinen Typus sind

2) $S_2 = \{1, \mathfrak{S}\} = \{C_1, \mathfrak{S}\}$ und $C_1 = \{1\}.$

Wir werden finden, daß ihnen nur je eine einzige Raumgruppe entspricht.

Da die Gruppe C_1 nur die Identität enthält, so enthält (Kap. XII, § 1) eine zu C_1 isomorphe Raumgruppe nur solche Operationen, die der Identität isomorph sind, also Translationen, und somit nur die Gruppe I_τ selbst. Alle Gruppen I_τ sind in bezug auf ihren Symmetriecharakter gleichwertig; es gibt daher

in der Tat nur eine einzige Raumgruppe von dieser Gattung. Wir bezeichnen sie durch

$$\mathfrak{C}_1 = \{I_\tau\}.$$

Die Punktgruppe S_2 entsteht nach 2) aus C_1 durch Multiplikation mit der Inversion $\mathfrak{I}$, nach dem Hauptideezeugungssatz von Kap. XII, § 3 gehen daher die zu S_2 isomorphen Raumgruppen aus $\mathfrak{C}_1$ durch Multiplikation mit einer zu $\mathfrak{I}$ isomorphen Operation hervor. Eine solche ist (Kap. IV, § 5) wieder eine Inversion. Ferner muß diese Inversion die Gruppe I_τ in sich überführen, als Inversionszentrum kommt daher jeder der Punkte 1) in Betracht. Da sie aber, wie wir eben sahen, als erzeugende Inversionszentra sämtlich gleichwertig sind, so können wir irgendeinen von ihnen hierzu auswählen; es sei der Punkt O . Wir erhalten also wiederum nur einen Gruppentypus der Symmetrie S_2 .

Bezeichnen wir die zugehörige Inversion kurz durch $\mathfrak{I}$, so ergibt sich so die Gruppe

$$\mathfrak{S}_2 = \{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{I}\} = \{I_\tau, \mathfrak{I}\}^1).$$

Es folgt also:

2. Jeder der beiden Klassen des triklinen Systems entspricht je eine Raumgruppe I . Ihr Gitter I_τ ist beliebig.

Die Gruppen vom triklinen Typus sind damit abgeleitet. Wir fügen noch folgende Bemerkungen an:

1) Die sämtlichen Operationen der Gruppe $\mathfrak{S}_2$ sind gemäß Kap. XII, § 1 in

$$3) \quad I_\tau, \{I_\tau, \mathfrak{I}\}$$

enthalten. Das zweite Glied stellt unendlich viele Inversionen dar, und zwar alle, die sich als Produkte von $\mathfrak{I}$ mit den Translationen von I_τ ergeben. Dies sind wieder die oben in Satz 1 genannten Inversionen.

2) Die soeben genannten Punkte sind *zweizählige* Punkte für die Strukturen, die der Gruppe $\mathfrak{S}_2$ entsprechen (Kap. XII, § 11). Wird also der erzeugende Baustein μ in einen dieser

¹⁾ Die Gruppe ist früher von mir durch $\mathfrak{C}_i$ bezeichnet worden.
Schoenflies, Kristallstruktur

Punkte gesetzt, z. B. in O , so muß er die Inversion $\mathfrak{J}$ gestatten, also selbst zentrisch symmetrisch sein.

3) Da nur je eine Raumgruppe für jede der beiden Kristallklassen existiert, so ist klar, daß sie den Bravais'schen Strukturen entsprechen und also auch diese liefern müssen. Diese Beziehung mag für den vorliegenden einfachen Fall nochmals dargelegt werden. Die Bravais'sche Struktur der Klasse C_1 ergibt sich, wenn ein *symmetrieloser* Baustein allen Translationen von Γ_τ unterworfen wird; ihre Übereinstimmung mit der Struktur, die sich mittels der Gruppe $\mathfrak{C}_1$ ergibt, bedarf keines Nachweises. Ebenso entsteht die Bravais'sche Struktur der Klasse S_2 , wenn wir einen *zentrisch symmetrischen* Baustein den Translationen von Γ_τ unterwerfen. Sie ist daher nicht identisch mit der allgemeinen Struktur, die durch die Gruppe $\mathfrak{S}_2$ aus einem Baustein μ allgemeiner Lage entsteht. Um diese Struktur zu erhalten, haben wir den beliebig angenommenen Baustein μ zunächst der Inversion $\mathfrak{J}$ zu unterwerfen. Er geht dadurch in den zu μ zentrisch symmetrischen Baustein $\bar{\mu}$ über, und zwar so, daß für das Paar $(\mu, \bar{\mu})$ der Punkt O ein Symmetriezentrum ist. Auf dieses Paar sind dann noch alle Translationen der Gruppe Γ_τ auszuüben. Fällt der Ausgangsbaustein μ insbesondere in die Stelle O , so fällt $\bar{\mu}$ mit ihm zusammen, es wird ihm dadurch zentrische Eigensymmetrie aufgeprägt, und es stellt sich die Bravais'sche Struktur ein. Lösen wir umgekehrt im Sinn von Kap. XII, § 10 den symmetrischen Baustein der Bravais'schen Struktur atomistisch in das Paar $(\mu, \bar{\mu})$ auf, so entsteht die allgemeine Struktur.

5) Endlich haben wir noch die Koordinaten der gleichwertigen Punkte anzugeben, und zwar kommen nur diejenigen in Betracht, die in der Stammfigur Π_0 enthalten sind; ihre Wahl ist im vorigen Kapitel § 12 festgelegt worden. Da im vorliegenden Fall die erzeugenden Operationen für diese Punkte mit denen der Punktgruppen C_1 und S_2 übereinstimmen, so tun es auch die Koordinatentripel; wir finden also für sie:

$$\mathfrak{C}_1: xyz; \quad \mathfrak{S}_2: xyz, \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Aus ihnen entstehen alle übrigen (a. a. O.) durch Addition der sämtlichen Translationen von Γ_τ .

§ 3. Allgemeine Bemerkungen über die Gruppen vom monoklinen Typus. Dem monoklinen Typus entsprechen die Gitter Γ_m und Γ_m' ; die monoklinen Symmetrieklassen sind

$$4) \quad C_2^h, C_2, S_1 = C_1^h.$$

Der Ableitung der ihnen entsprechenden Raumgruppen schicken wir einige allgemeine Bemerkungen voraus.

Die zur zyklischen Gruppe C_2 isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{C}_2$ ergeben sich gemäß den allgemeinen Sätzen von Kap. XII, § 4; sie erfordern keine eingehendere Vorbetrachtung. Sie enthalten lauter vertikale zweizählige Achsen; ihre Anordnung im Raum ist das, was in Frage steht. Die Achsen bestimmen ein Fußpunktenetz und dies Fußpunktenetz ist bei allen zyklischen Gruppen (a. a. O.) identisch mit dem Fußpunktenetz des ihnen entsprechenden Gitters. Diese Gitternetze sind aber in Kap. IX, § 12 bereits eingehend beschrieben worden. Beim Gitter Γ_m ist das Fußpunktenetz ein Netz mit τ_1, τ_2 als primitivem Paar (Fig. 73, S. 177). Für Γ_m' hatte sich eine doppelte Charakteristik des Fußpunktenetzes ergeben (Satz 20 und 21), je nachdem das Gitter Γ_m' als einfach flächenzentriert oder als körperzentriert aufgefaßt wird (Fig. 74 und 75). An diese Netze läßt sich die Ableitung der Raumgruppen $\mathfrak{C}_2$ direkt anknüpfen.

Die zu C_1^h und C_2^h isomorphen Raumgruppen erfordern eine eingehendere Vorbetrachtung. Die Hilfssätze, die wir abzuleiten haben, sind Verallgemeinerungen derer, die in Kap. IX über die monoklinen Gitter gewonnen wurden. Sie betreffen Produkte von Spiegelungen und Gleitspiegelungen mit Translationen, kehren in analoger Form auch bei den übrigen Raumgruppen wieder und fließen unmittelbar aus den in Kap. IV, § 4 abgeleiteten Formeln.

Sei $\sigma_m \parallel \sigma_h$ die Ebene, die von σ_h den Abstand τ_z besitzt¹⁾. Wir führen für das Produkt aus $\mathfrak{S}_h$ oder $\mathfrak{S}_h(\tau)$ und $2\tau_z$ noch die naheliegende Schreibweise

$$\mathfrak{S}_h \cdot \{2\tau_z\} \text{ und } \mathfrak{S}_h(\tau) \cdot \{2\tau_z\}$$

¹⁾ Die Ebene σ_h ist irgendeine zu den Achsen senkrechte Ebene; wir benutzen daher in diesem Kapitel zweckmäßig die Bezeichnungen des Textes statt der auf S. 175 eingeführten.

ein, so erhalten wir aus Kap. IV, § 4 unmittelbar

$$a) \quad \mathfrak{S}_h \cdot \{2\tau_s\} = \mathfrak{S}_m, \quad \mathfrak{S}_h(\tau) \cdot \{2\tau_s\} = \mathfrak{S}_m(\tau)^3.$$

Diese beiden Formeln genügen bereits für das Gitter Γ_m .

Die Formeln für Γ_m' knüpfen sich an die Ebene $\sigma_m' \parallel \sigma_h$, die von σ_h um $1/2 \tau_s$ entfernt ist. Wir gehen hier von den beiden (zu a) analogen) Gleichungen aus

$$\mathfrak{S}_h \cdot \{\tau_s\} = \mathfrak{S}_m', \quad \mathfrak{S}_h(\tau) \cdot \{\tau_s\} = \mathfrak{S}_m'(\tau).$$

Wir legen zunächst die erste Auffassung des Gitters Γ_m' zugrunde; dann bilden

$$2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

das primitive Tripel. Wir multiplizieren die letzten beiden Gleichungen mit $\tau_1 + \tau_2$ und erhalten

$$b) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_h \cdot \{2\tau_3\} &= \mathfrak{S}_m'(\tau_1 + \tau_2); \\ \mathfrak{S}_h(\tau) \cdot \{2\tau_3\} &= \mathfrak{S}_m'(\tau + \tau_1 + \tau_2). \end{aligned}$$

Für die zweite Auffassung von Γ_m' bilden

$$2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$$

das primitive Tripel. Hier erhalten wir analog durch Multiplikation mit τ_1 die Gleichungen

$$c) \quad \mathfrak{S}_h \cdot \{2\tau_3\} = \mathfrak{S}_m'(\tau_1), \quad \mathfrak{S}_h(\tau) \cdot \{2\tau_3\} = \mathfrak{S}_m'(\tau + \tau_1).$$

Nunmehr können wir zur Ableitung der Raumgruppen von der Symmetrie C_1^h übergehen.

§ 4. Die Gruppen der Symmetrie $C_1^h = S_1$. Die Gruppe C_1^h genügt dem Bildungsgesetz

$$5) \quad C_1^h = S_1 = \{C_1, \mathfrak{S}_h'\}.$$

Sie entsteht also aus C_1 mittels einer horizontalen Spiegelung $\mathfrak{S}_h'$. Die zu ihr isomorphen Raumgruppen ergeben sich daher nach dem Haupttheorem von Kap. XII, § 3 mittels einer zu $\mathfrak{S}_h'$ isomorphen Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$, wenn sie eine Deckoperation des Gitters Γ_m oder Γ_m' ist. Das ist sie aber gemäß Kap. XII, § 2 immer, wenn τ einen der vier Werte

$$\tau = 0, \quad \tau = \tau_1, \quad \tau = \tau_2, \quad \tau = \tau_1 + \tau_2$$

²⁾ Es kommt Formel 4c) in Betracht, mit der Maßgabe, daß $t\sigma = 0$ ist.

besitzt. Dem primitiven Paar $2\tau_1$ und $2\tau_2$ kommt jedoch, wie nochmals bemerkt sei, an sich keinerlei kristallographische Vorzugsstellung gegenüber irgendeinem andern primitiven Paar der Ebene γ zu.

Die Gruppe C_1^h besteht gemäß Gl. 5) aus den beiden Operationen 1 und $\mathfrak{S}_h'$ und demgemäß stellen sich die Operationen jeder zu C_1^h isomorphen Raumgruppe $\mathfrak{C}_{1h}$ (Kap. XII, § 1) in der Form

$$6) \quad \Gamma_\tau, \{ \Gamma_\tau, \mathfrak{S}_h(\tau) \}$$

dar, wo Γ_τ das Gitter Γ_m oder Γ_m' sein kann und $\mathfrak{S}_h(\tau)$ dem vorstehenden gemäß zu wählen ist.

Sei Γ_τ zunächst das Gitter Γ_m , so folgt aus den Gleichungen a), daß jede der beiden Operationen $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_h(\tau)$ eine gleichartige Operation $\mathfrak{S}_m$ und $\mathfrak{S}_m(\tau)$ für die Ebene σ_m bedingt; in diesem Fall sind also alle durch die Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$ bedingten spiegelnden Ebenen von gleicher Art und folgen im Abstand τ , aufeinander; d. h.

3. *Beim monoklinen Gitter Γ_m sind alle spiegelnden Ebenen von gleicher Art; entweder reine Symmetrieebenen oder Ebenen mit der Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$. Sie folgen im Abstand τ , aufeinander.*

Wie wir soeben hervorhoben, sind für das Gitter Γ_m alle Translationen von γ gleichwertig; daher brauchen wir nur *eine* einzige von ihnen in Betracht zu ziehen. Wir wollen für sie die Bezeichnung 2τ beibehalten. Wir erhalten so die beiden Gruppen¹⁾

$$\mathfrak{C}_{1h}^1 = \{ \Gamma_m, \mathfrak{S}_h \} \text{ und } \mathfrak{C}_{1h}^2 = \{ \Gamma_m, \mathfrak{S}_h(\tau) \}.$$

Für $\mathfrak{C}_{1h}^1$ sind alle spiegelnden Ebenen reine Symmetrieebenen, für $\mathfrak{C}_{1h}^2$ sind sie sämtlich Ebenen gleitender Symmetrie mit der Komponente τ . Andere Symmetrieelemente treten nicht auf; von einer Figur kann daher abgesehen werden.

Beim Gitter Γ_m' ergibt sich Lage und Art der spiegelnden Ebenen aus den Gleichungen b) und c). Hier treten in derselben Gruppe je zwei verschiedene Werte von τ zugleich auf;

¹⁾ Die frühere Bezeichnung war $\mathfrak{C}_s$.

welche Form sie haben, hängt davon ab, ob Γ_m' in erster oder zweiter Auffassung zugrunde gelegt wird. Bei der ersten Auffassung sind es, wenn $\mathfrak{S}_h$ die erzeugende Operation ist, nach b) die beiden Werte

$$\tau = 0 \text{ und } \tau = \tau_1 + \tau_2,$$

die ständig abwechseln. Ist $\mathfrak{S}_h(\tau)$ die erzeugende Operation, so können wir, da in dem primitiven Paar $2\tau_1$ und $2\tau_2$ die Translation $2\tau_1$ beliebig ist, τ mit τ_1 identisch setzen; dann sind, in reduzierter Form (Kap. XII, § 2), ebenfalls nach c)

$$\tau = \tau_1 \text{ und } \tau = \tau_2$$

die beiden Werte, die abwechselnd auftreten. In beiden Fällen folgen die spiegelnden Ebenen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ aufeinander.

Liegt die zweite Auffassung des Gitters Γ_m' vor, so ändern sich nur die wechselweise auftretenden Werte von τ . Hier können wir, ohne die Allgemeinheit zu stören, τ mit τ_2 identisch setzen; dann sind

$$0, \tau_1 \text{ und } \tau_2, \tau_1 + \tau_2$$

die abwechselnden Werte der Translationskomponenten. Wir geben dem so gefundenen Resultat durch folgenden Satz Ausdruck:

4. *Beim monoklinen Gitter Γ_m' treten in erster Auffassung die Operationen $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2)$ oder aber die Operationen $\mathfrak{S}_h(\tau_1)$ und $\mathfrak{S}_h(\tau_2)$ abwechselnd auf; in zweiter Auffassung sind es die Operationen $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_h(\tau_1)$ einerseits, $\mathfrak{S}_h(\tau_2)$ und $\mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2)$ andererseits. Die ihnen entsprechenden Ebenen folgen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ aufeinander.*

Auf Grund dieses Satzes ergeben sich auch für das Gitter Γ_m' nur zwei verschiedene Raumgruppen. Legen wir das Gitter Γ_m' zunächst in erster Auffassung zugrunde, so haben wir sie dem vorstehenden gemäß durch

$$\begin{aligned} 7) \quad \mathfrak{S}_{1h}^3 &= \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h \} = \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2) \} \text{ und} \\ \mathfrak{S}_{1h}^4 &= \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h(\tau_1) \} = \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h(\tau_2) \} \end{aligned}$$

darzustellen. Legen wir die zweite Auffassung zugrunde, so erhalten wir statt dessen

$$\begin{aligned} 7a) \quad \mathfrak{S}_{1h}^3 &= \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h \} = \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h(\tau_1) \} \text{ und} \\ \mathfrak{S}_{1h}^4 &= \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h(\tau_2) \} = \{ \Gamma_m', \mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2) \}. \end{aligned}$$

Die Aufeinanderfolge der spiegelnden Ebenen zeigt für die Gruppe $\mathfrak{G}_{1h}^3$ die Figur 76 und 76a (S. 179), für die Gruppe $\mathfrak{G}_{1h}^4$ Fig. 106 und 107. Es folgt also:

5. Es gibt vier Gruppen der Symmetrie C_{1h}^h ; zwei mit dem Gitter Γ_m und zwei mit Γ_m' .

§ 5. Die Gruppen der Symmetrie C_2 . Die Gruppe C_2 enthält die beiden Operationen

$$8) \quad 1, \mathfrak{A}'(\pi);$$

dementsprechend enthalten die zu ihr isomorphen Raumgruppen die Operationen

$$9) \quad \Gamma_\tau, \{ \Gamma_\tau \mathfrak{A}(\pi, t) \},$$

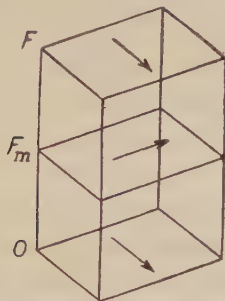


Fig. 106

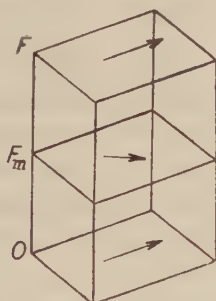


Fig. 107

und zwar ist Γ_τ entweder Γ_m oder Γ_m' , während t (gemäß Kap. XII, § 3) einen der beiden Werte 0 und τ_s haben kann.

Sei zunächst Γ_m das Gitter, so ergeben sich mit diesen beiden Werten t zwei verschiedene Gruppen; nämlich

$$\mathfrak{G}_2^1 = \{ \mathfrak{A}(\pi); \Gamma_m \} \text{ und } \mathfrak{G}_2^2 = \{ \mathfrak{A}(\pi, \tau_s); \Gamma_m \}.$$

Sie enthalten die Operationen

$$10) \quad \Gamma_m, \{ \Gamma_m \mathfrak{A}(\pi) \} \text{ und } \Gamma_m, \{ \Gamma_m \mathfrak{A}(\pi, \tau_s) \}.$$

Achsenverteilung und Fußpunktenetz dieser Gruppen ist aus Fig. 73 (S. 177) zu ersehen; sie ist für beide Gruppen (Kap. XII, § 4) die gleiche. Für $\mathfrak{G}_2^1$ sind alle Achsen, wie in Fig. 73, Drehungsachsen, für $\mathfrak{G}_2^2$ sind sie durch Schraubenachsen zu er-

setzen. Die durch O, D, E, G gehenden Achsen a, b, c, d sind *ungleichwertig*; keine von ihnen geht durch eine Operation der Gruppe in eine andere über.

Dagegen existiert nur *eine* Raumgruppe dieser Art mit dem Gitter Γ_m' . Dies beruht auf der bereits in Kap. IX, § 12 benutzten Gleichung

$$11) \quad \mathfrak{A}(\pi) \cdot \{2\tau_3\} = \mathfrak{B}(\pi, \tau_3),$$

und zwar hängt die Achse der Schraubung $\mathfrak{B}$ nur von der in $2\tau_3$ enthaltenen horizontalen Translationskomponente ab; sie ist von a um die Hälfte dieser Komponente entfernt. In der mit $\mathfrak{A}(\pi)$ erzeugten Gruppe tritt also auch die Schraubung $\mathfrak{B}$ auf; es müssen also die mit $\mathfrak{A}(\pi)$ und $\mathfrak{A}(\pi, \tau_3)$ erzeugten Gruppen identisch sein. Die so bestimmte Gruppe kann durch

$$\mathfrak{G}_2^3 = \{\mathfrak{A}(\pi), \Gamma_m'\} = \{\mathfrak{B}(\pi, \tau_3), \Gamma_m'\}$$

bezeichnet werden. Wir erhalten also den Satz:

6. *Es gibt drei Gruppen von der Symmetrie C_2 ; zwei mit dem Gitter Γ_m , eine mit Γ_m' .*

Für die Kennzeichnung der Achsenfiguren wollen wir für Γ_m' sowohl die erste, wie die zweite Auffassung zugrunde legen. Die erste Auffassung schließt an den Satz 20 von Kap. IX an; das Gitter Γ_m' erscheint körperzentriert, das Fußpunktenetz ist für die Drehungsachsen und die Schraubenachsen je ein Netz mit dem primitiven Paar τ_1, τ_2 (Fig. 75). Es gibt, wie die Figur zeigt, vier Schaaren ungleichwertiger Achsen, a, b, d, e ; die Achsen durch O und G und die durch D und E sind hier gleichwertig. Die zweite Auffassung betrachtet Γ_m' als einfach flächenzentriert. Die Achsenfigur entspricht dem Satz 21 von Kap. IX und kommt in der Figur 74 zum Ausdruck. Die vier Schaaren ungleichwertiger Achsen a, b, d, e gehen jetzt durch O, E, D_m und die Mitte von EG .

§ 6. Die Gruppen der Symmetrie C_2^h . Die Gruppe C_2^h gestattet eine doppelte Erzeugung, gemäß der Formel

$$12) \quad C_2^h = \{C_2, \mathfrak{S}_h'\} = \{C_2, \mathfrak{S}'\}.$$

Die ihr isomorphen Raumgruppen gestatten daher ebenfalls eine doppelte Erzeugung. Sie entstehen aus den Gruppen $\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{G}_2^3$

mittels einer zu $\mathfrak{S}_h'$ oder einer zu $\mathfrak{J}'$ isomorphen Operation. Wir wählen eine zu $\mathfrak{S}_h'$ isomorphe Operation als erzeugende. Sie ist eine Spiegelung $\mathfrak{S}_h$ oder eine Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_h(\tau)$ an irgendeiner horizontalen Ebene σ_h , vorausgesetzt, daß sie eine Deckoperation für die Achsenschaaren dieser Gruppen ist. Sie muß es daher in erster Linie für das Gitter sein, und so greifen für sie und für die Art und Lage der spiegelnden Ebenen jedenfalls alle in § 3 enthaltenen Schlüsse Platz. Auf ihrer Grundlage werden wir die Gruppen ableiten.

Die Gruppen *enthalten* aber auch Inversionen; die Lage ihrer Zentra zur Ebene σ_h der erzeugenden Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$ ist zu bestimmen. Es genügt, in jedem Fall ein solches Zentrum anzugeben. Zu ihm kommen stets noch alle die, die nach Satz 1 a durch die Translationen des Gitters bedingt sind; sie liegen zu ihm ebenso, wie die in § 2 genannten Punkte zu O . Wir werden finden, daß sich als Symmetriezentra die Punkte O , O_1 , O_2 , O_3 von Figur 108 einstellen können, wo $OO_2 = \frac{1}{2}\tau$ ist und $OO_1 = O_2O_3 = \frac{1}{2}\tau_z$. Dies ergibt sich folgendermaßen.

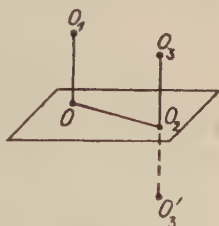


Fig. 108

Wir gehen von Kap. II, Gleichung 6) aus, also von

$$d) \quad \mathfrak{S}_h \mathfrak{A}(\pi) = \mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_h = \mathfrak{J},$$

und zwar ist $\mathfrak{J}$ die Inversion gegen den Punkt O . Aus ihr folgt durch rechtsseitige Multiplikation mit $\mathfrak{I}_x$ nach Kap. II, Gleichung 10a)

$$e) \quad \mathfrak{S}_h \mathfrak{A}(\pi, \tau_x) = \mathfrak{J} \mathfrak{I}_x = \mathfrak{J}_1,$$

wo $\mathfrak{J}_1$ die Inversion gegen den Punkt O_1 ist, und es ist $OO_1 = \frac{1}{2}\tau_x$. Durch rechtsseitige Multiplikation von d) mit $\mathfrak{I}(= \tau)$ folgt analog

$$f) \quad \mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_h(\tau) = \mathfrak{J} \mathfrak{I} = \mathfrak{J}_2,$$

wenn $\mathfrak{J}_2$ die Inversion gegen O_2 ist, und zwar ist $OO_2 = \frac{1}{2}\tau$. Endlich folgt hieraus durch linksseitige Multiplikation mit $\mathfrak{I}$.

$$g) \quad \mathfrak{A}(\pi, \tau_x) \mathfrak{S}_h(\tau) = \mathfrak{I}_x \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3',$$

wenn $\mathfrak{S}_3'$ eine Inversion gegen den unter der Ebene σ_h im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ gelegenen Punkt O_3' ist¹⁾. Ist aber O_3' ein Symmetriezentrum einer Raumgruppe, so ist, wie wir soeben erwähnten, auch O_3 ein solches, wenn $O_3'O_3 = \tau_z$ ist. Die beiden Operationen der linken Seite von g) bedingen also auch O_3 als Symmetriezentrum.

Wir können nun zur Aufstellung der Gruppen $\mathfrak{G}_{2h}$ übergehen und wählen zunächst $\mathfrak{S}_h$ als erzeugende Operation. Wir erhalten mit ihr aus $\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{G}_2^3$ je eine neue Gruppe; auf Grund der Formeln d) und e) können wir die erzeugenden Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{2h}^1 &= \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_h; \Gamma_m \} = \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S} \} \\ \mathfrak{G}_{2h}^2 &= \{ \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_h; \Gamma_m \} = \{ \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_1 \} \\ \mathfrak{G}_{2h}^3 &= \{ \mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_h; \Gamma_m' \} = \{ \mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S} \}\end{aligned}$$

Für die Achsenfiguren sei zunächst auf Fig. 73 bis 75 (S. 177) verwiesen. Bei $\mathfrak{G}_{2h}^1$ und $\mathfrak{G}_{2h}^3$ ist O ein erzeugendes Symmetriezentrum; zu ihm treten die, die wir in § 2 ein für allemal genannt haben. Die Gruppe $\mathfrak{G}_2^2$ enthält die Schraubung $\mathfrak{A}(\tau, \tau_z)$, und daher ist gemäß e) der Punkt O_1 ein Symmetriezentrum; also der Punkt, der um $\frac{1}{2}\tau_z$ über dem Punkt O liegt.

Die Lage der Symmetrieebenen bestimmt sich für unsere Gruppen in der Weise, die in § 3 dargelegt wurde und aus Satz 3 und 4 hervorgeht. Wir erhalten also für $\mathfrak{G}_{2h}^1$ und $\mathfrak{G}_{2h}^2$ lauter reine Symmetrieebenen im Abstand τ_z . Bei $\mathfrak{G}_{2h}^3$ sind es, wenn wir für das Gitter Γ_m' die erste Auffassung zugrunde legen, teils Symmetrieebenen, teils Ebenen mit der Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2)$; bei der zweiten Auffassung sind es Symmetrieebenen und Ebenen mit der Operation $\mathfrak{S}_h(\tau_1)$. Die Achsenfigur von $\mathfrak{G}_{2h}^1$ wird unmittelbar durch Fig. 73 dargestellt, wenn in ihr die beiden horizontalen Ebenen durch O und F Symmetrieebenen bedeuten; die Achsenfiguren für $\mathfrak{G}_{2h}^2$ und $\mathfrak{G}_{2h}^3$ sind in Fig. 109 und 110 enthalten (in erster Auffassung von Γ_m'); die Ebenen σ_h und σ_m stellen die Symmetrieebenen dar, und F_m ist Symmetriezentrum für $\mathfrak{G}_{2h}^2$ ²⁾.

¹⁾ Daß O_3' unter σ_h liegt, beruht auf der Reihenfolge $\mathfrak{T}_z\mathfrak{S}_3$.

²⁾ Für die Anlage der Figuren vgl. S. 175.

Wir wählen zweitens $\mathfrak{S}_h(\tau)$ als erzeugende Operation. Ist zunächst Γ_m das Gitter, so können wir τ wieder beliebig lassen; immer stellt $\mathfrak{S}_h(\tau)$ eine Deckoperation für die Achsenfiguren von $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$ und damit auch für ihre Achsenschaaren dar. Nach den Formeln f) und g) fällt bei der Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ ein Symmetriezentrum O_2 in die Mitte von τ , und bei der aus $\mathfrak{C}_2^2$ ent-

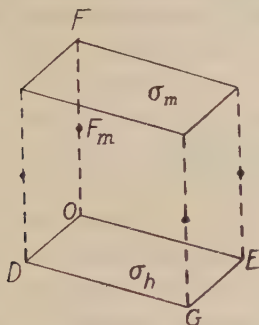


Fig. 109

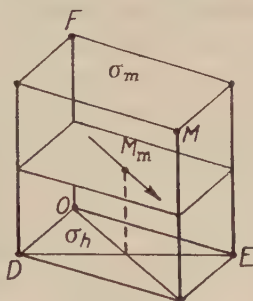


Fig. 110

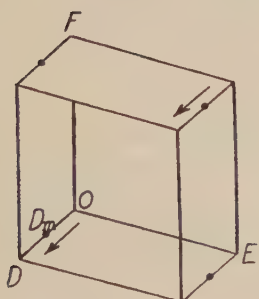


Fig. 111

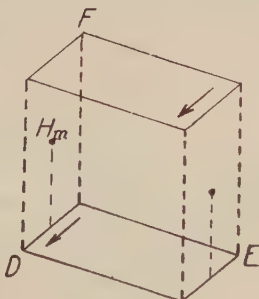


Fig. 112

stehenden Gruppe ein Zentrum O_3 in die durch O_2 gehende Schraubenachse. Wählen wir für τ insbesondere τ_1 , so fällt O_2 in D_m ; der Punkt O_3 liegt dann im Abstand $1/2 \tau_z$ über D_m , fällt also in H_m . Wir erhalten so die beiden Gruppen

$$\mathfrak{C}_{2h}^4 = \{ \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{S}_h(\tau); \Gamma_m \} = \{ \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{S}_2 \}$$

$$\mathfrak{C}_{2h}^5 = \{ \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{S}_h(\tau); \Gamma_m \} = \{ \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{S}_3 \}.$$

Alle spiegelnden Ebenen sind nach Satz 3 von gleicher Art und folgen im Abstand τ_z . Dem entsprechen die Achsenfiguren 111 und 112.

Sei zweitens Γ_m' das Gitter, also $\mathfrak{G}_2^3$ die Gruppe, aus der eine Gruppe $\mathfrak{G}_{2h}$ abzuleiten ist. Wir können uns, wie in § 3, auf die einfachen Werte $\tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2$ von τ beschränken. Die ihnen entsprechenden Operationen $\mathfrak{S}_h(\tau)$ sind stets Deckoperationen für die Achsenfiguren von $\mathfrak{G}_2^3$, also auch für ihre Achsenschaaren. Wir erhalten aber nur *eine* Gruppe aus $\mathfrak{G}_2^3$. Legen wir insbesondere Γ_m' in erster Auffassung zugrunde, so scheidet $\tau_1 + \tau_2$ von selbst aus, da die Operation $\mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2)$ schon in der Gruppe $\mathfrak{G}_{2h}^3$ auftritt; weiter besagt Satz 4, daß $\mathfrak{S}_h(\tau_1)$ und $\mathfrak{S}_h(\tau_2)$ zugleich auftreten. Wird für Γ_m' die zweite

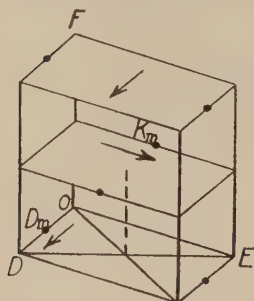


Fig. 113

Auffassung benutzt, so ist es die Operation $\mathfrak{S}_h(\tau_1)$, die schon in $\mathfrak{G}_{2h}^3$ vorhanden ist; ferner treten jetzt $\mathfrak{S}_h(\tau_2)$ und $\mathfrak{S}_h(\tau_1 + \tau_2)$ zugleich auf. Es mag genügen, nur die erste Auffassung zu berücksichtigen; wir erhalten die Gruppe

$$\mathfrak{G}_{2h}^6 = \{ \mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_h(\tau_1); \Gamma_m' \} = \{ \mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{I}_2 \}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\mathfrak{G}_{2h}^6 = \{ \mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_h(\tau_2); \Gamma_m' \} = \{ \mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{I}_2 \}.$$

Die ihr entsprechende Achsenfigur wird durch Fig. 113 dargestellt. Der Punkt O_2 fällt für sie in den Punkt D_m ; zugleich ist aber auch K_m ein Inversionszentrum.

7. *Es gibt sechs Gruppen der Symmetrie C_2^h ; vier mit dem Gitter Γ_m und zwei mit Γ_m' .*

§ 7. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte. Die Aufgabe, die hier zu erledigen ist, betrifft (Kap. XII, § 12) nur die Zusatztranslationen, die zu den in Kap. VII angegebenen Koordinatentripeln möglicherweise hinzutreten. Da diese Aufgabe zum erstenmal behandelt wird, soll dies in aller Ausführlichkeit geschehen. Zuvor sei daran erinnert, daß wir die Koordinatenachsen ebenso annehmen, wie es in Kap. VII geschehen ist.

Für die Gruppe C_1^h sind (Kap. VII, § 2) die Koordinatentripel

$$xyz \text{ und } xy\bar{z};$$

sie entsprechen den beiden Operationen 1 und $\mathfrak{S}_h'$. Die Gruppen $\mathfrak{G}_{1h}^1$ und $\mathfrak{G}_{1h}^3$ sind mit den gleichen Operationen gebildet; also kommen diese Tripel (ohne Zusatzwerte) auch ihnen zu. Für die Gruppen $\mathfrak{G}_{1h}^2$ und $\mathfrak{G}_{1h}^4$ tritt $\mathfrak{S}_h(\tau)$ als erzeugende Operation an die Stelle von $\mathfrak{S}_h'$; sie führt den Punkt xyz ebenfalls zunächst in $xy\bar{z}$ über und erteilt ihm dann noch die vektorielle Verschiebung τ . Wir stellen daher die gesamte Transformation (a. a. O., Gl. 24) durch

$$xy\bar{z} + \tau$$

dar. Ihre genaue Bedeutung mag nochmals erwähnt werden. Sind x_τ, y_τ, z_τ die Komponenten von τ nach den drei Achsen, so sind

$$x + x_\tau \quad y + y_\tau \quad \bar{z} + z_\tau$$

die Koordinaten des Punktes, der aus xyz durch $\mathfrak{S}_h(\tau)$ hervorgeht. Wir werden jedoch die kurze (vektorielle) Schreibweise beibehalten, und die Auflösung in die drei Koordinatenwerte unterlassen. Wir erhalten alsdann für die vier Gruppen $\mathfrak{G}_{1h}$ die folgenden Koordinatenwerte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{1h}^1 \text{ und } \mathfrak{G}_{1h}^3: & \quad xyz, \quad xy\bar{z} \\ \mathfrak{G}_{1h}^2 \text{ und } \mathfrak{G}_{1h}^4: & \quad xyz, \quad xy\bar{z} + \tau. \end{aligned}$$

Die Punktgruppe C_2 enthält die Operationen 1 und $\mathfrak{U}(\pi)$. Mit den gleichen Operationen sind auch die Gruppen $\mathfrak{G}_2^1$ und $\mathfrak{G}_2^3$ gebildet; daher stimmen ihre Koordinatentripel wieder mit denen von C_2 überein. Es folgt also (Kap. VII, § 2) für

$$\mathfrak{G}_2^1 \text{ und } \mathfrak{G}_2^3: \quad xyz, \quad \bar{x}\bar{y}z.$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}_2^2$ ist mit der Schraubung $\mathfrak{U}(\pi, \tau_z)$ gebildet, die mit der Folge von $\mathfrak{U}(\pi)$ und τ_z äquivalent ist. Ihre Wirkung besteht also darin, daß sie zu dem Übergang von xyz in $\bar{x}\bar{y}z$ noch eine Verschiebung τ_z fügt; also ergeben sich für $\mathfrak{G}_2^2$ die Werte

$$\mathfrak{G}_2^2: \quad xyz, \quad \bar{x}\bar{y}z + \tau_z^1).$$

¹⁾ Für die soeben eingeführten Größen x_τ, y_τ, z_τ ist hier $x_\tau = y_\tau = 0, \quad z_\tau = \tau_z$.

Die Gruppe $C_2^h = \{\mathfrak{C}_2, \mathfrak{S}_h'\}$ entsteht aus C_2 durch Multiplikation mit $\mathfrak{S}_h'$; die ihr entsprechenden vier Tripel (a. u. O.)

$$xyz, \bar{x}\bar{y}z, xy\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

ergaben sich, indem man die beiden Tripel der Gruppe C_2 noch der Operation $\mathfrak{S}_h'$ unterwirft. Wir fragen wieder, welche Änderungen diese Tripel für die einzelnen Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}$ infolge ihrer veränderten Bildungsgesetze erleiden. Zunächst ist klar, daß die ersten beiden Tripel einer jeden Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ immer die beiden Tripel derjenigen Gruppe $\mathfrak{C}_2$ sind, aus der die Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ erzeugt wurde. Es handelt sich also nur um die letzten beiden Tripel. Wir haben drei Fälle zu unterscheiden.

1) Bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}^1$ und $\mathfrak{C}_{2h}^3$ können Zusatztranslationen nicht auftreten. Sie entstehen nämlich aus $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^3$, deren Koordinatenwerte mit denen von C_2 übereinstimmen, und sind außerdem aus $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^3$ mit derselben Operation $\mathfrak{S}_h$ gebildet wie C_2^h aus C_2 . 2) Die Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}^4$ und $\mathfrak{C}_{2h}^6$ entstehen ebenfalls aus $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^3$, und zwar mittels der Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$; die beiden ersten Tripel sind daher die gleichen wie bei C_2^h , und zu den letzten beiden Tripeln von C_2^h tritt, in der gleichen Weise wie oben bei $\mathfrak{C}_2^2$, noch die Translation τ additiv hinzu.

3) Anders ist es bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}^2$ und $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Bei ihnen entsprechen die ersten beiden Tripel der Gruppe $\mathfrak{C}_2$, ihr zweites Tripel $\bar{x}\bar{y}z + \tau_z$ enthält schon die Translation τ_z und es ist daher zu prüfen, welche Wirkung die Operationen $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_h(\tau)$ auf dieses Tripel $\bar{x}\bar{y}z + \tau_z$ ausüben. Wir beantworten es zunächst für die Operation $\mathfrak{S}_h$. Sie bewirkt allgemein den Übergang von z in $\bar{z}$. Besteht z , wie hier, aus zwei Summanden, so geht durch sie offenbar jeder der beiden Summanden in seinen entgegengesetzten Wert über; es geht also

$$\bar{x}\bar{y}z + \tau_z \text{ in } \bar{x}\bar{y}\bar{z} - \tau_z$$

über. Tritt endlich an die Stelle von $\mathfrak{S}_h$ die Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$, so tritt, wie immer, noch die Translation τ additiv hinzu. Damit ist unsere Aufgabe erledigt.

Schreiben wir noch alle Tripel so, daß die ihnen entsprechenden Punkte der Stammfigur II_0 angehören (Kap. XII, § 12), ersetzen also $\bar{x}\bar{y}\bar{z} - \tau_z$ durch $\bar{x}\bar{y}z + \tau_z$, so entsteht die folgende Tabelle:

$$\begin{array}{ll}
 \mathfrak{G}_{2h}^1 \text{ und } \mathfrak{G}_{2h}^3: & xyz \quad \overline{x}\overline{y}z \quad \quad \quad xy\overline{z} \quad \quad \quad \overline{x}\overline{y}\overline{z} \\
 \mathfrak{G}_{2h}^2: & xyz \quad \overline{x}\overline{y}z + \tau_z \quad xy\overline{z} \quad \quad \quad \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \tau_z \\
 \mathfrak{G}_{2h}^4 \text{ und } \mathfrak{G}_{2h}^6: & xyz \quad \overline{x}\overline{y}z \quad \quad \quad xy\overline{z} + \tau \quad \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \tau \\
 \mathfrak{G}_{2h}^5: & xyz \quad \overline{x}\overline{y}z + \tau_z \quad xy\overline{z} + \tau \quad \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \tau + \tau_z.
 \end{array}$$

Die Gruppen $\mathfrak{G}_{1h}^1$, $\mathfrak{G}_{1h}^3$, $\mathfrak{G}_2^1$, $\mathfrak{G}_2^3$ und $\mathfrak{G}_{2h}^1$, $\mathfrak{G}_{2h}^3$ entsprechen gemäß Kap. XII, Satz 12 dem einfachen Fall der Bravais'schen Strukturen. *Die Gruppen $\mathfrak{G}_{2h}^1$ und $\mathfrak{G}_{2h}^3$ sind zugleich diejenigen, in denen sich die Gesamtsymmetrie der beiden monoklinen Gitter Γ_m und Γ_m' ausdrückt.*

§ 8. Die Eigensymmetrie der Bausteine. Eine notwendige Eigensymmetrie des Bausteins μ kann sich gemäß Kap. XII, § 11 nur für solche Lagen einstellen, die bei gewissen Operationen der Gruppe F festbleiben; diese Operationen bilden eine Punktgruppe G_μ und in ihr kommt die Symmetrie des Bausteins μ zum Ausdruck. Um eine Übersicht hierüber zu gewinnen, sollen diese Stellen nebst der zugehörigen Gruppe G_μ für jede Raumgruppe F in einer Tabelle dargestellt werden; analog zu den Tabellen, die wir in Kap. IX für die Gitter entwarfen. Welche Stellen dies sind, ist aus den Achsenfiguren ersichtlich. Beispielsweise zeigt die Figur 113 der Gruppe $\mathfrak{G}_{2h}^6$, daß in D_m und K_m Stellen der Eigensymmetrie S_2 sind, und daß jeder Punkt einer der Achsen a und b ein Punkt der Symmetrie C_2 ist; ebenso zeigt Figur 110, daß bei der Gruppe $\mathfrak{G}_{2h}^3$ jeder Punkt von σ_h und σ_m ein Punkt der Symmetrie S_1 ist, jeder Punkt von a und b ein Punkt der Symmetrie C_2 , der Punkt M_m ein Symmetriezentrum¹⁾, und jeder der Punkte O, D, E, F, G, H, K, M ein Punkt der Symmetrie C_2^h usw. In den Gruppen $\mathfrak{G}_{1h}^2$, $\mathfrak{G}_{1h}^4$ und $\mathfrak{G}_2^2$ sind keine Operationen enthalten, die einen Punkt festlassen. In den Tabellen enthält die zweite Spalte die Eigensymmetrie G_μ , und die dritte die Punktlagen, an denen sie auftritt; wir dürfen uns dabei auf den Oktanten p beschränken; aus der Verteilung der Punkte in ihm läßt sich leicht auf die übrigen Oktanten schließen. Die Buchstaben $\sigma_h, a, b \dots$ der dritten Spalte bedeuten, daß ein

¹⁾ Bei zweiter Auffassung des Gitters Γ_m' tritt H_m ein.

jeder Punkt von σ_h , a , b . . . eine Lage für die bezügliche Bausteinsymmetrie abgibt. Außer ihnen kommen wesentlich die in § 1, a) genannten Punkte in Betracht. Die zu σ_h parallele Seitenfläche heiße σ_m . Da Punktlagen, die gleichwertig sind, in einer Struktur stets zugleich auftreten, sollen auch sie in der Tabelle kenntlich gemacht werden, und zwar durch ein Gleichheitszeichen zwischen ihnen.

Tabelle A. Monokliner Typus¹⁾

Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen ³⁾
$\mathbb{G}_{1h}^1$ $\mathbb{G}_{1h}^3$	S_1 S_1	σ_h, σ_m $\sigma_h = \sigma_m$	$\mathbb{G}_{2h}^2$	S_1 S_2	$\sigma_h = \sigma_m$ F_m
$\mathbb{G}_2^1$	C_2	a, b, c, d	$\mathbb{G}_{2h}^3$ ^{a)}	S_1 S_2 C_2 C_2^h	$\sigma_h = \sigma_m$ $M_m(H_m)$ a, b $O = M, D = K$ $E = H, F = G$
$\mathbb{G}_2^3$	C_2	a, b			
$\mathbb{G}_{2h}^1$	S_1 C_2 C_2^h	σ_h, σ_m a, b, c, d O, D, E, F G, H, K, M		$\mathbb{G}_{2h}^4$	S_2 C_2
			$\mathbb{G}_{2h}^5$	S_2	H_m
			$\mathbb{G}_{2h}^6$	S_2 C_2	$D_m, K_m (E_m)$ $a = b$

Mit dieser Tabelle ist die Frage nach der Eigensymmetrie, die dem Baustein bei besonderer Lage *notwendig* zukommt, erledigt. Dem praktischen Gebrauch soll noch eine folgende zweite Tabelle dienen. Sie geht von der Eigensymmetrie G_μ des Bausteins aus und nennt alle die Gruppen und die Punkt-

¹⁾ Die eingeklammerten Buchstaben entsprechen der zweiten Auffassung von Γ_m' . Für die Achsen a, b, c, d vgl. Fig. 73 und 75 (S. 177).

²⁾ Zu F_m kommen die Mitten der übrigen vertikalen Kanten hinzu, zu H_m und K_m die Mitten der Gegenflächen, zu D_m die Mitten aller parallelen horizontalen Kanten; sie sind in jeder Figur durch kleine Kreise hervorgehoben.

³⁾ Für die zweite Auffassung von Γ_m' ist $O = H, D = F, E = M, G = K$.

lagen, an denen sie sich vorfindet; außerdem ist noch die Zähligkeit der Gruppe G_μ und am Ende der Tabelle auch das Gitter angegeben. Die so entstehende Tabelle bildet nur eine Umordnung der Tabelle A, und ist dann mit Vorteil zu benutzen, wenn man Gruppen Γ sucht, in denen Lagen vorgegebener Eigensymmetrie G_μ auftreten.

Tabelle B. Monokliner Typus¹⁾

G_μ	Zähligkeit	Gruppen Γ	Punktlagen
S_2	2	$\mathbb{C}_{2h}^2$ $\mathbb{C}_{2h}^3$ $\mathbb{C}_{2h}^4$ $\mathbb{C}_{2h}^5$ $\mathbb{C}_{2h}^6$	F_m $M_m(H_m)$ D_m H_m $D_m, K_m(E_m)$
$C_h^1 = S_1$	2	$\mathbb{C}_{1h}^1, \mathbb{C}_{1h}^3$ $\mathbb{C}_{2h}^1, \mathbb{C}_{2h}^2, \mathbb{C}_{2h}^3$	σ_h, σ_m σ_h, σ_m
C_2	2	$\mathbb{C}_2^1, \mathbb{C}_2^1, \mathbb{C}_2^4$ $\mathbb{C}_2^3, \mathbb{C}_2^3, \mathbb{C}_2^6$	a, b, c, d a, b
C_2^h	4	$\mathbb{C}_{2h}^1, \mathbb{C}_{2h}^3$	$O, D, E, F,$ G, H, K, M

Das Gitter ist überall Γ_m , nur für $\mathbb{C}_{1h}^3, \mathbb{C}_2^3, \mathbb{C}_{2h}^3, \mathbb{C}_{2h}^6$ ist es Γ_m' .

Wir haben (gemäß Kap. XII, § 11) noch die Punktlagen aufzuzählen, für die eine gewisse Eigensymmetrie des Bausteins eine *unzulässige Übersymmetrie der Struktur* nach sich zieht. Wir haben sie in Kap. XII als *kritische Lagen* bezeichnet, da sie mit besonderer Vorsicht zu behandeln sind. Da diese Betrachtung hier zum erstenmal angestellt wird, soll es ausführ-

¹⁾ Die eingeklammerten Buchstaben beziehen sich auf die zweite Auffassung von Γ_m' .

licher geschehen, wenn auch ihre praktische Bedeutung gerade bei den monoklinen Gruppen gering sein mag; übrigens wird sich zeigen, daß auch diese Fragen bei zweckmäßiger Benutzung der Tabellen A und B eine einfache Beantwortung gestatten.

Wie es bei der triklinen Gruppe $\mathfrak{C}_1$ steht, ist sachlich schon in Kap. XII bei der Erörterung der Bravais'schen Strukturen gesagt worden; falls der Baustein μ zentrisch symmetrisch ist, entsteht immer eine Struktur, die der Gruppe $\mathfrak{C}_2$ von § 2 entspricht.

Der Betrachtung der monoklinen Gruppen schicken wir folgende Überlegungen voraus. Wir haben nur die Gruppen $\mathfrak{C}_{1h}$ und $\mathfrak{C}_2$ in Betracht zu ziehen, *bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}$ kann sich eine Übersymmetrie nicht einstellen*. Dies ergibt sich unmittelbar daraus, daß jede Deckoperation der Struktur auch eine Deckoperation für das in ihr enthaltene Gitter ist, und daß die monoklinen Gitter Γ_m und Γ_m' Deckoperationen über die Symmetrie C_2^h hinaus nicht zulassen.

Hieraus entnehmen wir sofort eine weitere Folgerung. Eine Übersymmetrie, die sich bei einer der Gruppen $\mathfrak{C}_{1h}$ und $\mathfrak{C}_2$ einstellt, kann ebenfalls nur die Symmetrie einer Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ sein; darüber hinaus kann sie wiederum nicht wachsen.

Wir beginnen mit den Gruppen $\mathfrak{C}_2$ und nennen zunächst die evidenten Gesichtspunkte, die wir zugrunde legen. 1) Soll aus einer Gruppe $\mathfrak{C}_2$ (z. B. $\mathfrak{C}_2^1$) bei besonderer Lage des Bausteins μ eine Struktur höherer Symmetrie entstehen, also eine Struktur, die einer Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ entspricht, so muß diese Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ jedenfalls eine solche sein, die sich durch unser Erzeugungsverfahren aus $\mathfrak{C}_2$ ergibt (bei $\mathfrak{C}_2^1$ also $\mathfrak{C}_{2h}^1$ oder $\mathfrak{C}_{2h}^4$). 2) Diese höhere Symmetrie kann nur so zustande kommen, daß μ eine Eigensymmetrie besitzt, die die Symmetrie der Gruppe $\mathfrak{C}_2$ in die Symmetrie einer Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ übergehen läßt, und dies ist nur die Eigensymmetrie S_2 oder S_1 . Das weitere ist aus den Tabellen und den Achsenfiguren zu entnehmen; sie geben die kritischen Lagen unmittelbar an. Dabei ist zu beachten, daß sich diese Lagen ausschließlich mit Rücksicht auf die Achsen-schaaren der Gruppen $\mathfrak{C}_2$ bestimmen lassen. Es stellt daher σ_h eine beliebige zu den Achsen senkrechte Ebene vor, ebenso

O und F_m irgendeinen Punkt einer zweizähligen Achse, und D_m , H_m usw. irgendeinen Punkt in der Mitte zwischen zwei Achsen. Wir führen dies für die einzelnen Gruppen $\mathfrak{C}_2$ durch.

Aus der Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ läßt sich $\mathfrak{C}_{2h}^1$ und $\mathfrak{C}_{2h}^4$ erzeugen. Kritische Lagen für einen Baustein μ der Symmetrie S_2 sind daher erstens jeder Punkt einer zweizähligen Achse und zweitens jeder Punkt in der Mitte zwischen zwei solchen Achsen. Eine kritische Lage für einen Baustein μ mit der horizontalen Eigensymmetrie S_1 ist *jeder* Punkt. Formal ist es zunächst jeder Punkt von σ_h , da aber σ_h eine beliebige Ebene sein kann, so folgt es damit auch für jeden Punkt. Wird also ein solcher Baustein den sämtlichen Operationen von $\mathfrak{C}_2^1$ unterworfen, so entsteht dadurch notwendig eine Struktur, die der Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}^1$ entspricht. Ebenso entsteht eine der Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}^4$ entsprechende Struktur, wenn ein zentrisch symmetrischer Baustein, dessen Ausgangslage ein Punkt einer zweizähligen Achse ist, den Operationen der Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ unterworfen wird. Ist endlich seine Ausgangslage die Mitte zwischen zwei solchen Achsen, so ist die durch die Operationen von $\mathfrak{C}_2^1$ entstehende Struktur eine solche, die der Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}^4$, also der Fig. 111 entspricht.

Analoge Betrachtungen sind für $\mathfrak{C}_2^2$ und $\mathfrak{C}_2^3$ durchzuführen; wir dürfen uns hier schon kürzer fassen. Aus $\mathfrak{C}_2^2$ lassen sich die Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}^2$ und $\mathfrak{C}_{2h}^5$ erzeugen. Für sie zeigt Tabelle A wieder, daß *jeder* Punkt eine kritische Lage für einen Baustein mit der Eigensymmetrie S_1 bildet; hat er sie, so nimmt die aus $\mathfrak{C}_2^2$ abgeleitete Struktur die Übersymmetrie der Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}^2$ an. Kritische Lage für einen Baustein der Symmetrie S_2 ist gemäß Fig. 109 und 112 wieder jeder Punkt einer zweizähligen (Schrauben-) Achse von $\mathfrak{C}_2^2$, und jeder Punkt in der Mitte zwischen zwei solchen Achsen. Im ersten Fall nimmt die mit ihm aus $\mathfrak{C}_2^2$ abgeleitete Struktur die Symmetrie der Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}^2$ an, im zweiten die von $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Wir kommen also zu den gleichen Folgerungen, wie bei der Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$. Was endlich die Gruppe $\mathfrak{C}_2^3$ betrifft, so liegen die Dinge für sie genau so, wie bei der Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ selbst; was nun näherer Ausführung nicht bedarf.

Wir haben zweitens die Gruppen $\mathfrak{C}_{1h}$ zu prüfen. Wir fragen zunächst, welche Symmetrieelemente zu einer Gruppe $\mathfrak{C}_{1h}$

hinzutreten müssen, damit sich eine Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ einstellt. Das sind einerseits zweizählige Achsen und andererseits die zentrische Symmetrie. Ein Übergang einer mit $\mathfrak{C}_{1h}$ abgeleiteten Struktur zum Symmetriecharakter einer Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}$ kann daher nur eintreten, wenn der Baustein μ die Eigensymmetrie C_2 oder S_2 besitzt. Besitzt er die Symmetrie C_2 , naturgemäß für eine vertikale zweizählige Achse, so stellt wiederum *jeder* Punkt eine kritische Lage dar. Die Achsen der Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}$ unterliegen nämlich nur der Bedingung, auf den spiegelnden Ebenen senkrecht zu stehen; geht man also von den Ebenen aus, so ist eine erste Achse beliebig, und diese bestimmt mit dem Gitter alle andern. Man kann noch fragen, welchen einzelnen Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}$ die Strukturen entsprechen, die mit solchen Bausteinen aus den Gruppen $\mathfrak{C}_{1h}$ entstehen. Dazu muß man die Vorfrage erledigen, welche Gruppen $\mathfrak{C}_{1h}$ in den Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}$ als Untergruppen enthalten sind. Man erkennt leicht, daß es für $\mathfrak{C}_{2h}^1$ die Gruppe $\mathfrak{C}_{1h}^1$ ist; für $\mathfrak{C}_{2h}^3$ ist es $\mathfrak{C}_{1h}^3$, für $\mathfrak{C}_{2h}^4$ ist es $\mathfrak{C}_{1h}^2$ und für $\mathfrak{C}_{2h}^6$ ist es $\mathfrak{C}_{1h}^4$. Die Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}^2$ und $\mathfrak{C}_{2h}^5$ kommen nicht in Betracht, da sie zweizählige Drehungsachsen nicht enthalten. Wir schließen daher, daß die Bausteinsymmetrie C_2 von μ den Strukturen, die mit $\mathfrak{C}_{1h}^1, \mathfrak{C}_{1h}^2, \mathfrak{C}_{1h}^3, \mathfrak{C}_{1h}^4$ gebildet sind, die Symmetrie der Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}^1, \mathfrak{C}_{2h}^4, \mathfrak{C}_{2h}^3, \mathfrak{C}_{2h}^6$ aufprägt.

Ist endlich S_2 die Eigensymmetrie von μ , so kommen als kritische Lagen einerseits die Punkte der spiegelnden Ebenen selbst in Frage, andererseits die Punkte zwischen zwei benachbarten Ebenen. Insbesondere nimmt die aus $\mathfrak{C}_{1h}^1$ abgeleitete Struktur den Symmetriecharakter von $\mathfrak{C}_{2h}^1$ oder $\mathfrak{C}_{2h}^2$ an, je nachdem μ in eine spiegelnde Ebene fällt oder in die Mitte zwischen zwei benachbarte; im ersten Fall bedingt nämlich μ mit der Symmetrieebene eine Drehungsachse, im zweiten eine Schraubenachse. Analog erhalten die aus $\mathfrak{C}_{1h}^2$ abgeleiteten Strukturen den Symmetriecharakter von $\mathfrak{C}_{2h}^4$ und $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Für die Gruppe $\mathfrak{C}_{1h}^3$ erhält die zugehörige Struktur für beide Lagen den Symmetriecharakter der Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}^3$ und für $\mathfrak{C}_{1h}^4$ ist es analog die Gruppe $\mathfrak{C}_{2h}^6$; was darauf beruht, daß die Gruppen $\mathfrak{C}_{2h}^3$ und $\mathfrak{C}_{2h}^6$ sowohl Drehungsachsen wie auch Schraubenachsen enthalten.

Die vorstehende eingehende Betrachtung wird dazu dienen, die Betrachtungen bei den andern Gruppentypen wesentlich zu vereinfachen; die Verhältnisse werden um so durchsichtiger, je höher die Symmetrie der Struktur ist, von der man ausgeht.

Kap. XIV. Die Raumgruppen vom rhombischen Typus

§ 1. Vorbemerkungen. 1) Dem rhombischen System gehören die Punktgruppen

$$V^h, V, C_2^v$$

an. Die ihnen isomorphen Raumgruppen müssen sämtlich ein Gitter vom rhombischen Typus enthalten. Für V und V^h ist es evident; es gilt aber auch für die Gruppe C_2^v , da sie vertikale Symmetrieebenen besitzt und diese bei den monoklinen Gittern fehlen. Es gibt vier rhombische Gitter,

$$\Gamma_v, \Gamma_v', \Gamma_v'', \Gamma_v''';$$

jedes von ihnen macht eine besondere Behandlung nötig. Die Gitter Γ_v und Γ_v' stellen Sonderfälle des monoklinen Gitters Γ_m dar; die Gitter Γ_v'' und Γ_v''' Sonderfälle von Γ_m' . Die Eigenart von Γ_m' besteht darin, primitive Translationen zu besitzen, in die τ_z als vertikale Komponente eingeht, und dies gilt auch für Γ_v'' und Γ_v''' , aber nicht für Γ_v und Γ_v' .

2) Die Punktgruppen C_2^v und V sind durch die Erzeugungs-
gleichungen

$$C_2^v = \{C_2, \mathfrak{S}_v'\} \text{ und } V = \{C_2, \mathfrak{U}'\}$$

gekennzeichnet; gemäß Kap. XII, § 3 sind daher die ihnen isomorphen Raumgruppen durch Multiplikation einer Raumgruppe $\mathfrak{C}_2$ mit einer zu $\mathfrak{S}_v'$ oder $\mathfrak{U}'$ isomorphen Operation zu bilden. Gruppen $\mathfrak{C}_2$ haben wir in Kap. XIII drei verschiedene kennen gelernt, nämlich $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$ und $\mathfrak{C}_2^3$. Die beiden ersten enthalten das Gitter Γ_m , $\mathfrak{C}_2^3$ dagegen das Gitter Γ_m' . Nun haben wir soeben erwähnt, daß die Gitter Γ_v und Γ_v' Sonderfälle des Gitters Γ_m sind, und ebenso Γ_v'' und Γ_v''' Sonderfälle von Γ_m' ; daraus erhellt, daß Raumgruppen, die das Gitter Γ_v und Γ_v' enthalten, nur aus $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$ gebildet werden können, und solche, die Γ_v'' oder Γ_v''' enthalten, nur aus $\mathfrak{C}_2^3$.

3) Wir werden eine besonders große Zahl von Gruppen des rhombischen Systems kennen lernen. Es gibt nicht weniger als 22 von der Symmetrie C_2^v und 28 von der Symmetrie V . Es mag deshalb schon an dieser Stelle auf die allgemeinen Gründe für die große Zahl hingewiesen werden. Sie sind von zweierlei Art. Erstens gibt es im rhombischen System vier verschiedene Gitterarten und zweitens kann bei den Gruppen der Symmetrie C_2^v und V^h die erzeugende Operation $\mathfrak{S}(t)$ auf das mannigfachste gewählt werden.

4) Den Achsenfiguren legen wir, wie immer, den Oktanten p der Stammfigur zugrunde (Kap. IX, § 11). Wir werden vielmals die dem Beschauer zunächst liegende Fläche nicht andeuten, so daß man in einen offenen Kasten hineinzusehen meint. Ferner werden wir uns, wo es geht, eine Reduktion ihrer Zahl gestatten. Eine Reihe von Gruppenpaaren, die wir finden werden, stehen in der einfachen Beziehung zueinander, daß die Operationen $\mathfrak{S}_v(t)$ der einen Gruppe aus denen der andern durch Hinzufügung (oder Tilgung) der Translation τ_z in *allen* Ebenen σ_v hervorgehen. Für zwei Gruppen eines solchen Paares erscheint eine *einzige Figur ausreichend*.

5) Über die Erzeugung der Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}$ schicken wir einige allgemeine Regeln voraus; sie gelten übrigens für alle Gruppen $\mathfrak{G}_n$ und sollen die Auffindung der erzeugenden Operationen $\mathfrak{S}_v(t)$ erleichtern. Bei jeder Gruppe $\mathfrak{G}_n$ bilden ihre Achsen in der horizontalen Ebene γ das in Kap. IX dargestellte Fußpunktenetz. Jedes Netz, das hier in Frage kommt, besitzt zweizählige, in seiner Ebene liegende Achsen s ; es können Drehungsachsen und Schraubenachsen sein. An sie knüpfen wir an, um auf die Operationen $\mathfrak{S}_v(t)$ zu schließen, die die Achsenschaaren der Gruppen $\mathfrak{G}_n$ in sich überführen. Freilich kommen diese Achsenschaaren *zunächst nur in geometrischer Hinsicht* (als gerade Linien) in Betracht; ob die Achsen auch in der Weise in sich übergehen, wie es ihre achsiale Eigenart bedingt, wird in jedem einzelnen Fall noch zu prüfen sein.

Ist σ_v die durch die Achse s gehende auf der Netzebene γ senkrechte Ebene, so gelten die folgenden evidenten Regeln:

a) Jede Ebene σ_v durch eine Symmetrieachse s des Netzes ist eine Symmetrieebene der Achsenschaar und umgekehrt.

b) Gestattet das Netz die Umschraubung $\mathfrak{U}(\tau)$ um s , so gestattet die Achsenschaar die Deckoperation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ und umgekehrt.

c) Gestattet die Achsenschaar die Spiegelung $\mathfrak{S}_v$ oder die Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$, so gestattet sie auch die Gleitspiegelungen $\mathfrak{S}_v(\tau_z)$ oder $\mathfrak{S}_v(\tau + \frac{1}{2}\tau_z)$, $\mathfrak{S}_v(\tau + \tau_z)$; die Zusatztranslation $\frac{1}{2}\tau_z$ oder τ_z läßt nämlich jede Achse in sich gleiten¹⁾.

d) Gestattet die Achsenschaar die Spiegelung $\mathfrak{S}_v$ oder die Operation $\mathfrak{S}_v(\tau_z)$, so gestattet sie auch die Umwendung $\mathfrak{U}$ um s ; gestattet sie die Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ oder $\mathfrak{S}_v(\tau + \frac{1}{2}\tau_z)$ oder $\mathfrak{S}_v(\tau + \tau_z)$, so gestattet sie auch die Umschraubung $\mathfrak{U}(\tau)$.

Mittels dieser Sätze werden wir von den Deckoperationen des Fußpunktenetzes auf die erzeugenden Operationen der Gruppen $\mathfrak{G}_{nv}$ schließen. Eine notwendige Eigenschaft, die diese Operationen haben müssen, sei schon hier erwähnt. Eine solche Operation muß jedenfalls auch eine Deckoperation des Gitters Γ_τ sein, und daraus folgt (Kap. XII, § 2), daß die in $\mathfrak{S}_v(\tau)$, $\mathfrak{S}_v(\tau + \frac{1}{2}\tau_z)$ und $\mathfrak{S}_v(\tau + \tau_z)$ auftretenden Translationen τ , $\tau + \frac{1}{2}\tau_z$ und $\tau + \tau_z$ notwendig halbe Translationen des Gitters Γ_τ sein müssen, damit $\mathfrak{S}_v(\tau)$, $\mathfrak{S}_v(\tau + \frac{1}{2}\tau_z)$ und $\mathfrak{S}_v(\tau + \tau_z)$ zur Erzeugung von Gruppen $\mathfrak{G}_{nv}$ verwendbar sind. Dies stellt einen wichtigen Hilfssatz dar, dem wir in folgender Form Ausdruck geben:

1. Eine Operation $\mathfrak{U}(\tau)$, die Deckoperation des Fußpunktenetzes einer Gruppe $\mathfrak{G}_n$ ist, kann nur dann eine erzeugende Operation einer Gruppe $\mathfrak{G}_{nv}$ liefern, wenn τ oder $\tau + \frac{1}{2}\tau_z$ oder $\tau + \tau_z$ eine halbe Translation des in $\mathfrak{G}_n$ auftretenden Gitters Γ_τ ist.

§ 2. **Hilfssätze und Hilfsformeln.** Die Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}$, wie überhaupt die Gruppen $\mathfrak{G}_{nv}$ sind von besonderer methodischer Wichtigkeit. Wir werden deshalb ihre Deckoperationen und deren Zusammenhang eingehend erörtern und in den Achsen-

¹⁾ Wir beschränken uns auf $\frac{1}{2}\tau_z$ und τ_z , weil andere Multipla von τ_z nicht in Frage kommen.

figuren zur Darstellung bringen. Wir beginnen mit einigen *Hilfssätzen* über die spiegelnden Ebenen. Die allgemeinen Regeln über ihre Art und Anordnung hängen nur vom Gitter ab und richten sich nach den dafür grundlegenden Sätzen 3 und 4 von Kap. XIII, mit der Maßgabe, daß an die Stelle der horizontalen Grundfläche γ eine vertikale Ebene σ_v tritt; insbesondere also eine der beiden Ebenen α und β . Wir werden unsere Schlüsse im folgenden an die Ebene β anknüpfen, also die Schaar $\{\beta\}$ in Betracht ziehen.

Sei das Gitter zunächst Γ_v . Das Gitter Γ_v hat (Fig. 77, S. 180) für die Ebene β als Grundfläche den Charakter des Gitters Γ_m , mit den Translationen

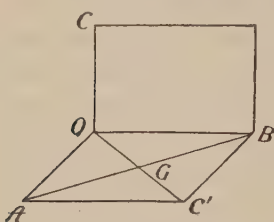


Fig. 114

$$2\tau_1 = 2\tau_y, \quad 2\tau_2 = 2\tau_z, \quad 2\tau_3 = 2\tau_x.$$

Nach dem eben genannten Satz 3 folgen daher die spiegelnden Ebenen der Schaar $\{\beta\}$ im Abstand τ_x aufeinander und sind alle von gleicher Art. In der erzeugenden Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ kann τ einen der vier Werte

$$1) \quad \tau = 0, \quad \tau = \tau_z, \quad \tau = \tau_y, \\ \tau = \tau_y + \tau_z$$

haben. Analoges gilt für die Schaar $\{\alpha\}$. Ihre Ebenen folgen im Abstand τ_y aufeinander, und für τ ergeben sich als mögliche Werte

$$1a) \quad \tau = 0, \quad \tau = \tau_z, \quad \tau = \tau_x, \quad \tau = \tau_x + \tau_z.$$

Das Gitter Γ_v' hat für die Ebene β als Grundfläche (Fig. 114) den Charakter des monoklinen Gitters Γ_m' und zwar in *zweiter* Auffassung, mit der Ebene γ als zentrierter Seitenfläche. Der Punkt G ist der Zentrierungspunkt; er entspricht dem Punkt H von Fig. 53 (S. 141), und $OG = 2\tau'$ ist die zugehörige Translation. Das Gitter Γ_m , aus dem Γ_v' durch Zentrierung entstanden ist, hat daher die Translationen

$OB = 2\tau_1 = 2\tau_y, \quad OC = 2\tau_2 = 2\tau_z, \quad OA = 2\tau_3 = 2\tau_x,$
die Translationen von Γ_v' schreiben sich also mit Rücksicht auf diese Entstehung in der Form

$$2\tau_1 = 2\tau_y, \quad 2\tau_2 = 2\tau_z, \quad 2\tau_3' = \tau_1 + \tau_3 = \tau_x + \tau_y = 2\tau'.$$

Nach dem oben genannten Satz 4 folgern wir hieraus, daß die spiegelnden Ebenen der Schaar $\{\beta\}$ im Abstand $1/2\tau_x$ aufeinander folgen, und daß ihre Gleitungskomponenten abwechselnd entweder die Werte

$$2) \quad 0, \tau_1 = \tau_y \text{ oder } \tau_2 = \tau_z, \tau_2 + \tau_1 = \tau_y + \tau_z$$

besitzen. Analog ist es für die Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$. Ihre Gleitungskomponenten sind abwechselnd

$$2a) \quad 0, \tau_1 = \tau_x \text{ oder } \tau_2 = \tau_z, \tau_2 + \tau_1 = \tau_x + \tau_z;$$

sie folgen im Abstand $1/2\tau_y$ aufeinander.

Die Gitter Γ_v'' und Γ_v''' erscheinen für die Ebene β als Grundfläche beide als Gitter Γ_m' in *erster* Auffassung. Dies ergibt sich folgendermaßen. Dem Gitter Γ_v'' kommen in der Ebene β (Fig. 115) die primitiven Translationen

$$OK = 2\tau_k = \tau_y + \tau_z \text{ und } KB = 2\tau_k' \\ = \tau_y - \tau_z$$

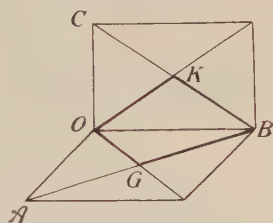


Fig. 115

zu; seine Stammfigur π_0 in der Ebene β ist also der durch das Dreieck OKB

bestimmte Rhombus. Für das Gitter Γ_m , aus dem es durch Zentrierung entsteht, ergeben sich also die Translationen

$$OK = 2\tau_1 = 2\tau_k, \quad KB = 2\tau_2 = 2\tau_k', \quad OA = 2\tau_3 = 2\tau_x$$

als primitives Tripel. Aus diesem Gitter Γ_m entsteht Γ_v'' in der Weise, daß die Ebene γ durch den Punkt G zentriert wird; er entspricht also dem bei der Körperzentrierung auftretenden Punkt M (Fig. 54, S. 114). Wir erhalten so als Tripel für Γ_v''

$$2\tau_1 = 2\tau_k, \quad 2\tau_2 = 2\tau_k', \quad 2\tau_3' = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \\ \tau_k + \tau_k' + \tau_x = 2\tau_g,$$

wie es sein muß. Die Gleitungskomponenten der Ebenenschar $\{\beta\}$ haben daher nach Satz 4 abwechselnd die Werte

$$3) \quad 0, \tau_k + \tau_k' = \tau_y \text{ oder } \tau_k, \tau_k';$$

sie folgen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_x$ aufeinander. Analog folgen die Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$ im Abstand $\frac{1}{2}\tau_y$ und ihre Gleitungskomponenten haben abwechselnd die Werte

$$3a) \quad 0, \tau_h + \tau_h' = \tau_x \text{ oder } \tau_h, \tau_h'.$$

Wählen wir beim Gitter Γ_v''' die Ebene β als Grundfläche (Fig. 69, S. 166), so geht es aus dem Gitter Γ_v in gleicher Weise durch Körperzentrierung hervor, als wenn wir γ als Grundfläche wählen. Als Translationen des Gitters $\Gamma_m (= \Gamma_v)$ ergeben sich also jetzt die Werte

$$2\tau_1 = 2\tau_y, \quad 2\tau_2 = 2\tau_z, \quad 2\tau_3 = 2\tau_x,$$

und zu ihnen tritt für $\Gamma_m' (= \Gamma_v''')$ noch die Translation

$$2\tau_3' = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau_x + \tau_y + \tau_z.$$

Nach Satz 4 treten also als Gleitungskomponenten der spiegelnden Ebenen der Schaar $\{\beta\}$ abwechselnd die Werte

$$4) \quad 0, \tau_1 + \tau_2 = \tau_y + \tau_z \text{ oder } \tau_1 = \tau_y, \tau_2 = \tau_z$$

auf; die Ebenen haben den Abstand $\frac{1}{2}\tau_x$. Analog haben die Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$ den Abstand $\frac{1}{2}\tau_y$ mit den abwechselnden Gleitungskomponenten

$$4a) \quad 0, \tau_x + \tau_z \text{ oder } \tau_x, \tau_z.$$

Die Deckoperationen einer Gruppe bedingen einander gegenseitig. Die folgenden *Hilfsformeln* sollen lehren, in welcher Weise dies für die einzelnen Operationen der Fall ist. Sie werden insbesondere auch der Herstellung der Achsenfiguren dienen. Wir knüpfen an die Gleichung 12) von Kap. II an, also an

$$\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{A}(2\omega); \quad \mathfrak{X}(\sigma\sigma_1) = \omega,$$

wo a die Schnittpunktlinie der spiegelnden Ebenen σ und σ_1 ist. Diese Gleichung und die aus ihr folgenden Gleichungen 12a) und 12b) sollen hier so angewendet werden, daß $\omega = \pi/2$ ist, und die Gitterebenen α und β die Ebenen σ und σ_1 sind; $\mathfrak{S}_\alpha$ und $\mathfrak{S}_\beta$ seien die Spiegelungen an ihnen. Die Gleichungen 12a) und 12b) gehen dann in

$$a) \quad \mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{A}(\pi) = \mathfrak{S}_\beta, \quad a') \quad \mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}_\beta$$

über. Durch rechtsseitige und linksseitige Multiplikation von a) mit τ_z folgt zunächst

$$b) \quad \mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{A}(\pi, \tau_z) = \mathfrak{S}_\beta(\tau_z); \quad c) \quad \mathfrak{S}_\alpha(\tau_z) \mathfrak{A}(\pi) = \mathfrak{S}_\beta(\tau_z).$$

Seien ferner $\mathfrak{S}_\lambda$, $\mathfrak{S}_\mu$ die Spiegelungen an den zu α und β parallelen Mittelebenen λ und μ (S. 175) des Stammfiguroktanten, so haben wir nach Kap. II, Gl. 11a)

$$d) \quad \mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{I}_y = \mathfrak{S}_\lambda \text{ und } \mathfrak{S}_\beta \mathfrak{I}_x = \mathfrak{S}_\mu.$$

Daher folgt, wenn wir a') mit $\tau_x (= \mathfrak{I}_x)$ rechtsseitig multiplizieren,

$$e) \quad \mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x) = \mathfrak{S}_\beta \mathfrak{I}_x = \mathfrak{S}_\mu,$$

und hieraus ergibt sich durch Multiplikation mit τ_z

$$f) \quad \mathfrak{A}(\pi, \tau_z) \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x) = \mathfrak{S}_\mu(\tau_z) \text{ und}$$

$$g) \quad \mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z) = \mathfrak{S}_\mu(\tau_z).$$

Wird Gleichung f) rechtsseitig mit τ_z multipliziert, so folgt weiter

$$h) \quad \mathfrak{A}(\pi, \tau_z) \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z) = \mathfrak{S}_\mu \cdot \{2\tau_z\}^1).$$

Ein letztes Formelsystem ergibt sich schließlich durch Multiplikation von a') mit $\mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_y$. Wir finden zunächst

$$\mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{I}_y \mathfrak{I}_x = \mathfrak{S}_\beta \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_y$$

und hieraus gemäß d)

$$\mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_\lambda \mathfrak{I}_x = \mathfrak{S}_\mu \mathfrak{I}_y$$

oder in anderer Schreibweise

$$i) \quad \mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x) = \mathfrak{S}_\mu(\tau_y).$$

Hieraus folgt endlich durch Multiplikation mit τ_z

$$k) \quad \mathfrak{A}(\pi, \tau_z) \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x) = \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z) \text{ und}$$

$$l) \quad \mathfrak{A}(\pi) \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z) = \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z).$$

In jeder dieser Gleichungen steht links das Produkt aus $\mathfrak{A}(\pi)$ oder $\mathfrak{A}(\pi, \tau_z)$ und einer Operation, deren Träger die Ebene α oder die Ebene λ ist. Diese Operationen werden wir benutzen, um mit ihnen aus den Gruppen $\mathfrak{G}_2$ je eine Gruppe $\mathfrak{G}_2$,

¹⁾ Vgl. S. 275 unten.

des rhombischen Systems zu bilden. Die rechts stehende Operation ist dann diejenige, die sich für eine Ebene β oder μ für die entstehende Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}$ von selbst einstellt.

Mit den vorstehenden Formeln wird auch die Frage nach der möglichen Identität verschiedenartig erzeugter Gruppen vielfach entschieden werden. Auf einen allgemeinen Gesichtspunkt, der für diese Frage von Wichtigkeit ist, sei noch ausdrücklich hingewiesen. Die Achsenschaaren einer jeden Gruppe $\mathfrak{C}_2$ zeigen für die Ebenenschaaren $\{\alpha\}$ und $\{\beta\}$ die gleiche geometrische Anordnung; daher sind zwei Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ immer dann als identisch anzusehen, wenn sich *die eine für die Ebenen $\{\alpha\}$ ebenso verhält, wie die andere für die Ebenen $\{\beta\}$* . Diese Erwägung überträgt sich allgemeiner auf alle Fälle, in denen die erzeugenden Ebenen *die gleiche geometrische Lage zur Achsengesamtheit einer Gruppe $\mathfrak{C}_2$ besitzen*; sind solche Ebenen Träger von *analogen* Operationen, so führen diese Operationen ebenfalls zu Gruppen, die *als identisch zu betrachten sind*.

§ 3. Die Gruppen der Symmetrie C_{2v} mit dem Gitter Γ_v . Die Gruppe C_{2v} ist durch das Bildungsgesetz

$$5) \quad C_{2v} = \{C_2, \mathfrak{S}_v'\}$$

definiert; ihre Operationen sind

$$1, \mathfrak{U}'(\pi), \mathfrak{S}_v', \mathfrak{U}'\mathfrak{S}_v' (= \mathfrak{S}_v''),$$

wo $\mathfrak{S}_v''$ eine Spiegelung an der zu σ_v' senkrechten Ebene σ_v'' darstellt. Es vereinfacht die Beziehungen zu den isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{C}_{2v}$, wenn wir die beiden Ebenen σ_v' und σ_v'' mit den Ebenen α und β des Gitters zusammenfallen lassen; dann können wir die vier obigen Operationen in die Form

$$1, \mathfrak{U}'(\pi), \mathfrak{S}_\alpha', \mathfrak{U}'\mathfrak{S}_\alpha' (= \mathfrak{S}_\beta')$$

setzen, und zwar spielt $\mathfrak{S}_\alpha'$ die Rolle der *erzeugenden* Operation. Als erzeugende Operation der Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ haben wir daher eine Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ zu verwenden, für die α oder eine zu α parallele Ebene die spiegelnde Ebene ist.

Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$, die das Gitter Γ_v enthalten, entstehen nach § 1, 2 nur aus $\mathfrak{C}_{2v}^1$ und $\mathfrak{C}_{2v}^2$. Für die Auffindung der erzeugenden Operationen knüpfen wir an die Sätze von § 1, 5 an. Das

Fußpunktenetz des Gitters τ ist rechtwinklig. Ein rechtwinkliges Netz besitzt nur in seinen Seiten- und Mittellinien zweizählige Achsen; gemäß § 1, 5 kann daher sowohl α wie die Mittelebene λ die Ebene der erzeugenden Operation sein. Für die Translation τ sind die in § 2, Gleichung 1 a) genannten Werte, also

$$6) \quad \tau = 0, \tau = \tau_x, \tau = \tau_y, \tau = \tau_x + \tau_y$$

die zulässigen Werte. Wie dort gezeigt ist, folgen die zu α parallelen spiegelnden Ebenen im Abstand τ_y aufeinander und sind alle von gleicher Art.

Wir wählen zunächst $\mathfrak{S}_\alpha(\tau)$ als erzeugende Operation und erkennen aus den Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{G}_2^1$ und $\mathfrak{G}_2^2$ (Fig. 73¹⁾, S. 177), daß jeder der obigen vier Werte von τ eine zulässige Deckoperation abgibt. Jede dieser Operationen bedingt nach den Formeln von § 2 auch eine Operation $\mathfrak{S}_\beta$ an der Ebene β . Im einzelnen folgt: Ist $\mathfrak{S}_\alpha$ oder $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ die erzeugende Operation, so treten für $\mathfrak{G}_2^1$ die Formeln a) und c) in Kraft; für die Gruppe $\mathfrak{G}_2^2$ ist es die Formel b). Wie diese Formel zeigt, enthält die mit $\mathfrak{S}_\alpha$ abgeleitete Gruppe auch schon die Operation $\mathfrak{S}_\beta(\tau_x)$; gemäß dem Schluß von § 2 sind daher die Gruppen, die sich aus $\mathfrak{G}_2^2$ mittels $\mathfrak{S}_\alpha$ und $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ ergeben, identisch. Wir gelangen so zu den drei Gruppen

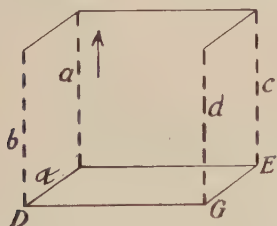


Fig. 116

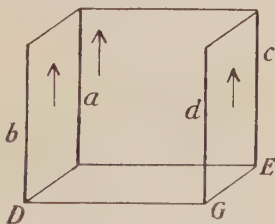


Fig. 117

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{2v}^1 &= \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\alpha; \Gamma_v \} = \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\beta \} \\ \mathfrak{G}_{2v}^2 &= \{ \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\alpha; \Gamma_v \} = \{ \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\beta(\tau_x) \} \\ \mathfrak{G}_{2v}^3 &= \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x); \Gamma_v \} = \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\beta(\tau_x) \}. \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. auch S. 279 unten.

Bei der Gruppe $\mathfrak{G}_{2v}^1$ sind α und β reine Symmetrieebenen, bei $\mathfrak{G}_{2v}^2$ ist es nur α , während β eine Ebene mit Gleitspiegelung ist; bei $\mathfrak{G}_{2v}^3$ sind es beide Ebenen (Fig. 116, 117)¹⁾.

Wir gehen zum Wert $\tau = \tau_x$ über, benutzen also $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ als erzeugende Operation. Gemäß den Formeln e) und f) bedingt sie für die Gruppe $\mathfrak{G}_2^1$ noch die Spiegelung $\mathfrak{S}_\mu$ und für die Gruppe $\mathfrak{G}_2^2$ die Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_\mu(\tau_x)$. Wir erhalten daher aus $\mathfrak{G}_2^1$ und $\mathfrak{G}_2^2$ je eine neue Gruppe, nämlich (Fig. 118, 119)

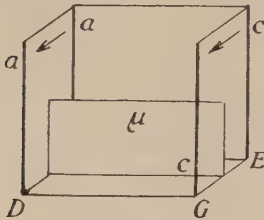


Fig. 118

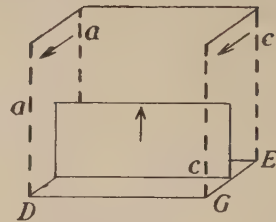


Fig. 119

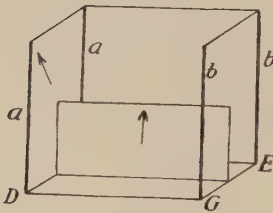


Fig. 120

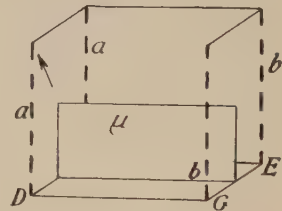


Fig. 121

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{2v}^4 &= \{\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x); I_v\} = \{\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\mu\} \text{ und} \\ \mathfrak{G}_{2v}^5 &= \{\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x); I_v\} = \{\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\mu(\tau_x)\}.\end{aligned}$$

Endlich haben wir $\tau = \tau_x + \tau_z$ zu setzen; die erzeugende Operation ist also $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z)$. Jetzt haben wir die Gleichungen g) und h) zu benutzen. Sie zeigen, daß der aus $\mathfrak{G}_2^1$ erzeugten Gruppe auch die Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_\mu(\tau_x)$ angehört; ferner ist in der aus $\mathfrak{G}_2^2$ erzeugten Gruppe diesmal eine reine Spiegelung $\mathfrak{S}_\mu$ enthalten, es ist die reduzierte Operation, die der rechten Seite von

¹⁾ Fig. 117 entspricht der Gruppe $\mathfrak{G}_{2v}^3$; durch Tilgung der Pfeile ergibt sich die Figur für $\mathfrak{G}_{2v}^1$.

h) entspricht. So finden wir die beiden Gruppen (Fig. 120 und 121)

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{2v}^6 &= \{\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z); \Gamma_v\} = \{\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\mu(\tau_z)\} \text{ und} \\ \mathfrak{G}_{2v}^7 &= \{\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z); \Gamma_v\} = \{\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\mu\}.\end{aligned}$$

Damit sind alle Gruppen abgeleitet, bei denen die erzeugende Operation in eine Seitenfläche fällt.

Wir haben nunmehr die Mittelebene λ als Ebene der erzeugenden Operation zu verwenden. Zunächst ist zu bemerken, daß in $\mathfrak{G}_{2v}^4$ bis $\mathfrak{G}_{2v}^7$ solche Gruppen sachlich schon vorhanden sind und zwar entstehen $\mathfrak{G}_{2v}^4$ und $\mathfrak{G}_{2v}^7$ mittels der Spiegelung $\mathfrak{S}_\mu$ und $\mathfrak{G}_{2v}^5$ und $\mathfrak{G}_{2v}^6$ mittels der Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_\mu(\tau_x)$. Da aber

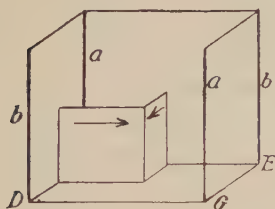


Fig. 122

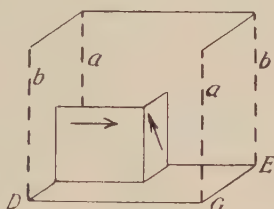


Fig. 123

die Achsen nach den Richtungen τ_x und τ_y geometrisch gleichartig angeordnet sind, so sind damit schon $\mathfrak{S}_\lambda$ und $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x)$ als erzeugende Operationen erledigt. Es kommen daher nur noch die Operationen $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x)$ und $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z)$ in Betracht. Wir erfahren wieder aus den Gleichungen i), k), l), welche weiteren Operationen durch sie bedingt sind; und zwar beziehen sich i) und l) auf die Gruppe $\mathfrak{G}_2^1$ und k) auf die Gruppe $\mathfrak{G}_2^2$. Wir erhalten zunächst mittels $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x)$ die zwei neuen Gruppen (Fig. 122 und 123)

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{2v}^8 &= \{\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x); \Gamma_v\} = \{\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\mu(\tau_y)\} \\ \mathfrak{G}_{2v}^9 &= \{\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x); \Gamma_v\} = \{\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)\}.\end{aligned}$$

Dagegen liefert die Operation $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z)$ eine neue Gruppe nur aus $\mathfrak{G}_2^1$. Die Gleichung k) zeigt nämlich, daß die mit $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x)$ gebildete Gruppe $\mathfrak{G}_{2v}^9$ auch die Operation $\mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)$ ent-

hält; diese ist aber im Sinn von § 2 mit $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z)$ gleichwertig. Die einzige neue Gruppe ist also (Fig. 124)

$$\mathfrak{C}_{2v}^{10} = \{\mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z); \Gamma_v\} = \{\mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)\}.$$

Wir kommen so zu dem Resultat:

2. Es gibt 10 Gruppen der Symmetrie C_2^v mit dem Gitter Γ_v .

§ 4. Die Gruppen der Symmetrie C_2^v mit dem Gitter Γ_v' . Das Gitter Γ_v' ist ein einfach flächenzentriertes Gitter. Wir dürfen aber nicht schließen, daß die zentrierte Fläche notwendig die Grundfläche γ der Stammfigur ist. Bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ sind nicht alle drei zueinander senkrechten Seitenflächen

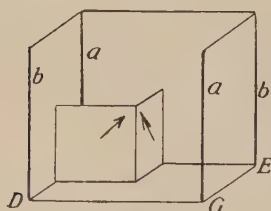


Fig. 124

der Stammfigur Π_0 gleichberechtigt. Die beiden Seitenflächen α und β sind es; ihnen steht aber die auf den Achsen senkrechte Grundebene γ eigenwertig gegenüber. Wir haben daher zwei Fälle von Flächenzentrierung zu unterscheiden; es kann sowohl das Netz der Grundebene, wie das einer Seitenebene zentriert sein.

Sei zunächst das Netz der Ebene γ zentriert. Das Gitter Γ_v' hat alsdann das primitive Tripel

$$2\tau' = \tau_x + \tau_y, \quad 2\tau'' = \tau_x - \tau_y, \quad 2\tau_z = 2\tau_s$$

und stellt daher (mit γ als Grundfläche) einen Sonderfall des monoklinen Gitters Γ_m dar. Die hierhergehörigen Raumgruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ können mithin nur aus den beiden Gruppen $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$ entstehen. Im Anschluß an § 1, 5 bestimmen wir zunächst wieder die möglichen erzeugenden Operationen.

Das Fußpunktenetz des Gitters Γ_v' wird durch Fig. 78 und 79 (S. 180) dargestellt; es ist ein rhombisches Netz, dessen halbe Stammfigur das Dreieck OG_mD bildet. Ein rhombisches Netz gestattet (S. 154) seine Diagonalen als zweizählige Achsen, d. h. also die Seiten und Mittellinien des Rechtecks $ODEG$ von Fig. 79; es gestattet außerdem Umschraubungen um die zwischen ihnen verlaufenden Mittellinien. Diese Umschraubungen liefern aber nach Satz 1 von § 1 keine Deckoperationen des

Gitters. Die halbe Translation τ der Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ kann nämlich beim Gitter Γ_v' nur die vier in 2a) enthaltenen Werte

$$7) \quad 0, \tau_x, \tau_z, \tau_x + \tau_z$$

haben, während den Umschraubungen der Wert $\tau = \frac{1}{2} \tau_x$ zugehört, und den ihnen gemäß § 1, 5 entsprechenden Operationen $\mathfrak{S}_v(\tau)$ daher die Werte $\tau = \frac{1}{2} \tau_x + \frac{1}{2} \tau_z$ oder $\tau = \frac{1}{2} \tau_x + \tau_z$ zukommen würden; diese sind aber keine halben Translationen des Gitters. Nach Satz 1 kommen also nur α und λ als Ebenen erzeugender Operationen in Frage. Weiter sahen wir in § 2, daß beim Gitter Γ_v' die spiegelnden Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$ im Abstand $\frac{1}{2} \tau_y$ aufeinander folgen, und wir schließen daraus,

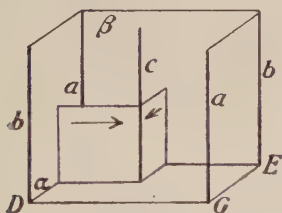


Fig. 125

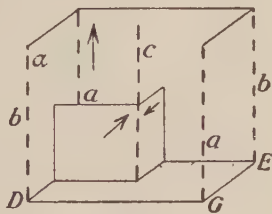


Fig. 126

daß bei jeder der hier betrachteten Gruppen sowohl α wie λ eine spiegelnde Ebene ist. Es genügt mithin, $\mathfrak{S}_\alpha(\tau)$ als erzeugende Operation zu verwenden, mit den oben genannten vier Werten von τ .

Sei zunächst $\mathfrak{S}_\alpha$ die erzeugende Operation. Mit ihr erhalten wir aus $\mathfrak{G}_2^1$ und $\mathfrak{G}_2^2$, ebenso wie in § 3, gemäß den Gleichungen a) und b) die beiden Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{2v}^{11} &= \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\alpha; \Gamma_v' \} = \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\beta \} \text{ und} \\ \mathfrak{G}_{2v}^{12} &= \{ \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\alpha; \Gamma_v' \} = \{ \mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{S}_\beta(\tau_z) \}. \end{aligned}$$

Eine neue Gruppe entsteht mittels $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_z)$ wiederum nur aus $\mathfrak{G}_2^1$, nicht aus $\mathfrak{G}_2^2$, und zwar aus dem gleichen Grund, wie in § 3. Diese Gruppe ist

$$\mathfrak{G}_{2v}^{13} = \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_z); \Gamma_v' \} = \{ \mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{S}_\beta(\tau_z) \}.$$

Die Achsenfiguren der drei Gruppen sind die Figuren 125, 126, 127; die oben erwähnte Eigenschaft, daß sowohl α wie λ ,

also auch β und μ Ebenen von Deckoperationen sind, ist in ihnen kenntlich gemacht. Insbesondere enthalten die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{12}$ auch die Operation $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x)$, ebenso enthält die mit $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$ auch die Operation $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z)$. Wir folgern daraus noch, daß die Operationen $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ und $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z)$ hier nicht zu neuen Gruppen führen. Die Ebenen α und λ haben nämlich *gleiche Lage* zum Fußpunktenetz des Gitters Γ_v' ; gemäß § 2 müssen daher die mit $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ und $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z)$ erzeugbaren Gruppen mit den vorstehenden identisch sein.

Wir gehen zu dem Fall über, daß eine *Seitenfläche* von Π_0 zentriert ist. Wir können eine von ihnen beliebig auswählen; es sei die Ebene β , also K der Zentrierungspunkt (Fig. 115, S. 297).

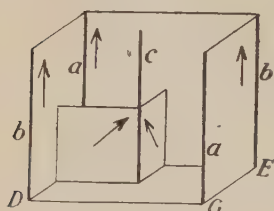


Fig. 127

Das so bestimmte Gitter Γ_v' hat für die Ebene γ als Grundfläche den Charakter des monoklinen Gitters Γ_m' (in zweiter Auffassung); es lassen sich also Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ nur aus $\mathfrak{C}_2^3$ ableiten. Es treten also auch Schraubenachsen auf, und zwar entspricht der Schrauben-

achse d von Fig. 74 (S. 177), die durch D_m geht, hier eine in β liegende Schraubenachse durch die Mitte von OE .

Die spiegelnden Ebenen haben wir in diesem Fall noch besonders zu erörtern; zunächst für α als Grundfläche. Für sie hat das Gitter jetzt den Charakter des Gitters Γ_m' in zweiter Auffassung, mit β als zentrierter Seitenfläche (Fig. 115). Seine Translationen haben also die Werte

$$OC = 2\tau_1 = 2\tau_x, \quad OA = 2\tau_2 = 2\tau_x, \quad OK = 2\tau_3' = \tau_y + \tau_z;$$

nach Satz 4 von Kap. XII¹ folgen also die Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$ in Abstand $1/2 \tau_y$ aufeinander, mit den abwechselnden Gleitungskomponenten

$$8) \quad 0, \tau_x \text{ oder } \tau_x, \tau_x + \tau_z.$$

Dagegen hat das Gitter für die Ebene β als Grundfläche den Charakter des Gitters Γ_m mit den Translationen

$$OB = 2\tau_1 = 2\tau_y, \quad OK = 2\tau_2 = 2\tau_k, \quad OA = 2\tau_3 = 2\tau_x;$$

die Ebenen der Schaar $\{\beta\}$ folgen daher im Abstand τ_x aufeinander und sind sämtlich gleichartig.

Wie oben erwähnt wurde, lassen sich Gruppen dieser Art nur aus der Gruppe $\mathfrak{G}_2^3$ ableiten. Ihr Fußpunktenetz (Fig. 74) enthält dieselben Drehungsachsen, wie das Fußpunktenetz (Fig. 73) des Gitters Γ_v . Erzeugende Operationen müssen aber Drehungsachsen in Drehungsachsen überführen; daher kommen hier die gleichen Ebenen für die erzeugenden Operationen in Betracht, wie beim Gitter Γ_v , also α und λ . Wir haben aber soeben gesehen, daß die spiegelnden Ebenen den Abstand $1/2 \tau_y$ haben, also kommen wiederum in jeder Gruppe die Ebenen α und λ

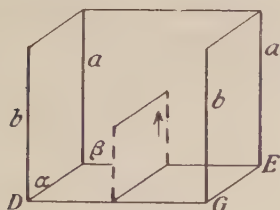


Fig. 128

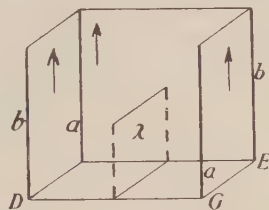


Fig. 129

zugleich vor. Es ist also nur $\mathfrak{S}_\alpha(\tau)$ als erzeugende Operation zu verwenden, wo τ einen der vier Werte

$$0, \tau_z, \tau_x, \tau_x + \tau_z$$

hat. Jeder von ihnen wird uns diesmal zu einer neuen Gruppe führen.

Sei zunächst $\mathfrak{S}_\alpha$ die erzeugende Operation; wir haben dann Gleichung a) von § 2 in Betracht zu ziehen. Sie besagt, daß auch die Spiegelung $\mathfrak{S}_\beta$ in der Gruppe vorhanden ist, und wir erhalten so die Gruppe

$$\mathfrak{G}_{2v}^{14} = \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha; \Gamma_v'\} = \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\beta\}.$$

Den zu α parallelen Ebenen kommen, wie wir eben sahen, abwechselnd die Translationen 0 und τ_z zu, während alle zu β parallelen Ebenen reine Symmetrieebenen sind (Fig. 128).

Wählen wir zweitens $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_z)$ als erzeugende Operation, so gehört gemäß Gleichung c) von § 2 der Gruppe auch $\mathfrak{S}_\beta(\tau_z)$ als

Operation an; alle Ebenen der Schaar $\{\beta\}$ sind von dieser Art, während den Ebenen $\{\alpha\}$ die Translationen τ_x und 0 entsprechen. Der Gruppe gehört daher auch die Ebene λ als reine Symmetrieebene an (Fig. 129). Wir können daher die Gruppe durch

$$\mathfrak{C}_{2v}^{15} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x); \Gamma_v'\} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\lambda\} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\beta(\tau_x)\}$$

bezeichnen.

Wir wählen drittens $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ als erzeugende Operation. Es kommt jetzt Gleichung e) von § 2 in Betracht; sie zeigt, daß

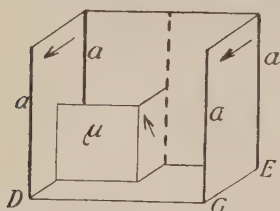


Fig. 130

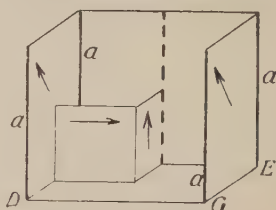


Fig. 131¹)

der Gruppe auch die Operation $\mathfrak{S}_\mu$ an der Mittelebene μ zukommt. Wir erhalten die Gruppe

$$\mathfrak{C}_{2v}^{16} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x); \Gamma_v'\} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\mu\}.$$

Die Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$ weisen abwechselnd die Translationen τ_x und $\tau_x + \tau_z$ auf; die Ebenen der Schaar $\{\beta\}$ sind sämtlich reine Symmetrieebenen (Fig. 130).

Endlich führt die Operation $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z)$ zu der Gruppe

$$\mathfrak{C}_{2v}^{17} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z); \Gamma_v'\} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\lambda(\tau_z)\}.$$

Sie ergibt sich aus der vorigen formal so, daß man allen auftretenden Translationen die Komponente τ_z hinzufügt. Die Anordnung der Symmetrieebenen zeigt Fig. 131¹). Reine Symmetrieebenen enthält diese Gruppe nicht. Es folgt also:

3. Es gibt 7 Gruppen der Symmetrie C_2^v mit dem Gitter Γ_v' .

¹) Die beiden Pfeile auf den Mittelebenen λ und μ sind zu vertauschen.

§ 5. Die Gruppen der Symmetrie C_2^v mit den Gittern Γ_v'' und Γ_v''' . Die Gitter Γ_v'' und Γ_v''' sind Sonderfälle des monoklinen Gitters Γ_m' ; es können sich also Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ nur aus der Gruppe $\mathfrak{C}_2^3$ ergeben.

Das Gitter Γ_v'' besitzt als primitives Tripel (Fig. 67, S. 165)

$$2\tau_g = \tau_x + \tau_y, \quad 2\tau_h = \tau_x + \tau_z, \quad 2\tau_k = \tau_y + \tau_z;$$

nach § 2 treten die unter 3a) genannten Translationen, also

$$9) \quad 0, \tau_x, \tau_h = \frac{1}{2}\tau_x + \frac{1}{2}\tau_z, \quad \tau_h' = \frac{1}{2}\tau_x - \frac{1}{2}\tau_z$$

als mögliche Werte von τ in $\mathfrak{S}_v(\tau)$ auf. Das Fußpunktenetz der Drehungsachsen von Γ_v'' ist in Fig. 80 (S. 182) enthalten; es gilt dafür das gleiche, wie für das von Γ_v' ; es ist ein rhombisches Netz, läßt seine Diagonalen als Drehungsachsen zu, d. h. die Rechteckseiten OD und OE von Fig. 80 und außerdem Umschraubungen um die zu ihnen parallelen Mittellinien.

Die Translationen dieser Umschraubungen sind wiederum $\frac{1}{2}\tau_x$ und $\frac{1}{2}\tau_y$; insbesondere $\frac{1}{2}\tau_x$ für die zu α parallelen Mittellinien. Im Gegensatz zum

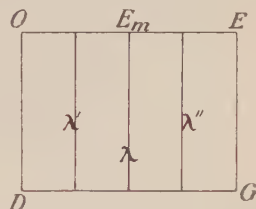


Fig. 132

Gitter Γ_v' führen sie aber hier zu möglichen Operationen $\mathfrak{S}_v(\tau)$, nämlich zu solchen, in denen τ einen der beiden Werte

$$\tau_h = \frac{1}{2}\tau_x + \frac{1}{2}\tau_z \quad \text{und} \quad \tau_h' = \frac{1}{2}\tau_x - \frac{1}{2}\tau_z$$

hat. Die spiegelnden Ebenen folgen auch hier im Abstand $\frac{1}{2}\tau_y$ aufeinander; es treten daher in jeder zugehörigen Gruppe entweder α und λ zugleich auf, also (Fig. 132) die Ebenen durch O und E_m , oder aber zwei Ebenen, die durch die Mitten von OE_m und E_mE gehen. Die Figur zeigt ihre Schnittlinien mit der Ebene γ ; wir wollen diese Ebenen durch λ' und λ'' bezeichnen. Damit sind die vorbereitenden Betrachtungen erledigt.

Sei zunächst $\mathfrak{S}_\alpha$ die erzeugende Operation; sie bedingt nach a) auch die Spiegelung $\mathfrak{S}_\beta$, und wir gelangen so zur Gruppe

$$\mathfrak{C}_{2v}^{18} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha; \Gamma_v''\} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\beta\}.$$

Nach § 2, Gl. 3) und 3a) kommen dieser Gruppe auch die Operationen $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x)$ und $\mathfrak{S}_\mu(\tau_y)$ zu, wie es die Achsenfigur 133 erkennen läßt¹⁾. Wir schließen daraus, wie soeben in § 4, daß die Operation $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ keine neue Gruppe liefert; α und λ haben auch hier gleiche Lage zur Achsengesamtheit.

Eine neue Gruppe ergibt sich also nur noch mit der Operation $\mathfrak{S}_\lambda'(\tau_h)$; sie enthält nach § 2 auch die Operation $\mathfrak{S}_\lambda''(\tau_h')$. Im Hinblick auf Gleichung 1) von § 2 schließen wir, daß ihr auch die beiden Operationen $\mathfrak{S}_\mu'(\tau_k)$ und $\mathfrak{S}_\mu''(\tau_k')$ angehören; was übrigens auch aus der Gleichwertigkeit der Ebenen α und β

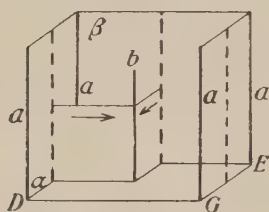


Fig. 133

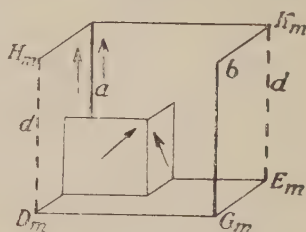


Fig. 134

folgt. Wir gelangen so wiederum nur zu einer einzigen neuen Gruppe

$$\mathfrak{G}_{2v}^{19} = \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\lambda'(\tau_h); \Gamma_v''\} = \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\mu'(\tau_k)\}$$

und sehen in Fig. 134 ihre Achsenfigur²⁾.

Wir gehen endlich zu den Gruppen mit dem Gitter Γ_v''' über. Das Fußpunktenetz von Γ_v''' ist in Fig. 81 (S. 182) enthalten; ihm kommen die nämlichen Drehungsachsen zu, wie dem Gitter Γ_v . Wir schließen deshalb zunächst, daß als erzeugende Operationen nur diejenigen auftreten können, die auch die Gruppen mit dem Gitter Γ_v zulassen, also die Operationen

$$\mathfrak{S}_\alpha(\tau) \text{ und } \mathfrak{S}_\lambda(\tau),$$

wo τ einen der vier Werte

$$10) \quad 0, \tau_x, \tau_y, \tau_x + \tau_y$$

¹⁾ Gemäß Kap. IX, § 12 auch die Operationen $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_z)$ und $\mathfrak{S}_\mu(\tau_z)$.

²⁾ Die Figur stellt nur einen Oktanten von p dar, ebenso wie Fig. 80a (S. 182); wie dies stets beim Gitter Γ''' der Fall ist.

hat. Von der Operation $\mathfrak{S}_\lambda(\tau)$ können wir aber absehen. Beim Gitter Γ_v''' folgen, wie wir in § 2 sahen, die spiegelnden Ebenen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_y$ aufeinander, und es treten daher die Ebenen α und λ in jeder einzelnen Gruppe *zugleich* auf. Die Gleitungs-komponenten der Schaar $\{\alpha\}$ haben nach den Gleichungen 4) und 4a) von § 2 abwechselnd die Werte

$$0, \tau_x + \tau_z \text{ oder } \tau_x, \tau_z$$

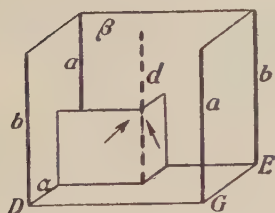


Fig. 135

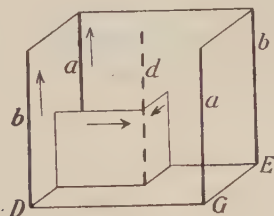


Fig. 136

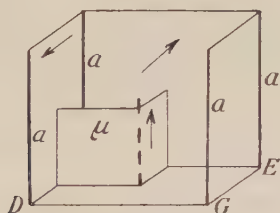


Fig. 137

und für die Ebenen der Schaar $\{\beta\}$

$$0, \tau_y + \tau_z \text{ oder } \tau_y, \tau_z.$$

Damit sind die vorbereitenden Betrachtungen wieder erledigt.

Verschiedene Gruppen erhalten wir, wie sich zeigen wird, nur mittels der Operationen

$$\mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x), \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x).$$

Mit $\mathfrak{S}_\alpha$ und $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ erhalten wir zunächst die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{2v}^{20} &= \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha; \Gamma_v'''\} = \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\beta\} \\ \mathfrak{G}_{2v}^{21} &= \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x); \Gamma_v'''\} = \{\mathfrak{G}_2^3, \mathfrak{S}_\beta(\tau_x)\}. \end{aligned}$$

Aus den Formeln a) und c) von § 2 folgt nämlich, daß der ersten Gruppe die Spiegelung $\mathfrak{S}_\beta$ angehört und der zweiten die Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_\beta(\tau_z)$. Für die Zeichnung der Achsenfiguren ist zu beachten, daß in der ersten Gruppe, wie oben erwähnt, den spiegelnden Ebenen einerseits die Translationen 0 und $\tau_x + \tau_z$ zukommen und andererseits 0 und $\tau_y + \tau_z$; für die zweite Gruppe sind es τ_z und τ_x einerseits und τ_z, τ_y andererseits (Fig. 135 und 136).

Für die mit $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$ zu bildende Gruppe kommt die Formel e) in Betracht; sie zeigt, daß der Gruppe auch die Spiegelung $\mathfrak{S}_\mu$ angehört. Wir erhalten so die Gruppe

$$\mathfrak{G}_{2v}^{22} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x); \Gamma_v'''\} = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{S}_\mu\}.$$

Hier wechseln bei den Ebenen der Schaar $\{\alpha\}$ die Translationenwerte τ_x und τ_y miteinander ab; bei den Ebenen der Schaar $\{\beta\}$ sind es die Werte $\tau_y + \tau_z$ und 0; und da der Ebene μ die Spiegelung $\mathfrak{S}_\mu$ zukommt, so entspricht der Ebene β die Operation $\mathfrak{S}_\beta(\tau_y + \tau_z)$ (Fig. 137).

Damit ist zugleich gezeigt, daß die Operation $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z)$ eine neue Gruppe nicht liefert; denn sie ist mit $\mathfrak{S}_\beta(\tau_y + \tau_z)$ geometrisch gleichwertig. Es folgt also:

4. *Es gibt zwei Gruppen der Symmetrie C_2^v mit dem Gitter Γ_v'' und drei mit Γ_v''' .*

5. *Es gibt insgesamt 22 Gruppen der Symmetrie C_2^v ; zehn mit dem Gitter Γ_v , sieben mit Γ_v' , zwei mit Γ_v'' und drei mit Γ_v''' .*

§ 6. Allgemeines über die Gruppen der Symmetrie V . Die Gruppe V enthält die vier Operationen

$$1, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''.$$

Sie entsteht aus C_2 durch Multiplikation mit einer Umwendung $\mathfrak{U}'$; analog können also die zu V isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{B}$ gebildet werden. Es scheint jedoch zweckmäßig, für die Ableitung dieser Gruppen einen eigenen Weg einzuschlagen; einen Weg, der dem gleichartigen Bau der Gruppe V nach den drei Achsenrichtungen u, v, w Rechnung trägt. Es bilden nämlich die Operationen

$$1, \mathfrak{U}'; 1, \mathfrak{B}'; 1, \mathfrak{B}''$$

je eine in V enthaltene Untergruppe C_2 ; gemäß der Isomorphie zwischen Raumgruppen und Punktgruppen muß daher jede zu V isomorphe Raumgruppe $\mathfrak{B}$ drei Untergruppen $\mathfrak{C}_2$ enthalten, deren Achsen den drei Richtungen u, v, w parallel laufen. Um alle Gruppen $\mathfrak{B}$ zu finden, können wir also so vorgehen, daß wir alle möglichen Kombinationen solcher drei Gruppen $\mathfrak{C}_2$ ermitteln. Dies ist für jedes der vier Gitter $\Gamma_v, \Gamma_v', \Gamma_v'', \Gamma_v'''$ wiederum gesondert durchzuführen.

Wir stützen die Ableitung auf einen Hilfssatz, der eine Verallgemeinerung der Gleichung 15) von Kap. II darstellt: Seien

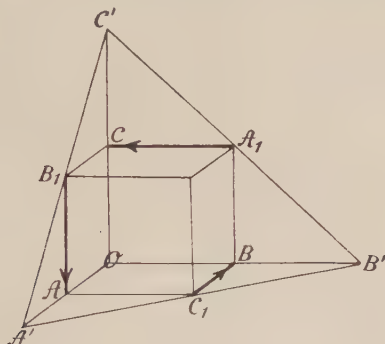


Fig. 138

C_1B, A_1C, B_1A drei zueinander windschiefe Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons (Fig. 138), deren Längen wir durch

$$C_1B = AO = t_u, \quad A_1C = BO = t_v, \quad B_1A = CO = t_w$$

bezeichnen wollen; ferner seien

$$\mathfrak{U}(\pi, 2t_u), \quad \mathfrak{B}(\pi, 2t_v), \quad \mathfrak{C}(\pi, 2t_w)$$

Schraubungen um diese drei windschiefen Kanten, so besteht die Gleichung

$$11) \quad \mathfrak{U}(\pi, 2t_u) \cdot \mathfrak{B}(\pi, 2t_v) \cdot \mathfrak{C}(\pi, 2t_w) = 1.$$

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen. Sind $\mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ Umwendungen um die drei Geraden OA, OB, OC , so ist, wie eben erwähnt,

$$11a) \quad \mathfrak{U}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' = 1.$$

Das Produkt 11) ist dem Produkt 11a) isomorph; sein Wert muß daher eine zur *Identität isomorphe Operation* sein, also eine Translation. Um sie zu finden, genügt es den Ort zu bestimmen, den ein beliebiger Raumpunkt nach Ausführung der drei Schraubungen einnimmt. Wir wählen dazu den Punkt A' auf OA , für den vektoriell $A'O = 2t_u$ ist. Dieser Punkt kommt infolge der Bewegung $\mathfrak{U}$ nach B' . Von hier bringt ihn die Bewegung $\mathfrak{B}$ nach C' , und von C' endlich gelangt er durch die Bewegung $\mathfrak{B}$ wieder nach A' . Die resultierende Translation hat also die Größe Null; womit die Gleichung 11) bewiesen ist.

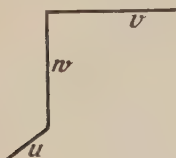


Fig. 139

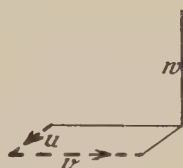


Fig. 139b

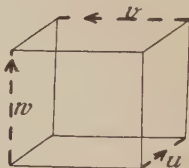


Fig. 139c

Aus ihr ziehen wir verschiedene Folgerungen. Wir multiplizieren sie zunächst mit $\mathfrak{B}^{-1}$, so geht sie in

$$\mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}$$

über. Setzen wir nun $t_u = 0$, $t_v = 0$, so werden $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ Umwendungen, und die Achse w wird das gemeinsame Lot der beiden windschiefen Achsen u und v ; wir gelangen so zu einem Satz, dem wir in Kap. IV, § 3 schon in allgemeinerer Form begegnet sind:

a) Zwei Umwendungen, deren Achsen u und v sich rechtwinklig kreuzen, bedingen eine Umschraubung um das gemeinsame Lot w von u und v , deren Translation gleich der doppelten Entfernung der Achsen u und v ist (Fig. 139).

Setzen wir dagegen $t_w = 0$, so fallen die Achsen u und v in dieselbe Ebene, während die Achse w ihren Platz nicht ändert und es folgt (Fig. 139a):

b) Zwei Schraubungen $\mathfrak{U}(\pi, 2t_u)$ und $\mathfrak{B}(\pi, 2t_v)$, deren Achsen sich rechtwinklig schneiden, bedingen eine Umwendung

um eine zu ihnen senkrechte Achse, die von ihrem Schnittpunkt den vektoriellen Abstand $t_u + t_v$ besitzt.

Dem allgemeinen Fall, daß t_u und t_v nicht Null sind, entspricht der Satz (Fig. 139 b):

c) Zwei Umschraubungen, deren Achsen u und v sich rechtwinklig kreuzen, bedingen eine Umschraubung um eine die Achsen u und v nicht schneidende Achse w , die mit u und v drei windschiefe Kanten eines Parallelepipedons mit den Kanten t_u, t_v, t_w bildet.

Der Vollständigkeit halber führen wir auch noch den Satz an, der der Gleichung 14 von Kap. II entspricht:

d) Zwei sich senkrecht schneidende Umwendungsachsen bedingen eine dritte zu ihnen senkrechte Umwendungsachse durch ihren Schnittpunkt.

Eine letzte Vorbetrachtung, die wir der Ableitung der zur Gruppe V isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{B}$ vorausschicken, ist die folgende. Die Punktgruppe V ist dadurch charakterisiert, daß jede ihrer drei Umwendungen $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}'$ jede der beiden andern Umwendungsachsen einzeln *in sich* überführt; insbesondere geht also durch $\mathfrak{U}'$ sowohl v' wie w' *in sich* über. Eine zu V isomorphe Raumgruppe muß daher drei Schaaren von Operationen

$$\{\mathfrak{U}_i\}, \{\mathfrak{B}_i\}, \{\mathfrak{B}_i\}$$

von analoger Beschaffenheit enthalten; es muß also z. B. eine jede Operation $\mathfrak{U}_i$ eine Deckoperation sein sowohl für die Achsenschaar $\{v_i\}$, wie für die Achsenschaar $\{w_i\}$. Wir wollen nun durch die Achse u_i der Operation $\mathfrak{U}_i$ eine horizontale Ebene γ legen und das Fußpunktenetz ins Auge fassen, das die Drehungsachsen oder aber die Schraubenachsen $\{w_i\}$ in ihr ausschneiden. Für jedes dieser beiden Netze muß $\mathfrak{U}_i$ ebenfalls eine Deckoperation sein. Jedes dieser beiden Netze ist ein rechtwinkliges Netz mit den Translationen τ_x und τ_y , es muß also u_i in eine Seite oder Mittellinie eines Netzes fallen. Wir schließen daraus, daß — kurz gesprochen — die Achsen $\{u_i\}$ entweder die Achsen $\{w_i\}$ schneiden oder aber in mittleren Abständen zwischen ihnen verlaufen. Dies gilt sowohl für die Drehungsachsen $\{w_i\}$ wie für die Schraubenachsen; überdies muß der kürzeste Ab-

stand zweier sich nicht schneidender Achsen u_i, w_i den Wert $1/2 \tau_y$ haben. Das gleiche gilt analog für je zwei der drei Achsenschaaren; insbesondere ist $1/2 \tau_x$ der Abstand zweier nächster Achsen v_i, w_i und $1/2 \tau_z$ der für u_i, v_i .

§ 7. Die Gruppen der Symmetrie V mit den Gittern Γ_v und Γ_v' . Raumgruppen $\mathfrak{C}_2$ mit dem Gitter Γ_v gibt es nur zwei; nämlich $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$. Nach jeder der drei senkrechten Richtungen u, v, w bilden also die Achsenschaaren je eine dieser beiden Gruppen. Nun sind für das Gitter Γ_v alle drei Richtungen u, v, w gleichberechtigt; es sind daher als mögliche Kombinationen der Achsenschaaren nur folgende vier Fälle denkbar. Sie können für *jede* der drei senkrechten Richtungen u, v, w eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ bilden, oder nur für *zwei*, oder für *eine*, oder für *keine*. Dies liefert die vier Kombinationen

$$\mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1; \quad \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2; \quad \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^{11}; \quad \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2.$$

Es wird sich zeigen, daß jeder von ihnen genau eine Raumgruppe $\mathfrak{B}$ entspricht. Diese Gruppen scheiden sich, wie wir sehen werden, nach den folgenden vier geometrischen Gesichtspunkten, die ebenfalls alle an sich vorhandenen Möglichkeiten erschöpfen. 1) Es gibt drei einander schneidende Achsen u, v, w . 2) Eine Achse w wird sowohl von u wie von v geschnitten; u und v schneiden sich nicht. 3) u und v schneiden sich; w liegt zu beiden windschief. 4) Keine zwei Achsen u, v, w schneiden sich.

Für die erste Kombination sind alle Achsen Drehungsachsen; daraus kann man folgern, daß es Achsen u, v gibt, die sich schneiden. Wäre es nicht der Fall, so gäbe es (nach § 6) zwei sich kreuzende Achsen u, v im Abstand $1/2 \tau_z$; nach dem Satz a) von § 6 würden aber zwei solche Achsen eine Schraubung $\mathfrak{B}$ mit der Translation τ_z bedingen, was nicht der Fall sein darf. Nun bedingen zwei sich schneidende Achsen u und v nach d) wiederum eine dritte Drehungsachse w durch ihren Schnittpunkt. Aus diesen drei Achsen gehen nach dem allgemeinen Satz 1a von Kap. XII alle Achsen durch Multiplika-

¹⁾ Die obige Schreibweise führt zu einer leichteren Figurenableitung als die förmal näher liegende $\mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^3$.

tion mit der Gruppe Γ_v hervor; jeder Achsenschaar entspricht eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ mit dem Fußpunktenetz von Fig. 73 (S. 177). Die sämtlichen Achsen u , v , w bilden daher die Kanten eines Raumgitters mit τ_x , τ_y , τ_z als primitivem Tripel (Fig. 140). Wir stellen die so bestimmte Gruppe dar durch

$$\mathfrak{B}_1 = \{ \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1; \Gamma_v \}.$$

Der zweiten Kombination entspricht die Gruppe

$$\mathfrak{B}_2 = \{ \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2; \Gamma_v \}.$$

Für sie sind alle Achsen w Schraubenachsen, und alle Achsen u und v Drehungsachsen. Aus dem Satz d) folgt daher zunächst,

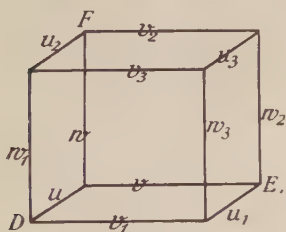


Fig. 140

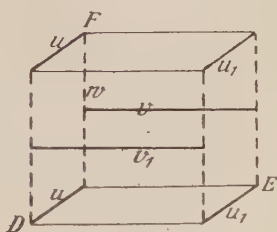


Fig. 141

daß die Achsen u und v einander *nicht* schneiden; sie laufen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ durcheinander durch. Aus Satz a) folgt nun weiter, daß die Achse w die Achsen u und v schneidet. Damit haben wir das erzeugende Achsentripel der Gruppe gewonnen; aus ihm gehen alle übrigen Achsen wieder durch Multiplikation mit der Gruppe Γ_v hervor. Dem entspricht die Achsenfigur 141.

Für die dritte Gruppe

$$\mathfrak{B}_3 = \{ \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1; \Gamma_v \}$$

sind die Achsen w Drehungsachsen, die Achsen u und v Schraubenachsen. Das ist der Tatbestand, der dem Satz b) entspricht, wir folgern aus ihm, daß u und v sich schneiden, während w die Achsen u und v nicht schneidet; die Achse w hat von u und v die Abstände $\frac{1}{2}\tau_y$ und $\frac{1}{2}\tau_x$. Damit ist das erzeugende Achsentripel wieder gewonnen. Ihm entspricht die Achsenfigur 142.

Endlich entspricht auch der vierten Kombination eine Gruppe, nämlich

$$\mathfrak{B}_4 = \{\mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2; \Gamma_v\}.$$

Bei ihr sind alle Achsen Schraubenachsen. Keine zwei dürfen sich gemäß Satz b) schneiden. Die Gruppe entspricht daher dem Fall c) und der Fig. 139c. Die Achsen laufen in den Abständen $\frac{1}{2}\tau_x, \frac{1}{2}\tau_y, \frac{1}{2}\tau_z$ durcheinander durch. Dies liefert die Achsenfigur 143. Damit sind alle Gruppen mit dem Gitter Γ_v abgeleitet.

Beim Gitter Γ_v' ist eine Fläche der Stammfigur zentriert; da alle drei Richtungen von Γ_v gleichwertig sind, können wir

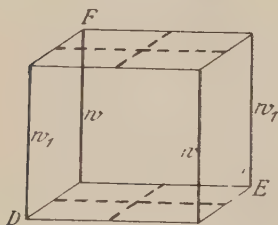


Fig. 142

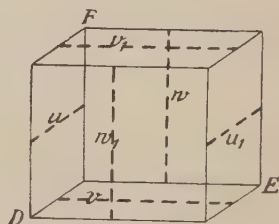


Fig. 143

dafür eine beliebige Fläche auswählen, es sei die Grundfläche γ . Dann hat das Gitter Γ_v' für die Grundfläche γ den Charakter des monoklinen Gitters Γ_m , für α und β als Grundfläche aber den Charakter des Gitters Γ_m' und zwar in der zweiten Auffassung mit γ als zentrierter Seitenfläche. Die Achsen u und v bilden daher je eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^2$; hingegen können die Achsen w nur eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ oder $\mathfrak{C}_2^2$ bilden. Wir gelangen so zu zwei möglichen Kombinationen

$$\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1 \text{ und } \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^2.$$

Die Ableitung der ihnen entsprechenden Gruppen läßt sich in einfacher Weise an die bereits vorhandenen Gruppen anschließen; und zwar auf Grund folgender Erwägungen. Die Achsen w bilden entweder eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ oder eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^2$, doch so, daß das primitive Paar der Ebene γ das Paar $2\tau'$, $2\tau''$ ist. Dies Paar entsteht aus $2\tau_x, 2\tau_y$ durch Zentrierung;

es geht daher auch die Lage der hier auftretenden Achsen w aus den Fußpunktenetzen der bereits erzeugten Gruppen durch Zentrierung hervor. Dagegen ist das Fußpunktenetz der Achsen u und v ein Netz, wie es dem Gitter Γ_m' zweiter Auffassung entspricht, also ein Netz, wie es in Fig. 74 (S. 177) gezeichnet ist; es entsteht aus dem Netz, das dem Gitter Γ_m entspricht, durch Seitenzentrierung. Wir können daher die Herstellung der Achsenfiguren, die den Gruppen mit dem Gitter Γ_v' entsprechen, in der Weise vornehmen, daß wir sie aus den bereits vorhandenen Achsenfiguren durch Einfügung aller der Achsen

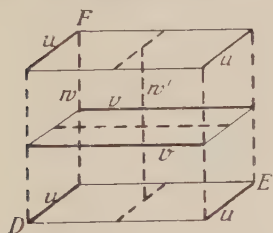


Fig. 144

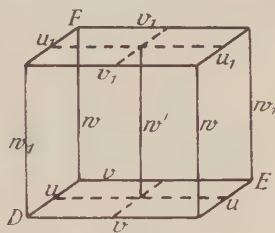


Fig. 144a

entstehen lassen, die durch die genannte Zentrierung gefordert werden.

Wir betrachten zunächst die zweite Kombination, die zugehörige Gruppe werde durch

$$\mathfrak{B}^5 = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^2; \Gamma_v'\}$$

bezeichnet. Ihre Achsenfigur ergibt sich aus der Gruppe $\mathfrak{B}_2$ durch Einfügung einer Schraubenachse der Richtung w , die der eben genannten Zentrierung entspricht, also durch die Mitte der Grundfläche geht, und durch Einfügung der Schraubenachsen u und v , die der eben genannten Seitenzentrierung entsprechen; in jede horizontale Achsenebene von Fig. 141 ist also zwischen zwei Drehungsachsen eine Schraubenachse einzufügen. Wir erhalten so die Achsenfigur 144.

Die Gruppe, die der zweiten Kombination entspricht, sei

$$\mathfrak{B}^6 = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1; \Gamma_v'\}.$$

Ihre Achsenfigur geht in der nämlichen Weise aus der von $\mathfrak{B}_1$ hervor, wie die vorstehende aus der von $\mathfrak{B}_2$. Es ist also in Fig. 140 eine vertikale Drehungsachse durch die Mitte der Grundfläche einzufügen, und in jede horizontale Achsenebene je eine Schraubenachse zwischen zwei Achsen u und v (Fig. 144a). Dies ergibt die Achsenanordnung von Fig. 79 (S. 181), die dort in derselben Weise aus Fig. 77 abgeleitet wurde.

Genau genommen fehlt freilich noch der Beweis, daß dies die einzigen Gruppen mit dem Gitter Γ_v' sind. Er ergibt sich daraus, daß in den Gruppen notwendig Drehungsachsen u und v auftreten, und daß für sie nur die zwei Fälle des Schneidens ($\mathfrak{B}_6$) und des Nichtschneidens ($\mathfrak{B}_5$) möglich sind.

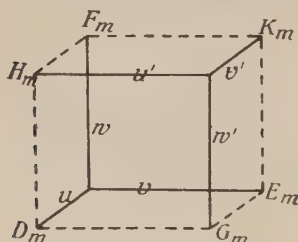


Fig. 144b

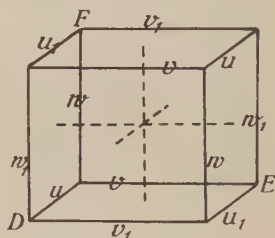


Fig. 144c

§ 8. Die Gruppen der Symmetrie Γ mit den Gittern Γ_v'' und Γ_v''' . Die beiden rhombischen Gitter Γ_v'' und Γ_v''' sind Sonderfälle des Gitters Γ_m' und zwar für jede der drei Richtungen; daher bilden die Achsenschaaren für eine jede der drei senkrechten Richtungen eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^3$. Auch die Ableitung dieser Gruppen können wir auf die bereits vorhandenen Resultate stützen. Die Gruppen mit dem Gitter Γ_v'' ergeben sich aus denen vom Gitter Γ_v' nach derselben Methode, der wir in Kap. IX, § 12 folgten; wir haben also die ergänzenden Achsen für jede der drei Richtungen einzufügen. Wird dies für die Gruppe $\mathfrak{B}_6$ ausgeführt, so erhalten wir wieder die a. a. O. gezeichnete Fig. 80. Die ihr entsprechende Gruppe bezeichnen wir durch

$$\mathfrak{B}^7 = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3; \Gamma_v''\}.$$

Ihre Achsenfigur 144 b entspricht dem Teiloctanten p' der Figur 80 a. Wir werden sofort erkennen, daß sie die einzige Gruppe mit dem Gitter Γ_v'' ist.

Wir können nämlich die mit den Gittern Γ_v'' und Γ_v''' möglichen Gruppen auch folgendermaßen erhalten. Da die Achsen u, v, w je eine Gruppe $\mathbb{C}_2^3$ bilden, so gibt es unter ihnen auch Drehungsachsen; wir können also wieder an die zwei Möglichkeiten des Schneidens und Nichtschneidens für zwei Drehungsachsen u und v anknüpfen. Der Fall des Schneidens bewirkt sofort, daß durch den Schnittpunkt (uv) auch eine Drehungsachse w geht. Dies führt auf die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ als zu

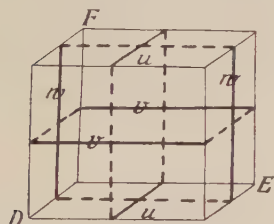


Fig. 145

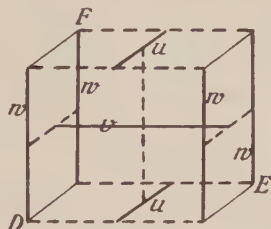


Fig. 145 a

zentrierende Gruppe. Solcher Zentrierungen sind aber zwei verschiedene möglich, nämlich der Übergang von ihrem Gitter Γ_v zum Gitter Γ_v'' und zu Γ_v''' . Der erste Fall ist oben erledigt und liefert die Gruppe $\mathfrak{B}^7$; der zweite erledigt sich wieder genau wie in Kap. IX, § 12 durch Einfügung von drei Schraubenachsen, wie es Fig. 81 (S. 182) zeigt. Die so bestimmte Gruppe nennen wir (Fig. 144 c)

$$\mathfrak{B}^8 = \{ \mathbb{C}_2^3, \mathbb{C}_2^3, \mathbb{C}_2^3; \Gamma_v''' \}.$$

Es bleibt also nur noch der Fall dreier windschiefer Drehungsachsen u, v, w zu erledigen. Wir wissen, daß sie die Abstände $\frac{1}{2}\tau_x, \frac{1}{2}\tau_y, \frac{1}{2}\tau_z$ besitzen, und in drei zueinander senkrechte Richtungen fallen; sie können also nur die Lage zueinander haben, wie die drei Geraden BC_1, CA_1, AB_1 von Fig. 138. Nach Satz a) bedingen sie auch drei sie schneidende Schraubenachsen, die also in die Geraden B_1C, C_1A, A_1B dieser Figur fallen. Damit ist die erzeugende Achsenfigur wieder vorhanden (Fig. 145). Es handelt sich nur noch darum, aus

welcher Gruppe $\mathfrak{B}$ sie durch Zentrierung hervorgeht. Sie kann nur aus $\mathfrak{B}^4$ entstehen; alle andern Achsenfiguren enthalten Schraubenachsen, die sich schneiden; und zwar entsteht sie aus $\mathfrak{B}^4$ durch Körperzentrierung. Der Gruppe kommt also das Gitter Γ_v''' zu. Für die Achsenfigur dieser Gruppe zeigt Fig. 145a noch eine zweite Darstellung; sie entsteht so aus Fig. 145, daß ihre Achse w durch den Punkt O gelegt wird, also die ganze Figur eine Verschiebung um τ_x in umgekehrter Richtung erfährt. Wir bezeichnen die Gruppe durch¹⁾

$$\mathfrak{B}^9 = \{\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3; \Gamma_v'''\}.$$

6. Es gibt neun Gruppen der Symmetrie V ; vier mit dem Gitter Γ_v , zwei mit Γ_v' , eine mit Γ_v'' und zwei mit Γ_v''' .

§ 9. Allgemeine Bemerkungen über die Gruppen der Symmetrie V^h . Die Gruppe V^h ist durch das Bildungsgesetz 12)

$$V^h = \{V, \mathfrak{S}_h'\} = \{V, \mathfrak{S}'\}$$

charakterisiert. Wir legen für die Ableitung der ihr isomorphen Raumgruppen die zweite Erzeugungsart zugrunde und werden daher die Raumgruppen $\mathfrak{B}_h$ aus den Gruppen $\mathfrak{B}$ mittels einer zu $\mathfrak{S}'$ isomorphen Operation erzeugen, also wieder mit einer Inversion. Jedes Inversionszentrum, das die Achsenschaaren einer der Gruppen $\mathfrak{B}$ in sich überführt, führt zu einer Gruppe $\mathfrak{B}_h$. Dabei ist zu beachten, daß das Produkt von zwei Inversionen eine Translation ist, die gleich der doppelten Entfernung der beiden Inversionszentra ist. Gemäß Kap. XII, § 7 sind daher zwei mittels einer Inversion gebildete Gruppen immer dann identisch, wenn die Entfernung der beiden Inversionszentra eine halbe Translation der Gruppe ist.

Symmetriezentra für eine Gruppe $\mathfrak{B}$ können für jede in $\mathfrak{B}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{C}_2$ nur die in Kap. XIII, § 6 genannte Lage haben; sie fallen also in eine Achse oder in die Mitte zwischen zwei gleichartigen Achsen. Dem genügen nur die Ecken, Körper-

¹⁾ Ein unterscheidendes Merkmal der beiden (gleich bezeichneten) Gruppen $\mathfrak{B}^8$ und $\mathfrak{B}^9$ besteht darin, daß in $\mathfrak{B}^8$ die Drehungsachsen w von den Drehungsachsen u, v geschnitten werden, in $\mathfrak{B}^9$ die Schraubenachsen. Dies kann auch zur Ableitung der Gruppen verwendet werden.

mitten, Kantenmitten und Flächenmitten der zu den Gruppen $\mathfrak{B}$ gehörigen Achsenfiguren; sie allein stellen also mögliche Symmetriezentra dar; und zwar genügt es im allgemeinen, die Punkte O , M_m , D_m , F_m , G_m , H_m in Betracht zu ziehen¹⁾. Wir bezeichnen die Inversionen gegen die Ecke O , die Körpermitte M_m , die Kantenmitten D_m und F_m , die Flächenmitten G_m und H_m durch

13) $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{S}_d$, $\mathfrak{S}_f$, $\mathfrak{S}_g$, $\mathfrak{S}_h$.

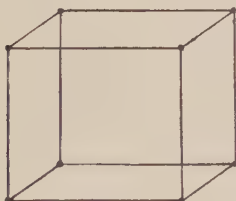


Fig. 146

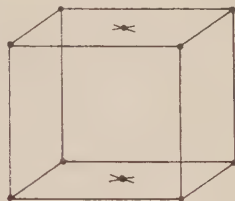


Fig. 146a

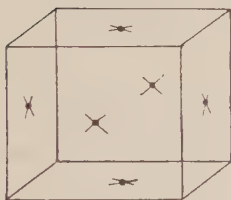


Fig. 146b

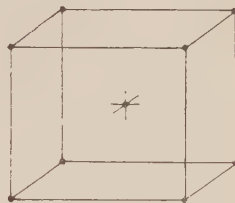


Fig. 146c

Wie sich die Symmetriezentra einer einzelnen Gruppe $\mathfrak{B}_h$ durch den Raum hindurch wiederholen, hängt nur vom Gitter ab und bestimmt sich nach Satz 1 von Kap. XIII. Für die einzelnen Gitter I_v , F_v' , F_v'' , F_v''' ist es durch die Figuren 146, 146a, 146b, 146c dargestellt. Wenn das erzeugende Zentrum in den Punkt O fällt, so sind für I_v alle Ecken des Oktanten p Symmetriezentra, für F_v' auch die Mitte von Grundfläche und Gegenfläche, für F_v'' auch die Mitten aller Seitenflächen und für F_v''' auch die Körpermitte.

¹⁾ Eine Ausnahme tritt nur bei $\mathfrak{B}^7$ auf.

Für die in den Gruppen auftretenden spiegelnden Ebenen sind zunächst die Formeln a), b), c), d) von Kap. XIII, § 6 maßgebend. Sie führen zu den folgenden Sätzen, in denen die Symmetriezentra noch wie in Fig. 108, S. 281 bezeichnet sind, und a eine zweizählige Drehungs- oder Schraubenachse bedeutet.

a) Ein auf der Drehungsachse a liegendes Zentrum O bedingt eine zu a senkrechte Symmetrieebene σ durch O .

b) Ist a eine Achse mit der Schraubung $\mathfrak{A}(\pi, \tau_z)$, so bedingt das Zentrum O_1 eine Symmetrieebene σ' im Abstand $1/2 \tau_z$ von O_1 .

c) Liegt das Zentrum O_2 *nicht* auf der Drehungsachse a , und ist t sein vektorieller Abstand von a , so bedingt es die Operation $\mathfrak{S}(2t)$ an der zu a senkrechten Ebene σ durch O_2 .

d) Ist a wieder eine Schraubenachse, so stellt sich durch das Zentrum O_3 statt der Operation $\mathfrak{S}(2t)$ die analoge Operation an der in b) genannten Ebene σ' ein.

Durch die Art und Lage der *einen* so bestimmten spiegelnden Ebene ist *die gesamte ihr parallele Schaar nach den Sätzen von § 2 in allen Fällen bestimmt*.

Eine letzte allgemeine Bemerkung sei die folgende. Die Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^4, \mathfrak{B}^7, \mathfrak{B}^8, \mathfrak{B}^9$ verhalten sich für alle drei Richtungen u, v, w gleichartig. Diese drei Richtungen sind also gleichberechtigt, daher ist die Lage der möglichen Symmetriezentra nur in bezug auf eine Achsenart — es seien die Achsen w — in Betracht zu ziehen. Für diese Gruppen kommen also nur die Punkte

$$O, M_m, F_m, G_m$$

in Betracht. Die übrigen Achsenfiguren, also die von $\mathfrak{B}^2, \mathfrak{B}^3, \mathfrak{B}^5, \mathfrak{B}^6$ sind nur für die u - und v -Richtung gleichartig gebaut; die Lage der Symmetriezentra ist daher außer für die Achsen $\{w\}$ auch noch für eine der beiden Schaaeren $\{u\}$ und $\{v\}$ zu prüfen — wir wählen dazu die u -Achsen. Zu den obigen vier erzeugenden Punkten kommen also noch D_m und H_m hinzu, so daß dann insgesamt

$$14) \quad O, M_m, D_m, F_m, G_m, H_m$$

zu prüfen sind. Alle diese Inversionen liefern meist verschiedene Gruppen. Es kann aber der Fall eintreten, daß zwei solche Zentra zur Achsengesamtheit die gleiche geometrische Lage haben; dann sind die mit ihnen erzeugten Gruppen im Sinn von § 2 als *identisch* anzusehen.

Für die Achsenfiguren ist der Gesichtspunkt der Deutlichkeit als Richtschnur gewählt worden; bei vielen wurden nur einige Seitenflächen des Oktanten p beibehalten. Zu ihnen kommen meist noch die Ebenen λ, μ, ν durch M_m . Aus den Eigenschaften der Figuren für diese Ebenen läßt sich alles weitere analog entnehmen. Wir werden jeder Gruppe die drei für sie charakteristischen Spiegelungen oder Gleitspiegelungen beifügen.

§ 10. Die Gruppen der Symmetrie V^h mit dem Gitter Γ_v . Da das Gitter F_v für jede der drei Richtungen den Charakter des Gitters Γ_m hat, so liegt für die spiegelnden Ebenen der einfache Fall von Satz 3 von Kap. XII vor. Sie sind für jede Richtung von gleicher Art und folgen im Abstand τ_x, τ_y, τ_z aufeinander.

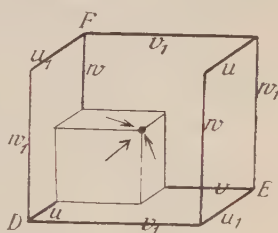


Fig. 147

Für die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ kann jeder der vier Punkte O, M_m, F_m, G_m ein erzeugendes Symmetriezentrum abgeben; auch sind alle vier so entstehenden Gruppen voneinander verschieden.

Die mit der Inversion $\mathfrak{I}$ gebildete Gruppe enthält in O auch drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen; ihnen entsprechen die Operationen $\mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\gamma$. Wir bezeichnen die Gruppe durch

$$\mathfrak{B}_h^1 = \{ \mathfrak{B}^1, \mathfrak{I}; \Gamma_v \}; \mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\gamma.$$

Die Achsenfigur wird durch Fig. 140 (S. 317) geliefert, mit α, β, γ als Symmetrieebenen und O als Symmetriezentrum.

Für die mit $\mathfrak{I}_m$ gebildete Gruppe bestimmen sich die spiegelnden Ebenen nach Satz c) von § 9; sie gehen sämtlich durch M_m . Wir finden so die Gruppe (Fig. 147)

$$\mathfrak{B}_h^2 = \{ \mathfrak{B}^1, \mathfrak{I}_m; \Gamma_v \}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z), \mathfrak{S}_\nu(\tau_x + \tau_y).$$

Die dritte und vierte Gruppe entsprechen den Inversionen an F_m und G_m . Die ihnen zugehörigen spiegelnden Ebenen bestimmen sich nach § 9 a, b, c. Wir erhalten so die zwei Gruppen (Fig. 148 und 148a)

$$\mathfrak{B}_h^3 = \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{F}; \Gamma_v\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_z), \mathfrak{S}_\beta(\tau_z), \mathfrak{S}_\nu.$$

$$\mathfrak{B}_h^4 = \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{F}; \Gamma_v\}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y), \mathfrak{S}_\gamma(\tau_x + \tau_y).$$

Die Achsenfigur der Gruppe $\mathfrak{B}^2$ ist für die w -Achsen und die u -Achsen gesondert zu behandeln; mögliche Symmetrie-

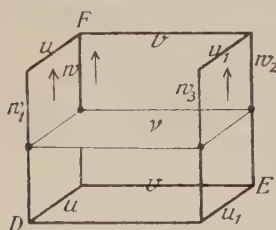


Fig. 148

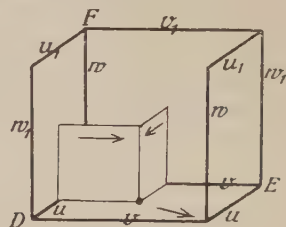


Fig. 148a

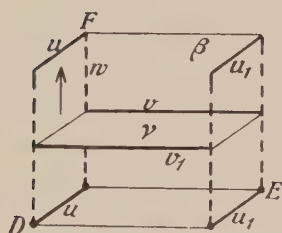


Fig. 149

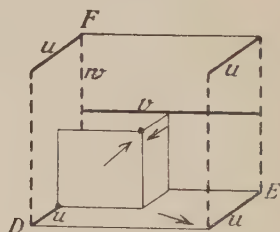


Fig. 150

zentra sind daher die Punkte $O, M_m, F_m, G_m, D_m, H_m$. Aber man erkennt leicht, daß O und F_m und ebenso M_m und G_m die gleiche geometrische Lage zur Achsengesamtheit haben; daher haben wir nur die Punkte O, M_m, D_m und H_m zu berücksichtigen.

Für die mit der Inversion $\mathfrak{F}$ erzeugte Gruppe ist zunächst β eine Symmetrieebene; gemäß Satz b) ist es auch ν und nach Satz c) stellt sich noch die Operation $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_z)$ ein; wir finden so die Gruppe (Fig. 149)

$$\mathfrak{B}_h^5 = \{\mathfrak{B}^2, \mathfrak{F}; \Gamma_v\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_z), \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\nu.$$

Ist $\mathfrak{I}_m$ das Inversionszentrum, so bestimmen sich die spiegelnden Ebenen nach den Sätzen c) und d); wir erhalten die Gruppe (Fig. 150)

$$\mathfrak{B}_h^6 = \{ \mathfrak{B}^2, \mathfrak{I}_m; \Gamma_v \}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z), \mathfrak{S}_\gamma(\tau_x + \tau_y).$$

Für $\mathfrak{I}_d$ und $\mathfrak{I}_h$ als Inversionszentra ergeben sich die spiegelnden Ebenen ebenfalls aus den Sätzen c) und d), und zwar erhalten wir (Fig. 151 und 152)

$$\mathfrak{B}_h^7 = \{ \mathfrak{B}^2, \mathfrak{I}_d; \Gamma_v \}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x + \tau_z), \mathfrak{S}_\mu, \mathfrak{S}_\nu(\tau_x).$$

$$\mathfrak{B}_h^8 = \{ \mathfrak{B}^2, \mathfrak{I}_h; \Gamma_v \}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_z), \mathfrak{S}_\gamma(\tau_x).$$

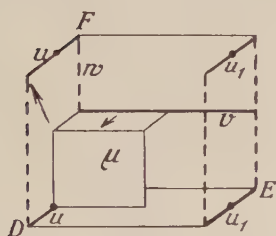


Fig. 151

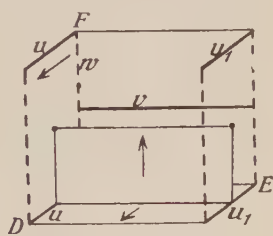


Fig. 152

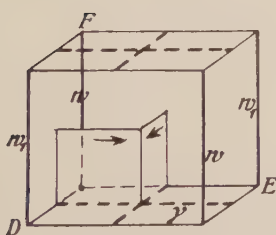


Fig. 153

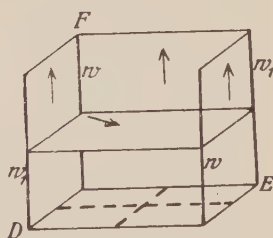


Fig. 154

Die Gruppe $\mathfrak{B}^3$ liefert im ganzen sechs verschiedene Gruppen $\mathfrak{B}_h$; entsprechend den 6 Inversionen $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_m, \mathfrak{I}_f, \mathfrak{I}_g, \mathfrak{I}_d, \mathfrak{I}_h$, die hier sämtlich verschiedene Gruppen erzeugen. Für O als Symmetriezentrum ist γ eine Symmetrieebene; gemäß Satz d) stellen sich außerdem die Operationen $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x)$ und $\mathfrak{S}_\mu(\tau_y)$ ein (Fig. 153). Wir erhalten so

$$\mathfrak{B}_h^9 = \{ \mathfrak{B}^3, \mathfrak{I}; \Gamma_v \}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y), \mathfrak{S}_\gamma.$$

Für M_m als Inversionszentrum¹⁾ werden nach Satz d) die Ebenen α und β zu spiegelnden Ebenen; wir erhalten nach Satz c) und d) (Fig. 154)

$$\mathfrak{B}_h^{10} = \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{I}_m; I_v\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x), \mathfrak{S}_\beta(\tau_x), \mathfrak{S}_v(\tau_x + \tau_y).$$

Analog ergeben sich für F_m und G_m als Inversionszentra die Gruppen²⁾ (Fig. 155 und 156)

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h^{11} &= \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{I}_f; I_v\}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_x), \mathfrak{S}_v \\ \mathfrak{B}_h^{12} &= \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{I}_g; I_v\}; \mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_v(\tau_x + \tau_y). \end{aligned}$$

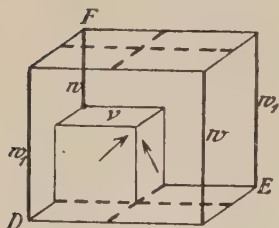


Fig. 155

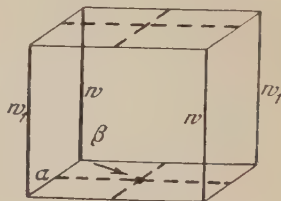


Fig. 156

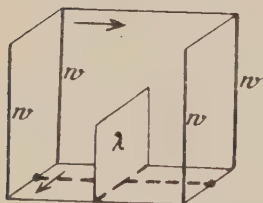


Fig. 157

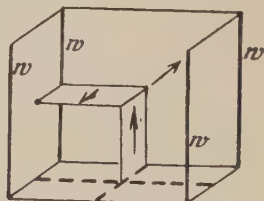


Fig. 158

Endlich führen D_m und H_m als Symmetriezentra zu den beiden Gruppen (Fig. 157 und 158)

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h^{13} &= \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{I}_d; I_v\}; \mathfrak{S}_\lambda, \mathfrak{S}_\beta(\tau_y), \mathfrak{S}_v(\tau_x) \\ \mathfrak{B}_h^{14} &= \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{I}_h; I_v\}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x), \mathfrak{S}_\beta(\tau_y + \tau_x), \mathfrak{S}_v(\tau_x). \end{aligned}$$

Die Gruppe $\mathfrak{B}^4$ ist wiederum nach den drei Achsenrichtungen gleichartig gebaut; es kommen also nur die Punkte

¹⁾ Der kleine Kreis an der Stelle M_m fehlt in der Figur.

²⁾ In der ersten Bearbeitung tragen die Gruppen $\mathfrak{B}_h^{11}$, $\mathfrak{B}_h^{12}$, $\mathfrak{B}_h^{13}$ die Nummern 13, 11, 12.

O , M_m , F_m , G_m in Betracht. Von ihnen haben O und M_m , ebenso F_m und G_m gleiche Lage zur Achsengesamtheit; wir brauchen daher nur O und G_m als erzeugende Inversionszentra zu benutzen. Ist O das Inversionszentrum, so haben wir für alle drei Achsenrichtungen den Satz d) zu benutzen, ist es G_m , die Sätze b) und d). Wir finden so die beiden Gruppen (Fig. 159 und 160)

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_h^{15} &= \{\mathfrak{B}^4, \mathfrak{S}; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_x), \mathfrak{S}_\nu(\tau_y) \\ \mathfrak{B}_h^{16} &= \{\mathfrak{B}^4, \mathfrak{S}_g; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\beta(\tau_y + \tau_x), \mathfrak{S}_\nu(\tau_x).\end{aligned}$$

§ 11. Die Gruppen der Symmetrie V^h mit dem Gitter Γ_v' . Die hier abzuleitenden Gruppen entstehen aus $\mathfrak{B}^5$ und $\mathfrak{B}^6$. Diese

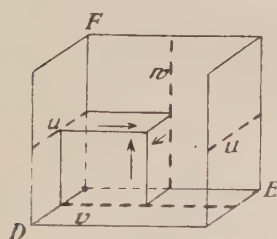


Fig. 159

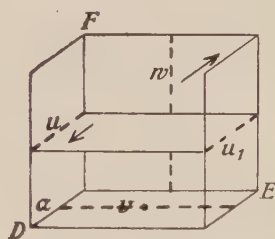


Fig. 160

beiden Gruppen haben wir in § 7 durch Zentrierung aus $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}^1$ erhalten. Davon können wir für die Bestimmung der sich einstellenden spiegelnden Ebenen Nutzen ziehen. Als spiegelnde Ebenen müssen nach Art und Lage jedenfalls zunächst die nämlichen auftreten, wie bei den Gruppen $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}^1$, da ja die Achsen von $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}^1$ auch den Gruppen $\mathfrak{B}^5$ und $\mathfrak{B}^6$ zukommen. Die Gesamtheit der spiegelnden Ebenen erfährt jedoch einen Zuwachs. Das Gitter Γ_v' hat für α und β als Grundfläche den Charakter des Gitters Γ_m' in zweiter Auffassung, und es folgen daher die spiegelnden Ebenen der Schaaaren $\{\alpha\}$ und $\{\beta\}$ in den Abständen $\frac{1}{2}\tau_y$ und $\frac{1}{2}\tau_x$ aufeinander in der Weise, wie es in § 2 angegeben ist; es wechseln also für die erste Ebenenschaar die Translationen 0 und τ_x oder τ_z und $\tau_x + \tau_x$ und für die zweite 0 und τ_y oder τ_z und $\tau_x + \tau_y$ miteinander ab. Eine weitere Besonderheit, die das Gitter Γ_v'

bedingt, ist die, daß einige aus $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}^1$ erzeugte Gruppen identisch werden; für das Gitter Γ_v' sind nämlich wegen der Translationen $2\tau'$ und $2\tau''$

O und G_m , D_m und E_m , H_m und K_m , F_m und M_m

gleichwertige Punkte und führen daher je zu derselben Gruppe. Nun erhielten wir in § 10 aus $\mathfrak{B}^2$ je eine Gruppe mit O , M_m , D_m und H_m als Inversionszentren. Wir hatten ferner gesehen, daß M_m und G_m gleichwertige Punkte für $\mathfrak{B}^2$ waren; hier sind es O und G_m , und damit sind auch O und M_m gleichwertige Punkte. Ferner hat E_m zur Achsengesamtheit die gleiche geometrische Lage, wie H_m , und so sind, da E_m und D_m gleich-

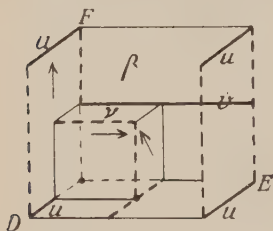


Fig. 161

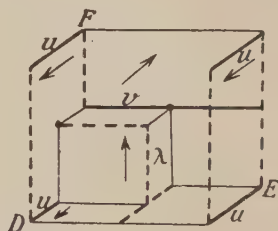


Fig. 162

wertig sind, auch D_m und H_m gleichwertige Punkte. Wir gelangen also nur zu zwei aus $\mathfrak{B}^5$ erzeugbaren Gruppen; sie sind (Fig. 161 und 162)

$$\mathfrak{B}_h^{17} = \{\mathfrak{B}^5, \mathfrak{I}; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_z), \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\nu$$

$$\mathfrak{B}_h^{18} = \{\mathfrak{B}^5, \mathfrak{I}_h; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_z), \mathfrak{S}_\gamma(\tau_x)^1.$$

Aus $\mathfrak{B}^1$ erhielten wir je eine Gruppe mittels der Inversionen $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}_m$, $\mathfrak{I}_f$, $\mathfrak{I}_g$. Für die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ sind (Fig. 144a, S. 319) die Punkte O und G_m , ebenso F_m und M_m gleichwertig, und so lassen diese vier Inversionen aus $\mathfrak{B}^6$ nur zwei verschiedene Gruppen entstehen; wir erzeugen sie mit $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_f$. Das Tripel spiegelnder Ebenen ist zunächst wieder das gleiche, wie für $\mathfrak{B}^1$; mit der Maßgabe, daß sich gemäß § 2 wieder

¹⁾ In $\mathfrak{B}_h^{18}$ tritt auch die Spiegelung $\mathfrak{S}_\lambda$ auf.

die oben genannten weiteren Ebenen einstellen. So erhalten wir die Gruppen (Fig. 163 und 164)¹⁾

$$\mathfrak{B}_h^{19} = \{\mathfrak{B}^6, \mathfrak{I}; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\gamma$$

$$\mathfrak{B}_h^{20} = \{\mathfrak{B}^6, \mathfrak{I}_f; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x), \mathfrak{S}_\beta(\tau_x), \mathfrak{S}_\gamma.$$

Die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ ist aber für die w -Achsen anders gebaut, als für die u - und v -Achsen; wir haben daher auch noch die Inversionen $\mathfrak{I}_d$ und $\mathfrak{I}_h$ gegen D_m und H_m in Betracht zu

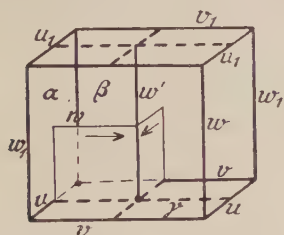


Fig. 163

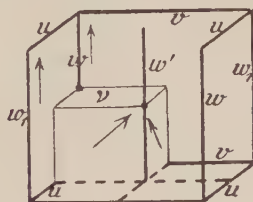


Fig. 164

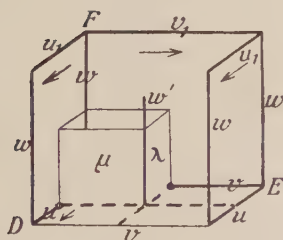


Fig. 165

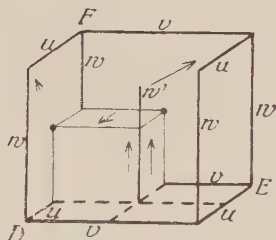


Fig. 166

ziehen. Mit ihnen erhalten wir ebenfalls je eine neue Gruppe. Die Inversion $\mathfrak{I}_d$ bedingt unmittelbar die Ebene μ als reine Symmetrieebene und gemäß Satz c) ist auch λ eine Symmetrieebene; sonst treten nur Gleitspiegelungen auf. Wir erhalten so die Gruppen (Fig. 165 und 166)

$$\mathfrak{B}_h^{21} = \{\mathfrak{B}^6, \mathfrak{I}_d; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\lambda, \mathfrak{S}_\mu, \mathfrak{S}_\gamma(\tau_x)$$

$$\mathfrak{B}_h^{22} = \{\mathfrak{B}^6, \mathfrak{I}_h; \Gamma_v'\}; \mathfrak{S}_\lambda(\tau_x), \mathfrak{S}_\mu(\tau_x), \mathfrak{S}_\gamma(\tau_x).$$

§ 12. Die Gruppen der Symmetrie Γ^h mit den Gittern Γ_v'' und Γ_v''' . Die Gruppen $\mathfrak{B}$, die hier in Frage kommen,

¹⁾ Die durch G_m gehende Achse c von Fig. 79 heißt jetzt w' .

sind die Gruppen $\mathfrak{B}^7$, $\mathfrak{B}^8$, $\mathfrak{B}^9$. Sie sind nach allen drei Richtungen gleichartig gebaut. Wie wir in § 8 sahen, entsteht die Gruppe $\mathfrak{B}^7$ aus $\mathfrak{B}^6$ durch Weiterzentrierung; die in § 8 für $\mathfrak{B}^6$ abgeleiteten Eigenschaften gelten daher auch für die Gruppe $\mathfrak{B}^7$. Von den vier Inversionszentren O , M_m , F_m , G_m können also nur die Punkte O und M_m zu verschiedenen Gruppen führen. Tatsächlich liefern sogar auch sie dieselbe Gruppe. Die Achsenfiguren 80 (S. 182) und 144b zeigen nämlich, daß O und M_m gleiche Lage zur Achsengesamtheit haben, und so erzeugen auch

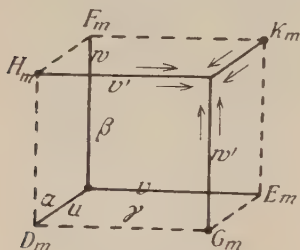


Fig. 167

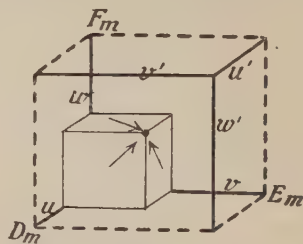


Fig. 168

diese beiden Zentra die gleiche Gruppe. Wir gelangen daher auf diesem Wege nur zu der Gruppe

$$\mathfrak{B}_h^{23} = \{\mathfrak{B}^7, \mathfrak{J}; F_v''\}; \mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\gamma.$$

Die spiegelnden Ebenen und ihre Translationen bestimmen sich nach § 2; gemäß Gl. 3) und 3a) haben sie die abwechselnden Werte

$$15) \quad 0, \tau_x \text{ oder } \tau_s; \quad 0, \tau_y \text{ oder } \tau_s; \quad 0, \tau_x \text{ oder } \tau_y$$

oder aber

$$15a) \quad \tau_h, \tau_h'; \quad \tau_k, \tau_k'; \quad \tau_g, \tau_g'.$$

Der erste Fall entspricht der Gruppe $\mathfrak{B}_h^{23}$. Die Achsenfigur knüpfen wir der Deutlichkeit halber wieder an den kleinen Oktanten von Fig. 144b an, der außer α, β, γ noch λ, μ, ν als Seitenflächen besitzt, und erhalten so die Achsenfigur 167.

Die Figur 144b gestattet aber auch eine Inversion $\mathfrak{J}_{m'}$ gegen die Mitte $M_{m'}$ von OM_m und so erhalten wir hier noch eine zweite Gruppe. Als spiegelnde Ebenen treten die drei durch

M_m' gehenden Mittelebenen λ', μ', ν' auf¹⁾; ihre Translationen sind nach Satz c) τ_h, τ_k, τ_g ; so erhalten wir die weitere Gruppe (Fig. 168)

$$\mathfrak{B}_h^{24} = \{\mathfrak{B}^7, \mathfrak{I}_m'; \Gamma_v''\}; \mathfrak{S}_{\lambda'}(\tau_h), \mathfrak{S}_{\mu'}(\tau_k), \mathfrak{S}_{\nu'}(\tau_g).$$

Die Eigenart des Gitters Γ_v'' bedingt einige wichtige Eigenschaften der vorstehenden Gruppen; sie sind für die flächenzentrierten Gitter charakteristisch. Zunächst sind in Fig. 167 nur die Punkte O, G_m, H_m, K_m Symmetriezentra, nicht aber D_m, E_m, F_m, M_m ; insbesondere stellt auch die Diagonale OM_m keine halbe Translation dar, sondern nur den vierten Teil einer Translation. Dies bedingt für Figur 168, daß der Punkt M_m'' , die Mitte von $M_m M$ kein Symmetriezentrum ist. Die Translationen $2\tau_g, 2\tau_h, 2\tau_k$ bewirken, daß von den acht Teiloktanten, in die der Oktant p der Achsenfigur 80 zerfällt, nur noch diejenigen ihre Mitte als Symmetriezentrum besitzen, die an den Oktanten 144b längs einer Kante ($G_m M_m, H_m M_m, K_m M_m$) angrenzen, die vier übrigen aber nicht. Man kann daher eine Gruppe $\mathfrak{B}_h$ auch mittels der Inversion gegen M_m'' aus $\mathfrak{B}^7$ erzeugen; beide so entstehenden Gruppen sind aber identisch, da M_m' und M_m'' gleiche Lage zur Gesamtheit aller Achsen besitzen.

Bei den Gruppen $\mathfrak{B}^8$ und $\mathfrak{B}^9$, denen das Gitter Γ_v''' zukommt, ist OM_m , sowie auch $F_m G_m$ je eine halbe Translation; deshalb liefern die Inversionen an O und M_m , sowie auch an F_m und G_m dieselbe Gruppe. Wir haben also nur die Inversionen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_f$ oder $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_g$ zur Erzeugung neuer Gruppen zu verwenden.

Die Gruppe, die aus $\mathfrak{B}^8$ mittels der Inversion $\mathfrak{I}$ entsteht, enthält α, β, γ als Symmetrieebenen; sie ist

$$\mathfrak{B}_h^{25} = \{\mathfrak{B}^8, \mathfrak{I}; \Gamma_v'''\}; \mathfrak{S}_{\alpha}, \mathfrak{S}_{\beta}, \mathfrak{S}_{\gamma}.$$

Die spiegelnden Ebenen und ihre abwechselnden Translationen sind aus § 2, Gl. 4) und 4a) zu entnehmen; sie haben die Werte

$$16) \quad 0, \tau_x + \tau_s; \quad 0, \tau_y + \tau_s; \quad 0, \tau_x + \tau_y$$

¹⁾ Vgl. Fig. 132, S. 309.

oder aber

16a)

$$\tau_x, \tau_z; \tau_y, \tau_z; \tau_x, \tau_y.$$

Danach sind die Achsenfiguren zu zeichnen. Das erste trifft für $\mathfrak{B}_h^{25}$ zu (Fig. 169), das zweite für die jetzt abzuleitende Gruppe $\mathfrak{B}_h^{26}$. Diese Gruppe ergibt sich mit $\mathfrak{I}_f$ als erzeugender Inversion; gemäß Satz c) und a) stellen sich für sie die Operationen $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$, $\mathfrak{S}_\beta(\tau_x)$, $\mathfrak{S}_\gamma$ ein. Wir erhalten also (Fig. 170)

$$\mathfrak{B}_h^{26} = \{\mathfrak{B}^8, \mathfrak{I}_f; \Gamma_v'''\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x), \mathfrak{S}_\beta(\tau_x), \mathfrak{S}_\gamma.$$

Die Gruppe $\mathfrak{B}^9$ leiteten wir aus $\mathfrak{B}^4$ durch Körperzentrierung ab. Für $\mathfrak{B}^4$ ergaben sich verschiedene Gruppen nur mittels

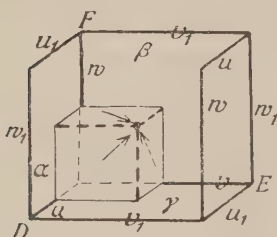


Fig. 169

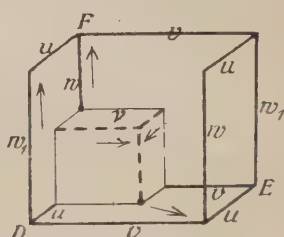


Fig. 170

der Inversionen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_g$; beide Inversionen bleiben auch für die Gruppe $\mathfrak{B}^9$ und ihre Achsenfigur (Fig. 145, S. 321) ungleichwertig. Wir erhalten daher aus $\mathfrak{B}^9$ zwei neue Gruppen. Als spiegelnde Ebenen treten zunächst wieder diejenigen auf, die den aus $\mathfrak{B}^4$ abgeleiteten Gruppen $\mathfrak{B}_h^{15}$ und $\mathfrak{B}_h^{16}$ zukommen; außerdem auch diejenigen, die sich gemäß § 2 einstellen, und die aus den oben genannten Werten der Translationen zu sehen sind; bei der ersten Gruppe sind es die Operationen $\mathfrak{S}_\alpha(\tau_x)$, $\mathfrak{S}_\beta(\tau_y)$, $\mathfrak{S}_\gamma(\tau_x)$, bei der zweiten $\mathfrak{S}_\lambda(\tau_x + \tau_z)$, $\mathfrak{S}_\mu$, $\mathfrak{S}_\gamma(\tau_y)$. Wir erhalten so die Gruppen

$$\mathfrak{B}_h^{27} = \{\mathfrak{B}^9, \mathfrak{I}; \Gamma_v'''\}; \mathfrak{S}_\alpha(\tau_x), \mathfrak{S}_\beta(\tau_y), \mathfrak{S}_\gamma(\tau_x)^1$$

$$\mathfrak{B}_h^{28} = \{\mathfrak{B}^9, \mathfrak{I}_g; \Gamma_v'''\}; \mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\mu, \mathfrak{S}_\gamma(\tau_y).$$

¹⁾ Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen sei bemerkt, daß der Gruppe $\mathfrak{B}_h^{27}$ auch die Operation $\mathfrak{S}_\mu(\tau_x)$ angehört, die in $\mathfrak{B}_h^{15}$ auftritt.

mit den Achsenfiguren 171¹⁾ und 172. Wir schließen mit dem Satz:

7. Es gibt 28 Raumgruppen von der Symmetrie V^h ; sechszehn mit dem Gitter Γ_v , sechs mit Γ_v' , zwei mit Γ_v'' und vier mit Γ_v''' .

§ 13. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte. Der Gruppe C_{2v} entsprechen nach Kap. VII, § 3 die vier Koordinatentripel

$$xyz, \bar{x}\bar{y}z, x\bar{y}z, \bar{x}yz.$$

Die ersten beiden sind die Tripel für die Gruppe C_2 , die beiden andern entstehen aus ihnen mittels der Operation $\mathfrak{S}_v'$, die wir in § 3 durch $\mathfrak{S}_\alpha'$ ersetzt haben.

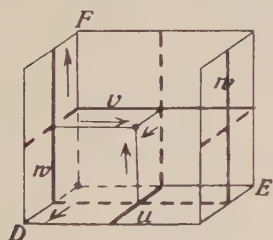


Fig. 171¹⁾

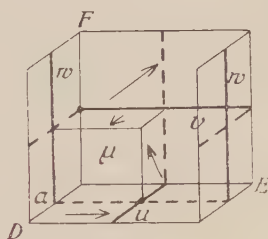


Fig. 172

Die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ spalten wir für die hier nötige Behandlung in mehrere verschiedene Arten; wir betrachten zunächst diejenigen, die mittels einer Operation $\mathfrak{S}_\alpha(\tau)$ entstehen, also alle bis auf $\mathfrak{C}_{2v}^8, \mathfrak{C}_{2v}^9, \mathfrak{C}_{2v}^{10}, \mathfrak{C}_{2v}^{11}$. Für sie haben wir, wie im vorigen Kapitel, zwei wesentlich verschiedene Fälle in Betracht zu ziehen. Den ersten bilden diejenigen Gruppen, die aus der Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ oder $\mathfrak{C}_2^3$ entstehen. Die ersten beiden Tripel von $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^3$ stimmen mit denen von C_2 überein, und es ist daher die Wirkung der erzeugenden Operation $\mathfrak{S}_\alpha(\tau)$ auf diese Tripel zu ermitteln. Sie besteht zunächst in der Wirkung von $\mathfrak{S}_\alpha$ und diese ist die gleiche, wie bei der Punktgruppe C_{2v} ; zu ihr tritt dann noch τ als additive Zusatztranslation hinzu. Geht die Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}$ aus der Gruppe $\mathfrak{C}_2^2$ hervor, so hat ihr zweites Tripel den Wert

$$\bar{x}\bar{y}z + \tau_z,$$

¹⁾ In Figur 171 fehlt in der Ebene β der Pfeil der Richtung τ_y .

und es ist daher die Wirkung von $\mathfrak{S}_\alpha(\tau)$ auf dieses Tripel zu bestimmen. Wie in Kap. XII, § 12 bestimmen wir zunächst die Wirkung von $\mathfrak{S}_\alpha$ selbst. Allgemein bewirkt die Spiegelung $\mathfrak{S}_\alpha$ den Übergang von y in $\bar{y}$ (Kap. VII, § 1), während x und z unverändert bleiben; diese Wirkung erfährt auch die vektorielle Zusatztranslation, und es geht also

$$\bar{x}\bar{y}z + \tau_z \text{ in } \bar{x}y\bar{z} + \tau_z$$

über. Endlich kommt, wenn $\mathfrak{S}_\alpha(\tau)$ an die Stelle von $\mathfrak{S}_\alpha$ tritt, wie oben, noch die Translation τ additiv hinzu. Damit ist die Bestimmung der Koordinatentripel für die betrachteten Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}$ erledigt. Wir wollen uns aber von nun an — im Interesse der Kürze — auf die Angabe der zusätzlichen Translationen beschränken. Für diese Zusatzwerte erhalten wir dann, dem vorstehenden gemäß, zunächst für die Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}^1$ bis $\mathfrak{G}_{2v}^7$ die Werte:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{G}_{2v}^1: & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathfrak{G}_{2v}^2: & 0 \quad \tau_z \quad 0 \quad \tau_z \\ \mathfrak{G}_{2v}^3: & 0 \quad 0 \quad \tau_z \quad \tau_z \quad \mathfrak{G}_{2v}^4: & 0 \quad 0 \quad \tau_x \quad \tau_x \\ \mathfrak{G}_{2v}^5: & 0 \quad \tau_z \quad \tau_x \quad \tau_x + \tau_z \\ \mathfrak{G}_{2v}^6: & 0 \quad 0 \quad \tau_x + \tau_z \quad \tau_x + \tau_z \\ \mathfrak{G}_{2v}^7: & 0 \quad \tau_z \quad \tau_x + \tau_z \quad \tau_x. \end{array}$$

Wir gehen zur Erörterung der oben ausgeschlossenen Gruppen über. Die Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}^8, \mathfrak{G}_{2v}^9, \mathfrak{G}_{2v}^{10}$ sind mittels gewisser Operationen $\mathfrak{S}_\lambda(\tau)$ gebildet. Sie lassen sich nach den Gleichungen d) von § 2 durch ein Produkt ersetzen, das die Operation $\mathfrak{S}_\alpha$ enthält; wir finden unmittelbar aus d)

$$17) \quad \mathfrak{S}_\lambda(\tau) = \mathfrak{S}_\alpha(\tau) \cdot \mathfrak{T}_y;$$

es tritt demnach hier nur die Änderung ein, daß zur Translation τ noch τ_y als additiver Zusatzwert hinzukommt. Damit ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt. Ebenso erledigt sich die Gruppe $\mathfrak{G}_{2v}^{19}$. Bei ihr ist $\mathfrak{S}_\lambda'(\tau_h)$ die erzeugende Operation; es ist aber

$$\begin{aligned} 18) \quad \mathfrak{S}_\lambda' &= \mathfrak{S}_\alpha \cdot \{ \frac{1}{2} \tau_y \} \text{ und} \\ \mathfrak{S}_\lambda'(\tau_h) &= \mathfrak{S}_\alpha \cdot \{ \frac{1}{2} \tau_y + \frac{1}{2} \tau_x + \frac{1}{2} \tau_z \} \end{aligned}$$

und somit hat die durch $\mathfrak{S}_\lambda'(\tau_h)$ bedingte Zusatztranslation den Wert

$$^{1/2}(\tau_x + \tau_y + \tau_z) = \tau_d.$$

Wir erhalten also für die noch fehlenden Gruppen die folgenden Zusatzwerte

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{S}_{2v^8}: & 0 & 0 & \tau_x + \tau_y \quad \tau_x + \tau_y \\ \mathfrak{S}_{2v^9}: & 0 & \tau_z & \tau_x + \tau_y \quad 2\tau_d \\ \mathfrak{S}_{2v^{10}}: & 0 & 0 & 2\tau_d \quad 2\tau_d \\ \mathfrak{S}_{2v^{11}}, \mathfrak{S}_{2v^{14}}, \mathfrak{S}_{2v^{18}}, \mathfrak{S}_{2v^{20}}: & 0 & 0 & 0 \quad 0 \\ \mathfrak{S}_{2v^{12}}: & 0 & \tau_z & 0 \quad \tau_z \\ \mathfrak{S}_{2v^{13}}, \mathfrak{S}_{2v^{15}}, \mathfrak{S}_{2v^{21}}: & 0 & 0 & \tau_z \quad \tau_z \\ \mathfrak{S}_{2v^{16}}, \mathfrak{S}_{2v^{22}}: & 0 & 0 & \tau_x \quad \tau_x \\ \mathfrak{S}_{2v^{17}}: & 0 & 0 & \tau_x + \tau_z \quad \tau_x + \tau_z \\ \mathfrak{S}_{2v^{19}}: & 0 & 0 & \tau_d \quad \tau_d. \end{array}$$

Bei den Gruppen $\mathfrak{B}$ lassen wir den Koordinatenanfangspunkt stets in den Punkt O fallen. Die Koordinatentripel bestimmen sich dann einfach an der Hand der folgenden Überlegungen.

Die Gruppe V enthält die Operationen

$$1, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}';$$

jede Gruppe $\mathfrak{B}$ enthält analog vier Operationen

$$1, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B},$$

die Drehungen oder Schraubungen sein können. Für diejenigen Achsen u, v, w , die durch den Punkt O gehen, erledigt sich die Zusatztranslation in der üblichen Weise; ist sie z. B. eine Schraubung $\mathfrak{U}(\tau)$, so tritt τ als Zusatzwert des Koordinatentripels auf. Geht aber die Achse u nicht durch O , so haben wir die Operation $\mathfrak{U}$ gemäß Kap. IV, § 1 an den Punkt O zu verlegen; das soll heißen, daß wir sie durch eine analoge Operation $\mathfrak{U}_1$ ersetzen, die durch O geht, und eine Translation, die gleich dem doppelten Wert des Abstandes von u und u_1 ist. Es genügt dies an einem Beispiel zu veranschaulichen. Sei in Fig. 145 (S. 321) $\mathfrak{U}'$ die Umwendung um eine durch O

gehende Achse u' ($= OD$), sei ferner $\mathfrak{U}$ die Umwendung und $\mathfrak{U}(\tau_x)$ die Umschraubung um die Achse u der Figur, so haben wir nach dieser Formel

$$19) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}'\mathfrak{I}_y \text{ und } \mathfrak{U}(\tau_x) = \mathfrak{U}'(\tau_x)\mathfrak{I}_y;$$

die Operationen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}(\tau_x)$ bedingen also die Zusatztranslationen τ_y und $\tau_x + \tau_y$. In dieser Weise ergeben sich für die Gruppen $\mathfrak{B}$ die folgenden Zusatzwerte:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^6, \mathfrak{B}^7, \mathfrak{B}^8: & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}^2, \mathfrak{B}^5: & 0 & 0 & \tau_z \\ \mathfrak{B}^3: & 0 & \tau_x + \tau_y & \tau_x + \tau_y \\ \mathfrak{B}^4: & 0 & \tau_x + \tau_z & \tau_y + \tau_x \\ \mathfrak{B}^9: & 0 & \tau_y & \tau_z \end{array}$$

Die Gruppen $\mathfrak{B}_h$ behandeln wir ähnlich wie die Gruppen $\mathfrak{B}$ selbst. Fällt die erzeugende Inversion in den Punkt O , so bewirkt sie nur den Übergang von xyz in $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ und den einer jeden beim Koordinatentripel bereits vorhandenen additiven Translation τ in $-\tau$. Fällt sie nicht in O , so wird sie durch $\mathfrak{I}$ und eine Zusatztranslation ersetzt; man hat gemäß Kap. II, Satz 7 a

$$20) \quad \begin{array}{l} \mathfrak{I}_m = \mathfrak{I}\mathfrak{I}_x\mathfrak{I}_y\mathfrak{I}_z, \mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}\mathfrak{I}_z, \mathfrak{I}_g = \mathfrak{I}\mathfrak{I}_x\mathfrak{I}_y, \\ \mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}\mathfrak{I}_x, \mathfrak{I}_h = \mathfrak{I}\mathfrak{I}_x\mathfrak{I}_z \end{array}$$

und hat von diesen Gleichungen in derselben Weise Gebrauch zu machen, wie von den Gleichungen 19), die wir soeben bei den Gruppen $\mathfrak{B}$ aufstellten. Ist also z. B. $\mathfrak{I}_f$ die erzeugende Inversion, so ist zu der Einwirkung von $\mathfrak{I}$ noch die additive Translation τ_z hinzuzufügen usw.¹⁾. Dabei soll wieder jede auftretende Zusatztranslation auf eine positive reduzierte Form gebracht werden. So ergibt sich die folgende Tabelle, in der zur Abkürzung $2\tau_d$ statt $\tau_x + \tau_y + \tau_z$ geschrieben worden ist:

¹⁾ Dieses einfache Verfahren hat die Wahl von $\mathfrak{I}$ als erzeugende Operation veranlaßt.

$\mathfrak{B}_h^1, \mathfrak{B}_h^{19}, \mathfrak{B}_h^{23}, \mathfrak{B}_h^{25}:$	0	0	0	0
	0	0	0	0
$\mathfrak{B}_h^2:$	0	0	0	0
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
$\mathfrak{B}_h^3, \mathfrak{B}_h^{20}, \mathfrak{B}_h^{26}:$	0	0	0	0
	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z
$\mathfrak{B}_h^4:$	0	0	0	0
	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$
$\mathfrak{B}_h^5, \mathfrak{B}_h^{17}:$	0	0	τ_z	τ_z
	0	0	τ_z	τ_z
$\mathfrak{B}_h^6:$	0	0	τ_z	τ_z
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$
$\mathfrak{B}_h^7:$	0	0	τ_z	τ_z
	τ_x	τ_x	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$
$\mathfrak{B}_h^8:$	0	0	τ_z	τ_z
	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$	τ_x	τ_x
$\mathfrak{B}_h^9:$	0	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	0
	0	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	0
$\mathfrak{B}_h^{10}:$	0	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	0
	$2\tau_d$	τ_z	τ_z	$2\tau_d$
$\mathfrak{B}_h^{11}:$	0	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	0
	τ_z	$2\tau_d$	$2\tau_d$	τ_z
$\mathfrak{B}_h^{12}:$	0	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	0
	$\tau_x + \tau_y$	0	0	$\tau_x + \tau_y$
$\mathfrak{B}_h^{13}:$	0	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	0
	τ_x	τ_y	τ_y	τ_x
$\mathfrak{B}_h^{14}:$	0	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_x + \tau_y$	0
	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_y + \tau_z$	$\tau_y + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$
$\mathfrak{B}_h^{15}:$	0	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_y + \tau_z$
	0	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_y + \tau_z$
$\mathfrak{B}_h^{16}:$	0	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_y + \tau_z$
	$\tau_x + \tau_y$	$\tau_y + \tau_z$	0	$\tau_x + \tau_z$
$\mathfrak{B}_h^{18}:$	0	0	τ_z	τ_z
	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$	τ_x	τ_x

$\mathfrak{B}_h^{21}:$	0	0	0	0
	τ_x	τ_x	τ_x	τ_x
$\mathfrak{B}_h^{22}:$	0	0	0	0
	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$
$\mathfrak{B}_h^{24}:$	0	0	0	0
	τ_d	τ_d	τ_d	τ_d
$\mathfrak{B}_h^{27}:$	0	τ_y	τ_z	τ_x
	0	τ_y	τ_z	τ_x
$\mathfrak{B}_h^{28}:$	0	τ_y	τ_z	τ_x
	$\tau_x + \tau_y$	τ_x	0	τ_y

Gemäß Kap. XII, Satz 12 entsprechen die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{14}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$, $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^6$, $\mathfrak{B}^7$, $\mathfrak{B}^8$, $\mathfrak{B}_h^1$, $\mathfrak{B}_h^{19}$, $\mathfrak{B}_h^{23}$, $\mathfrak{B}_h^{25}$ dem einfachen Fall der Bravaisschen Strukturen. *Die Gruppen $\mathfrak{B}_h^1$, $\mathfrak{B}_h^{19}$, $\mathfrak{B}_h^{23}$, $\mathfrak{B}_h^{25}$ stellen zugleich die Gesamtsymmetrie der rhombischen Gitter Γ_v , Γ_v' , Γ_v'' , Γ_v''' dar.*

§ 14. Die Eigensymmetrie der Bausteine. Für die Tabellen, die für die einzelnen Gruppen die Lage der symmetrischen Bausteine und ihre Eigensymmetrie G_μ enthalten, legen wir uns, zumal auch wegen der großen Zahl der rhombischen Gruppen, eine gewisse Beschränkung auf. Wir können davon absehen, alles, was die Achsenfiguren unmittelbar in Evidenz setzen, in die Tabellen aufzunehmen. Enthält eine rhombische Gruppe eine Drehungsachse oder eine Symmetrieebene, und lassen wir den Baustein μ an irgendeine Stelle dieser Achse oder Ebene fallen, so erhält er dadurch die Eigensymmetrie C_2 oder S_1 ; ebenso erhält er die Eigensymmetrie S_2 , wenn er in ein Symmetriezentrum fällt. *Diese Lagen nehmen wir in die Tabellen nicht auf*, es bleiben somit nur die Stellen zu erledigen, in denen eine der Eigensymmetrien C_2^h , C_2^v , V oder V^h erscheint. *Wir beschränken uns dabei auf den durch die Kanten OD, OE, OF gebildeten Oktanten p*; die für ihn geltenden Verhältnisse wiederholen sich zumeist in gleicher Weise bei den übrigen Oktanten. Im Oktanten p sollen aber *sämtliche* Punkte mit den obigen Eigensymmetrien genannt werden; jeder Punkt wird naturgemäß mit der *höchsten* ihm zukommenden

Eigensymmetrie erwähnt. Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein (Fig. 173): Die Seitenflächen von p , die den Flächen α , β , γ gegenüberliegen, sollen α' , β' , γ' heißen; die auf ihnen liegenden Gegenpunkte von G_m , H_m , K_m seien G'_m , H'_m , K'_m ; endlich seien D'_m , D''_m , D'''_m und E'_m , E''_m , E'''_m die in die Figur 173 eingetragenen Gegenpunkte von D_m und E_m .

Die Achse der Symmetriegruppe C_2^h braucht übrigens keineswegs vertikal zu liegen; sie kann ebensowohl eine Achse u , wie eine Achse v sein. Dasselbe gilt für die Achse der Symmetrie C_2^v .

In den Achsenfiguren sind die gleichwertigen Geraden mit demselben Buchstaben bezeichnet. Für die Punkte ist dies Verfahren nicht möglich. Da aber die Kenntnis der gleichwertigen Punkte von Wichtigkeit ist, weil alle gleichwertigen Punkte einer Struktur mit identischen Bausteinen zu besetzen sind, ist die Gleichwertigkeit der Punkte in die Tabellen aufgenommen und durch ein Gleichheitszeichen ausgedrückt werden. So bestehen z. B. für die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ die Beziehungen

$$O = G, F = M, D = E, H = K,$$

für die Gruppe $\mathfrak{B}^7$ haben wir die Beziehungen

$$O = G = H = K, D = E = F = M$$

usw. usw. In der zusammenstellenden Schlußtablelle, die wesentlich zur Ermittlung von Gruppen mit Bausteinen bestimmter Eigensymmetrien dienen soll, durfte die Angabe der Gleichwertigkeit unterbleiben. Ungleichwertige Geraden können übrigens für eine Gruppe höherer Symmetrie gleichwertig werden. Inwieweit die für eine Gruppe $\mathfrak{B}$ ungleichwertigen Achsen und Punkte, die in die Tabellen nicht eingehen, für eine Gruppe $\mathfrak{B}_h$ gleichwertig werden, ist aus der erzeugenden Operation leicht zu erschließen.

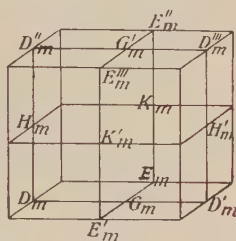


Fig. 173

Tabelle A. Gruppen $\mathfrak{C}_2^v$

Gruppen $\mathfrak{C}_2^v$	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{C}_{2v}^1$	C_2^v	a, b, c, d
$\mathfrak{C}_{2v}^{11}, \mathfrak{C}_{2v}^{14}, \mathfrak{C}_{2v}^{18}, \mathfrak{C}_{2v}^{30}$	C_2^v	a, b

Tabelle B. Gruppen $\mathfrak{B}$

Gruppe $\mathfrak{B}$	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppe $\mathfrak{B}$	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{B}^1$	V	$O \text{ bis } M$	$\mathfrak{B}^7$	V	$O = G = H = K, M_m$ $D = E = F = M, M_m$
$\mathfrak{B}^6$	V	$O = G, F = M$ $D = E, H = K$	$\mathfrak{B}^8$	V	$O = M, F = G$ $D = K, E = H$

Tabelle C. Gruppen $\mathfrak{B}_h$

Gruppe $\mathfrak{B}_h$	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppe $\mathfrak{B}_h$	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{B}_h^1$	C_2^v V^h	alle u, v, w $O \text{ bis } M$	$\mathfrak{B}_h^{20}$	C_2^h V	$F_m = G', H' = K', M_m$ $O = G = F = M$ $D = E = H = K$
$\mathfrak{B}_h^3$	V	$O = M, D = K$ $E = H, F = G$	$\mathfrak{B}_h^{21}$	C_2^h	$D_m = D_m', D_m'' = D_m'''$ $E_m = E_m', E_m'' = E_m'''$ w'
$\mathfrak{B}_h^5$	C_2^h V	F_m, G', H', K' $O = F, D = H$ $E = K, G = M$	$\mathfrak{B}_h^{22}$	C_2^v V	$O = D = E = G$ $F = H = K = M$
$\mathfrak{B}_h^4$	V	$O = G, D = E$ $H = K, F = M$			

Gruppe $\mathfrak{B}_h$	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppe $\mathfrak{B}_h$	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{B}_h^{5^5}$	C_2^h C_2^v	$O = F, D = H$ $E = K, G = M$ v, v_1	$\mathfrak{B}_h^{23}$	C_2^h C_2^v V V^h	$G_m = G_{m'}, H_m = H_{m'},$ $K_m = K_{m'}$ u, v, w M_m $O = G = H = K$ $D = E = F = M$
$\mathfrak{B}_h^7$	C_2^h	$D_m, D_{m'}, D_{m''}, D_{m'''}$			
$\mathfrak{B}_h^9$	C_2^h	$O = G, D = E$ $F = M, H = K$	$\mathfrak{B}_h^{24}$	V	$O = G = H = K = M_m$ $D = E = F = M$
$\mathfrak{B}_h^{11}$	C_2^h	F_m, G', H', K'			
$\mathfrak{B}_h^{12}$	C_2^v	w, w_1	$\mathfrak{B}_h^{25}$	C_2^v V^h	alle u, v, w $O = M, D = K$ $E = H, F = G$
$\mathfrak{B}_h^{17}$	C_2^h C_2^v	$O = F, D = H$ $E = K, G = M$ v	$\mathfrak{B}_h^{26}$	C_2^h V	$F_m = G', H' = K'$ $O = F = G = M$ $D = E = H = K$
$\mathfrak{B}_h^{19}$	C_2^h C_2^v V^h	$G_m, G_{m'}$ u, v, w, u_1, v_1, w_1 $O = G, D = E$ $F = M, H = K$	$\mathfrak{B}_h^{28}$	C_2^h C_2^v	$G_m, G_{m'}$ $F_m = H', G' = K'$ w

Auf Grund der so gewonnenen Tabellen stellen wir wiederum eine zweite Tabelle zusammen; wie in Kap. XIII soll sie zeigen, in welchen Gruppen Punktlagen auftreten, denen eine der vier Gruppen C_2^h, C_2^v, V, V^h als Eigensymmetrie G_μ zukommt. Wir beschränken uns aber auf die Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_h$, da die Tabelle A die Frage für die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ bereits beantwortet. Auch die Zähligkeit der Eigensymmetrie, sowie das Gitter einer jeden Gruppe ist in die Tabelle aufgenommen worden.

Tabelle D. Rhombischer Typus

Gruppe G_μ	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_2^h	4	$\mathfrak{B}_h^3, \mathfrak{B}_h^{11}$	Γ_v	F_m, G', H', K'
		$\mathfrak{B}_h^5, \mathfrak{B}_h^9$	Γ_v	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^7$	Γ_v	D_m, D_m', D_m'', D_m'''
		$\mathfrak{B}_h^{17}$	$\Gamma_{v'}$	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^{19}$	$\Gamma_{v'}$	G_m, G_m'
		$\mathfrak{B}_h^{20}$	$\Gamma_{v'}$	F_m, G', H', K', M_m
		$\mathfrak{B}_h^{21}$	$\Gamma_{v'}$	D_m, D_m', D_m'', D_m''' E_m, E_m', E_m'', E_m'''
		$\mathfrak{B}_h^{23}$	$\Gamma_{v''}$	G_m, H_m, K_m G_m', H_m', K_m'
		$\mathfrak{B}_h^{26}$	$\Gamma_{v'''}$	F_m, G', H', K'
		$\mathfrak{B}_h^{28}$	$\Gamma_{v'''}$	G_m, G_m' F_m, G', H', K'
C_2^v	4	$\mathfrak{B}_h^1$	Γ_v	alle u, v, w
		$\mathfrak{B}_h^5$	Γ_v	v, v_1
		$\mathfrak{B}_h^{12}$	Γ_v	w, w_1
		$\mathfrak{B}_h^{17}$	$\Gamma_{v'}$	v
		$\mathfrak{B}_h^{19}$	$\Gamma_{v'}$	u, v, w, u_1, v_1, w_1
		$\mathfrak{B}_h^{21}$	$\Gamma_{v'}$	w'
		$\mathfrak{B}_h^{23}$	$\Gamma_{v''}$	u, v, w
		$\mathfrak{B}_h^{25}$	$\Gamma_{v'''}$	alle u, v, w
		$\mathfrak{B}_h^{28}$	$\Gamma_{v'''}$	w

Gruppe G_μ	Zählig- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
V	4	$\mathfrak{B}^1$	Γ_v	O bis M
		$\mathfrak{B}^6$	$\Gamma_{v'}$	O bis M
		$\mathfrak{B}^7$	$\Gamma_{v''}$	O bis M, M_m
		$\mathfrak{B}^8$	$\Gamma_{v'''}$	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^2, \mathfrak{B}_h^3, \mathfrak{B}_h^4$	Γ_v	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^{20}, \mathfrak{B}_h^{21}, \mathfrak{B}_h^{22}$	$\Gamma_{v'}$	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^{23}$	$\Gamma_{v''}$	M_m
		$\mathfrak{B}_h^{24}$	$\Gamma_{v''}$	O bis M, M_m
		$\mathfrak{B}_h^{26}$	$\Gamma_{v'''}$	O bis M
V^h	8	$\mathfrak{B}_h^1$	Γ_v	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^{19}$	$\Gamma_{v'}$	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^{23}$	$\Gamma_{v''}$	O bis M
		$\mathfrak{B}_h^{25}$	$\Gamma_{v'''}$	O bis M

Für die *kritischen Lagen* der Bausteine folgern wir in erster Linie, wie im vorigen Kapitel, daß die Gesamtsymmetrie der Struktur *niemals die Symmetrie V^h überschreiten kann*; einen höheren Symmetriecharakter besitzen die rhombischen Gitter nicht. Weitere Folgerungen stützen wir auf die gegenseitigen Beziehungen der isomorphen Punktgruppen C_2^v, V, V^h zueinander. Soll die Gruppe C_2^v in die Gruppe V^h übergehen, so muß zu ihr ein Symmetriezentrum oder eine zweizählige horizontale Achse oder eine horizontale Symmetrieebene treten; analog wird eine mit einer Gruppe C_{2v} aufgebaute Struktur Σ nur dann die Übersymmetrie vom Charakter V^h erwerben, wenn dem Baustein μ gerade eines der eben genannten Symmetrieelemente zukommt. Ebenso eine mit einer Gruppe $\mathfrak{B}$ gewonnene Struktur nur dann, wenn ihr entweder ein Symmetriezentrum

oder eine Symmetrieebene der Richtung α, β, γ eigen ist. Dies ist eine evidente Folge des allgemeinen Isomorphiegesetzes; die Frage ist nur, welches die besonderen Lagen von μ sind, die auch *tatsächlich* der Struktur Σ die Übersymmetrie einer Gruppe $\mathfrak{B}_h$ aufprägen. Möge z. B. eine mittels der Gruppe $\mathfrak{B}^1$ entstandene Struktur durch die Art und Lage von μ Übersymmetrie erworben haben. Diese Übersymmetrie kann dann jedenfalls nur einer solchen Gruppe $\mathfrak{B}_h$ entsprechen, die $\mathfrak{B}^1$ als Untergruppe besitzt und sich also aus $\mathfrak{B}^1$ erzeugen läßt; das sind die Gruppen $\mathfrak{B}_h^1, \mathfrak{B}_h^2, \mathfrak{B}_h^3, \mathfrak{B}_h^4$. Außerdem muß diese Gruppe auch tatsächlich Punktlagen besitzen, denen die dem Baustein anhaftende Symmetrie S_2 oder S_1 zukommt. Diese Stellen sind aber aus den Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{B}_h^1, \mathfrak{B}_h^2, \mathfrak{B}_h^3, \mathfrak{B}_h^4$ unmittelbar abzulesen; und damit *sind die kritischen Lagen für die Gruppe $\mathfrak{B}_1$ gefunden*. Beispielsweise enthält die Figur 148 der Gruppe $\mathfrak{B}_h^3$ die Symmetrieebene ν . Wird also ein Punkt von ν als Bausteinlage für eine mittels $\mathfrak{B}_1$ abzuleitende Struktur benutzt, und kommt dem Baustein die Ebene ν als Symmetrieebene zu, so wird die Gesamtsymmetrie der entstehenden Struktur *doch die der Gruppe $\mathfrak{B}_h^3$ sein*. Die Operation $\mathfrak{C}_\nu$ führt den Baustein zunächst in sich über, und alle weiteren Lagen ergeben sich so, daß er nur noch den Operationen von $\mathfrak{B}_1$ unterworfen wird. Zugleich zerfällt wieder die Gesamtsymmetrie der Struktur Σ in zwei Teile (Kap. XII, § 11), so daß der eine, nämlich S_1 , durch den Baustein selbst realisiert ist, und nur der andere, hier also V , durch die Anordnung, d. h. also durch die Gruppe $\mathfrak{B}_1$.

Ähnlich, wenn auch nicht ganz so einfach, liegen die Dinge bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{2\nu}$. Wir knüpfen hier an die Gruppe $\mathfrak{C}_{2\nu}^2$ an. Wir erwähnten bereits, daß die aus $\mathfrak{C}_{2\nu}^2$ entspringende Struktur Σ auf drei Arten die Symmetrie der Gruppe V^h erwerben kann; durch Hinzufügung einer horizontalen Symmetrieebene, einer horizontalen zweizähligen Achse oder eines Symmetriezentrums. Insbesondere läßt die Hinzufügung einer horizontalen Symmetrieebene aus $\mathfrak{C}_{2\nu}^2$, wie man leicht ermittelt, die Gruppe $\mathfrak{B}_h^5$ entstehen; sie ist nämlich die einzige, die das Gitter I'_ν besitzt, und deren vertikale Achsen sämtlich Schrauben-

achsen sind, wie es der in $\mathfrak{C}_{2v}^2$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{C}_2^2$ entspricht. Die Ebene v kann an sich eine beliebige Lage zu den Achsen von $\mathfrak{C}_2^2$ haben. Ein mit der horizontalen Symmetrie S_1 begabter Baustein befindet sich daher an *jeder* Stelle in einer kritischen Lage; mittels der Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^2$ geht aus ihm notwendig eine Struktur hervor, der die Symmetrie der Gruppe $\mathfrak{B}_h^5$ innewohnt. Es ist auch wieder klar, daß der Teil S_1 dieser Symmetrie auf der Eigensymmetrie von μ beruht und nur der andere Teil, also C_2^v , auf der Anordnung.

Besitzt der Baustein μ eine horizontale Symmetrieachse, also die Symmetrie C_2 , und soll eine aus $\mathfrak{C}_{2v}^2$ entstandene Struktur doch einer Gruppe $\mathfrak{B}_h$ entsprechen, so kann es wiederum nur eine Gruppe sein, in die $\mathfrak{C}_{2v}^2$ als Untergruppe eingeht, die das Gitter Γ_v und überdies horizontale Drehungsachsen besitzt. Wie die Achsenfiguren lehren, kommt wiederum nur die Gruppe $\mathfrak{B}_h^5$ in Betracht; nur sie ist eine Gruppe vom Gitter Γ_v , bei der den spiegelnden Ebenen, wie nötig, die Operationen $\mathfrak{S}_v$ und $\mathfrak{S}_v(\tau_2)$ zukommen. Ihre Achsenfigur zeigt auch weiter, welche Lage die horizontale Achse von μ haben muß, damit die Struktur tatsächlich die Übersymmetrie V^h annimmt; sie muß entweder in eine u -Achse oder in eine v -Achse der Figur 149 fallen.

Wir behandeln endlich einen Fall, in dem μ zentrisch symmetrisch ist; er unterscheidet sich insofern etwas von den früheren, als einem Symmetriezentrum keine ausgezeichnete Richtung anhaftet, wie es bisher der Fall war. Wir knüpfen wiederum an die Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^2$ an; die mittels $\mathfrak{C}_{2v}^2$ entstehende Struktur Σ soll also jetzt durch die Lage des zentrisch symmetrischen Bausteins die Übersymmetrie einer Gruppe $\mathfrak{B}_h$ erwerben. Hier argumentieren wir zweckmäßig folgendermaßen. Welche Gruppe $\mathfrak{B}_h$ dies auch sei, so muß doch notwendig eine Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^2$ in ihr als Untergruppe enthalten sein; die Lage P von μ muß daher offenbar eine solche sein, daß die Inversion gegen P eine Deckoperation für diese Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^2$ ist, also sowohl für ihre Achsen, wie für ihre Symmetrieebenen (Fig. 116, S. 301). Solche Lagen gibt es verschiedene; beispielsweise stellt der Punkt D_m , der in die Mitte zwischen zwei Achsen und in

die Symmetrieebene α von $\mathfrak{C}_{2v}^2$ fällt, eine geeignete Lage dar¹⁾. Wir haben nur noch die dadurch bestimmte Gruppe $\mathfrak{B}_h$ zu ermitteln, und wollen es in diesem Fall einmal direkt tun. Wir gehen also von Figur 116 aus und erkennen, daß ein in sie eingefügtes Symmetriezentrum D_m zunächst mit α die Achse v

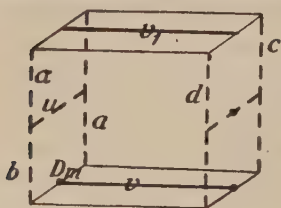


Fig. 174

durch D_m bedingt (Fig. 174), ferner bedingt v mit der Achse a (nach § 6, Satz c) eine Schraubenachse u in der Ebene α , und wir erkennen daraus, daß sich die Achsenfigur 153 der Gruppe $\mathfrak{B}_h^9$ einstellt, freilich mit *Änderung der Achsenrichtungen*, und zwar in der Weise, daß die Ebene α

in die horizontale Ebene γ übergeht²⁾. Übrigens ist klar, daß wir das Auftreten der Gruppe $\mathfrak{B}_h^9$, genau wie bei den früheren Beispielen, auch durch Prüfung der Achsenfiguren erkennen konnten, wenn wir von vornherein dem eben genannten Umstand Rechnung trugen.

Diese Beispiele werden die allgemeine Methode, nach der man sich zu richten hat, ausreichend erkennen lassen.

Kap. XV. Die Raumgruppen vom rhomboedrischen Typus

§ 1. Vorbemerkungen. Dem rhomboedrischen System gehören die Gruppen

$$D_3^d, D_3, C_3^v, C_3^i, C_3$$

an; ihre wesentliche Eigenschaft besteht in dem Besitz einer *dreizähligen* Achse. Die ihnen entsprechenden Raumgruppen sind daher gleichfalls durch das Auftreten dreizähliger Achsen charakterisiert; andere vertikale Achsen können sie nicht enthalten. Gitter mit dreizähligen Achsen gibt es zwei; nämlich

¹⁾ Jeder so beschaffene Punkt liefert einen Punkt D_m ; vgl. die Ausführungen auf S. 291.

²⁾ Mit der Achse a bedingt D_m eine Gleitspiegelung an der horizontalen Ebene durch v ; diese und $\mathfrak{C}_2(\tau_x)$ entsprechen den Gleitspiegelungen an λ und μ in Figur 153.

Γ_{rh} und Γ_h . Dem Gitter Γ_h kommen zwar außerdem auch sechszählige Achsen zu; das schließt aber nicht aus, daß es doch Raumgruppen vom rhomboedriscen Typus gibt, in die Γ_h als Gitter eingeht. Der Gruppe Γ selbst fehlen natürlich die sechszähligen Achsen¹⁾. Das weitere zeigen die folgenden Betrachtungen.

1) Die primitiven Translationen des Gitters Γ_h , an die wir anknüpfen, sind (Kap. VIII, § 7)

$$2\tau_x \text{ und } 2\tau_y, 2\tau_\mu, 2\tau_\nu; 2\tau_\lambda + 2\tau_\mu + 2\tau_\nu = 0.$$

Das Gitter enthält keine Translation, in die ein Bruchteil von $2\tau_x$ als Komponente eingeht. Alle dreizähligen Achsen einer mit Γ_h gebildeten Gruppe sind daher gleichartig (Kap. XII, § 4), also entweder sämtlich Drehungsachsen oder aber Schraubenachsen mit *derselben* Gleitungskomponente. Nach Kap. XII, § 2 hat die Gleitungskomponente einer dreizähligen Achse nur die drei Werte

$$1) \quad t = 0, \quad t = \frac{2}{3}\tau_x, \quad t = \frac{4}{3}\tau_x;$$

wir werden daher, diesen Werten von t entsprechend, drei verschiedene Gattungen solcher Gruppen finden.

2) Anders ist es bei den mit dem Gitter Γ_{rh} gebildeten Gruppen. Bei ihnen treten, wie wir sofort erkennen werden, Achsen mit den drei vorstehenden Werten von t stets zugleich auf. Jede der drei Translationen des primitiven Tripels (Kap. IX, § 13), nämlich

$$OL = 2\tau_l, \quad OM = 2\tau_m, \quad ON = 2\tau_n; \quad 2\tau_l + 2\tau_m + 2\tau_n = 2\tau_x$$

enthält die Komponente $\frac{2}{3}\tau_x$. Sei nun $\mathfrak{A}(\frac{2}{3}\tau_x, t)$ eine Schraubung, die einer rhomboedriscen Gruppe Γ mit dem Gitter Γ_{rh} angehört, so entstehen aus ihr durch Multiplikation mit den Translationen $2\tau_l$ und $4\tau_l$ auch Schraubungen mit den Komponenten $t + \frac{2}{3}\tau_x$ und $t + \frac{4}{3}\tau_x$. In einer Gruppe Γ , die Γ_{rh} als Gitter enthält, kommen daher Schraubungen mit den Komponenten

$$t, \quad t + \frac{2}{3}\tau_x, \quad t + \frac{4}{3}\tau_x$$

¹⁾ Daß die Strukturen nicht die ganze Symmetrie des Punktgitters zu haben brauchen, mit denen sie aufgebaut sind, kommt auch schon bei den Bravais'schen Strukturen vor.

vor, und da t selbst einen der Werte $0, \frac{2}{3}\tau_z, \frac{4}{3}\tau_z$ hat, so kommen in allen Fällen *die drei Translationskomponenten*

$$0, \frac{2}{3}\tau_z, \frac{4}{3}\tau_z$$

zugleich vor.

3) Sowohl für das Gitter Γ_h wie auch für das Gitter Γ_{rh} sind die in den horizontalen Ebenen liegenden Translationsnetze gleichseitig. Ihre in γ liegenden zweizähligen Achsen (Kap. IX, § 13, 14) zerfallen in Umwendungsachsen und in Umschraubungsachsen. Die Umwendungsachsen fallen in die Seiten und in die Höhen der gleichseitigen Dreiecke; die Umschrau-

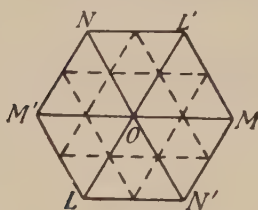


Fig. 175

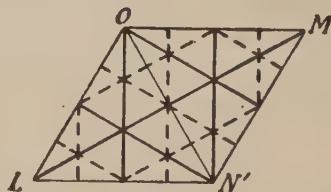


Fig. 175a

bungsachsen verlaufen im mittleren Abstand zwischen ihnen, wie es die an Figur 60 (S. 149) anknüpfenden Figuren 175 und 175a erkennen lassen. Die erste enthält die Achsen, die den Seiten parallel sind, die zweite die zu den Höhen parallelen. Die Translationskomponenten der Umschraubungen sind im ersten Fall gleich den halben Seiten, im zweiten gleich den Höhen der Dreiecke.

§ 2. Die Gruppen der Symmetrie C_3 . Für die zu C_3 isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{C}_3$ haben wir die Betrachtungen von Kap. XII, § 4 zugrunde zu legen. Die zyklische Gruppe C_3 enthält die Drehungen

$$1, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'^2; \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'^{(2\pi/3)},$$

jede zu ihr isomorphe Gruppe Γ besteht daher aus den Operationen

$$2) \quad \Gamma_z, \{\mathfrak{A}\Gamma_z\}, \{\mathfrak{A}'^2\Gamma_z\},$$

wo Γ_z die Gruppe Γ_h oder Γ_{rh} sein kann. Für $\mathfrak{A}$ kann gemäß § 1 eine der drei Operationen

$$\mathfrak{A}(2\pi/3), \mathfrak{A}(2\pi/3, \frac{2}{3}\tau_x), \mathfrak{A}(2\pi/3, \frac{4}{3}\tau_x)$$

gewählt werden.

Ist das Gitter der Gruppe $\mathfrak{G}_3$ zunächst Γ_h , so ergibt sich nach § 1 mit jeder dieser drei Operationen je eine *besondere* Gruppe; wir erhalten so die drei Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_3^1 &= \{\mathfrak{A}(2\pi/3); \Gamma_h\} \\ \mathfrak{G}_3^2 &= \{\mathfrak{A}(2\pi/3, \frac{2}{3}\tau_x); \Gamma_h\} \\ \mathfrak{G}_3^3 &= \{\mathfrak{A}(2\pi/3, \frac{4}{3}\tau_x); \Gamma_h\}.\end{aligned}$$

Die Gruppen $\mathfrak{G}_3^2$ und $\mathfrak{G}_3^3$ unterscheiden sich nur durch den Windungssinn ihrer Schraubenachsen. Jede von ihnen enthält Schraubenachsen von nur einerlei Windungssinn; sie liefern also (Kap. XII, § 8) *enantiomorphe* Strukturen und sind zur *Erzeugung von Gruppen zweiter Art nicht verwendbar*.

Das Fußpunktenetz der Achsen bedarf hier näherer Erörterung. Es ist ein *gleichseitiges* Netz und besteht aus den Fußpunkten aller dreizähligen und sechszähligen Achsen des Gitters Γ_h . Zunächst sei bemerkt, daß es (Kap. XII, § 4) für alle drei Gruppen $\mathfrak{G}_3^1, \mathfrak{G}_3^2, \mathfrak{G}_3^3$ dasselbe ist; wir dürfen daher, um die Eigenart des Netzes zu ermitteln, die Achsen als Drehungsachsen voraussetzen. Wir gehen also (Fig. 60, S. 149) von der durch O gehenden dreizähligen Achse a aus und bilden die Produkte der Drehung $\mathfrak{A}(2\pi/3)$ mit den Translationen $2\tau_\lambda, 2\tau_\mu, 2\tau_\nu$; dadurch ergeben sich, wie in Kap. IX, die dreizähligen Achsen, die durch die Mitten der gleichseitigen Dreiecke gehen; insbesondere zunächst die Achsen durch A', B' (Fig. 60). Die Punkte O, A', B' sind also Fußpunkte des Achsennetzes; sie bilden ein gleichseitiges Dreieck, und aus

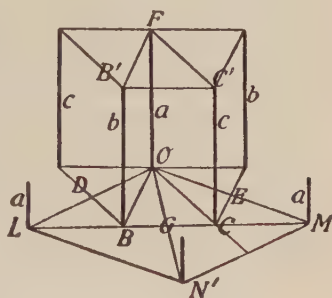


Fig. 176

ihnen entsteht, genau wie in Kap. IX, das gleichseitige Fußpunktenetz aller dreizähligen Achsen. Die zweizähligen Achsen des Gitters Γ_h fallen also weg, und die sechszähligen reduzieren sich auf dreizählige. Dem entspricht die Achsenfigur 176. Wir haben in ihr die Punkte A', B', C' von Figur 60 durch zwei ihnen gleichwertige Punkte B, C ersetzt¹⁾; die Punkte D, E, G haben die gleiche Bedeutung, wie bei den rhombischen Achsenfiguren.

Die Translationen des Fußpunktenetzes haben gemäß Kap. IX, § 3 die Werte

$$\begin{aligned} CO &= 2\tau_{\lambda}' = \frac{2}{3}(\tau_{\nu} - \tau_{\mu}), & OB &= 2\tau_{\mu}' = \frac{2}{3}(\tau_{\lambda} - \tau_{\nu}), \\ BC &= 2\tau_{\nu}' = \frac{2}{3}(\tau_{\mu} - \tau_{\lambda}). \end{aligned}$$

Die Achsen zerfallen in *drei ungleichwertige* Schaaren (a) (b) (c).

Es sei noch erwähnt, daß die Seiten und Höhen der Dreiecke des Fußpunktenetzes in die Höhen und Seiten der Dreiecke des Gitternetzes fallen; *Seiten und Höhen vertauschen also bei beiden Netzen ihre Rolle.*

Es gibt nur eine Gruppe $\mathfrak{G}_3$ mit dem Gitter Γ_{rh} . Bei diesem Gitter treten nämlich nach § 1 alle drei Arten dreizähliger Achsen zugleich auf; wir dürfen also

$$t_a = 0, \quad t_b = \frac{2}{3}\tau_s, \quad t_c = \frac{4}{3}\tau_s$$

setzen und können die Drehung $\mathfrak{A}(2\pi/3)$ als erzeugende Operation wählen. Wir erhalten daher nur die eine Gruppe

$$\mathfrak{G}_3^4 = \{\mathfrak{A}(2\pi/3); \Gamma_{rh}\}.$$

Für diese Gruppe muß das Fußpunktenetz der Achsen mit demjenigen, das sich in Kap. IX für das Gitter Γ_{rh} selbst ergab, übereinstimmen (Fig. 92, S. 192). Die Fußpunkte bilden daher wiederum ein *gleichseitiges Punktnetz*, und zwar geht eine Drehungsachse durch den Punkt A_1 von Figur 92 und je eine Schraubenachse durch die Punkte B_1 und C_1 ; die Achsen b und c haben *entgegengesetzten* Windungssinn. Die Gruppe

¹⁾ Die Figur entspricht der Gruppe $\mathfrak{G}_3^1$; werden die Drehungsachsen durch Schraubenachsen ersetzt, so ergeben sich die Figuren für $\mathfrak{G}_3^2$ und $\mathfrak{G}_3^3$. Die obere horizontale Ebene von Fig. 176 kommt erst später in Betracht.

kann also zur Erzeugung von Gruppen zweiter Art verwendet werden. Die Figur 92 stellt zugleich die Achsenfigur der Gruppe dar. Wir haben wieder drei Schaaren ungleichwertiger Achsen (a)(b)(c). Es folgt:

1. Es gibt vier Gruppen der Symmetrie C_3 , drei mit dem Gitter F_h und eine mit F_{rh} .

§ 3. Die Gruppen der Symmetrie C_3^i . Die Gruppe C_3^i entsteht aus der Gruppe C_3 gemäß dem Bildungsgesetz

$$3) \quad \{C_3^i = C_3, \mathfrak{S}'\};$$

ihre erzeugende Operation ist also eine Inversion. Da alle zu einer Inversion isomorphen Operationen selbst Inversionen sind, ist auch jede Gruppe $\mathfrak{C}_{3i}$ aus einer Gruppe $\mathfrak{C}_3$ mittels einer Inversion zu erzeugen. Die Inversion muß eine Deckoperation der Achsenschaaren der Gruppe $\mathfrak{C}_3$ sein. Wie wir bereits in § 2 erwähnten, eignen sich nur $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_3^4$ zur Erzeugung einer Gruppe $\mathfrak{C}_{3i}$.

In der Gruppe $\mathfrak{C}_3^1$ sind alle Achsen gleichartig (Fig. 176); das erzeugende Symmetriezentrum kann daher an sich *in* eine Achse fallen, oder in die Mitte *zwischen* zwei Achsen. Diese beiden Lagen führen aber nicht zu verschiedenen Gruppen. Legen wir nämlich das Symmetriezentrum in den Punkt O der Achse a , so fällt, da ON' eine Translation der Gruppe ist, ein solches Zentrum auch in die Mitte von BC und damit in die Mitte zwischen b und c . Es ergibt sich also aus $\mathfrak{C}_3^1$ nur eine Gruppe, nämlich

$$\mathfrak{C}_{3i}^1 = \{\mathfrak{C}_3^1, \mathfrak{S}; I_h\}.$$

Zu beachten ist, daß *in* die Achsen b und c *keine* Symmetriezentra fallen¹⁾; nur *eine* der drei Schaaren (a)(b)(c) enthält also Symmetriezentra.

Die Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ enthält drei verschiedene Achsenschaaren a, b, c . Die Achsen b und c sind von entgegengesetztem Windungssinn und müssen sich daher durch die Inversion $\mathfrak{S}$ vertauschen. Wir genügen dem, wenn wir das erzeugende Sym-

¹⁾ Von einer besonderen Achsenfigur kann hier, ebenso bei der folgenden Gruppe, abgesehen werden.

metriezentrum in den Punkt O der Achse a legen (Fig. 93); es fällt dann auch eines in die Mitte S_m der Rhombendiagonale L_1M_1 und damit auch in die Mitte zwischen b und c . Die sich so ergebende Gruppe ist

$$\mathfrak{C}_{3i}^2 = \{\mathfrak{C}_3^4, \mathfrak{S}; I_{rh}\}.$$

2. Es gibt zwei Gruppen von der Symmetrie C_3^i . Die eine enthält das Gitter Γ_h , die andere Γ_{rh} .

§ 4. Die Gruppen der Symmetrie C_3^v . Die Gruppe

$$4) \quad C_3^v = \{C^3, \mathfrak{S}_v'\}$$

entsteht aus C_3 mittels der Spiegelung $\mathfrak{S}_v'$; sie enthält die sechs Operationen

$$1, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'^2; \mathfrak{S}_v', \mathfrak{A}'\mathfrak{S}_v', \mathfrak{A}'^2\mathfrak{S}_v',$$

und besitzt, den letzten drei Operationen entsprechend, drei vertikale Symmetrieebenen $\sigma_v', \sigma_v'', \sigma_v'''$, die Winkel von 60° miteinander einschließen. Nach dem allgemeinen Isomorphiegesetz von Kap. XII haben wir daher die Gruppen $\mathfrak{C}_{3v}$ aus den Gruppen $\mathfrak{C}_3$ mittels einer zu $\mathfrak{S}_v'$ isomorphen Operation

$$5) \quad \mathfrak{S}_v \text{ oder } \mathfrak{S}_v(\tau)$$

zu bilden, wo τ eine halbe Translation ist; weiter gibt es in jeder Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}$ drei Schaaren von spiegelnden Ebenen, die zu $\sigma_v', \sigma_v'', \sigma_v'''$ parallel sind. Nur die Gruppen $\mathfrak{C}_{3^1}$ und $\mathfrak{C}_{3^4}$ kommen wieder in Betracht. Beim Gitter Γ_h sind für die Lage dieser Ebenenschaaren *zwei* verschiedene Möglichkeiten vorhanden, beim Gitter Γ_{rh} jedoch nur *eine*.

Um dies zu begründen, stützen wir uns auf die Sätze, die wir in Kap. XIV, § 1, 5 ableiteten. Jede Umwundungsachse oder Umschraubungsachse s des Fußpunktenetzes liefert nach ihnen eine gewisse Deckoperation $\mathfrak{S}_v$ oder $\mathfrak{S}_v(\tau)$ der Achsenschaaren, und zwar geht die Ebene σ_v durch die Achse s hindurch. Freilich gilt dies zunächst nur im *geometrischen* Sinn. Enthalten die Achsenschaaren auch Schraubenachsen, so dürfen durch $\mathfrak{S}_v$ oder $\mathfrak{S}_v(\tau)$ nur entgegengesetzte Achsen zur Deckung gelangen; ohne dies stellen $\mathfrak{S}_v$ und $\mathfrak{S}_v(\tau)$ keine erzeugenden Operationen für neue Gruppen dar. In Kap. XIV bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ trat diese Bedingung noch nicht in die Erscheinung.

Das Fußpunktenetz ist für alle Gruppen $\mathfrak{C}_3$ ein gleichseitiges Netz. Jedes gleichseitige Netz gestattet zwei Arten von Umwendungsachsen (§ 1); sie können in die Seiten und in die Höhen der gleichseitigen Dreiecke des Netzes fallen (Fig. 175 und 175a)¹⁾. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_3^1$ sind beide verwendbar, da alle ihre Achsen Drehungsachsen sind. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ führen aber nur diejenigen zu einer Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}$, die eine Vertauschung der Achsen b und c bewirken, also in die Höhen der Dreiecke des Fußpunktenetzes fallen. Unsere obige Behauptung ist damit bewiesen.

Wir bestimmen endlich Art und Anordnung der spiegeln- den Ebenen; sie folgen aus Satz 4 von Kap. XIII. Seien u_s, u_a zwei Achsen, die in eine Seite und eine Höhe des Fußpunktenetzes fallen; als Seite wollen wir OB , als Höhe OL wählen; ferner seien

$$6) \quad \sigma_s, \sigma_a, \mathfrak{C}_s, \mathfrak{C}_a$$

die durch sie gehenden Vertikal- ebenen und die Spiegelungen an ihnen. Wir fassen das Gitter Γ_h zunächst als ein Gitter mit der durch OL gehenden Ebene σ_a als Grundfläche auf (Fig. 177); es hat dann den Charakter des Gitters Γ_m' in zweiter Auffassung, mit der Ebene γ als zentrierter Seitenfläche und N' als Zentrie- rungspunkt. Als primitives Tripel des unzentrierten Gitters Γ_m mit der ebenen Stammfigur $OLL''P$ erscheinen die Translationen

$$OL = 2\tau_1 = 2\tau_\lambda, \quad 2\tau_2 = 2\tau_s, \quad OL'' = 2\tau_3 = 2\tau_\mu - 2\tau_\nu,$$

und für das Gitter Γ_m' ergeben sich so die Translationen

$$2\tau_1 = 2\tau_\lambda, \quad 2\tau_2 = 2\tau_s, \quad 2\tau_3' = \tau_1 + \tau_3 = -2\tau_\nu;$$

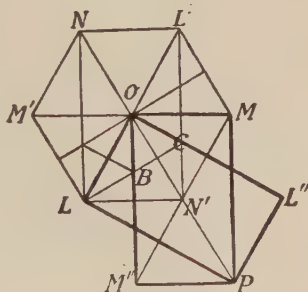


Fig. 177

¹⁾ Um Mißverständnisse auszuschließen, sei bemerkt, daß hier die Ergebnisse von § 1, die ein beliebiges gleichseitiges Netz betreffen, auf das Fußpunktenetz von Fig. 176 und 93 anzuwenden sind, nicht auf das Punktnetz des Gitters selbst.

Werte τ verwenden; es sollen die Werte $\tau = 0$ und $\tau = \tau_s$ sein. Die diesen beiden Werten entsprechende erzeugende Ebene σ_v kann nach Kap. XIV, § 1, 5 die Ebene γ nur in den Umwendungsachsen des Fußpunktenetzes schneiden; daher müssen diese Ebenen durch die Geraden u_s oder u_d gehen. So ergibt sich die wichtige Folgerung, daß *als erzeugende Operationen nur*

$$\mathfrak{S}_s, \mathfrak{S}_s(\tau_s), \mathfrak{S}_d, \mathfrak{S}_d(\tau_s)$$

in Frage kommen. Wir erhalten mit ihnen die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{3v}^1 &= \{ \mathfrak{G}_3^1, \mathfrak{S}_s; \Gamma_h \}, & \mathfrak{G}_{3v}^3 &= \{ \mathfrak{G}_3^1, \mathfrak{S}_s(\tau_s); \Gamma_h \}, \\ \mathfrak{G}_{3v}^2 &= \{ \mathfrak{G}_3^1, \mathfrak{S}_d; \Gamma_h \}, & \mathfrak{G}_{3v}^4 &= \{ \mathfrak{G}_3^1, \mathfrak{S}_d(\tau_s); \Gamma_h \}. \end{aligned}$$

Sie sind, wie ausdrücklich bemerkt sei, voneinander verschieden, denn $\mathfrak{S}_s \mathfrak{S}_d$ ist eine Drehung um a nur vom Winkel 60° . Die Achsenfiguren von $\mathfrak{G}_{3v}^1$ und $\mathfrak{G}_{3v}^2$ zeigen Fig. 178 und 179; diejenigen von $\mathfrak{G}_{3v}^3$ und $\mathfrak{G}_{3v}^4$ ergeben sich aus ihnen durch Hinzufügung der Translation τ_s für jede der drei Ebenen.

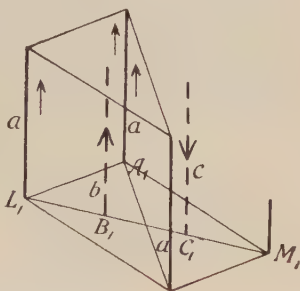


Fig. 180

Die vorstehenden Schlüsse übertragen sich ohne weiteres auf die mit dem Gitter Γ_h gebildete Gruppe $\mathfrak{G}_3^4$; nur sind die Translationen des in der Ebene γ liegenden gleichseitigen Netzes durch die Translationen zu ersetzen, die dem Fußpunktenetz der Gruppe $\mathfrak{G}_3^4$ entsprechen. Außerdem scheiden, wie wir oben sahen, $\mathfrak{S}_s$ und $\mathfrak{S}_s(\tau_s)$ als erzeugende Operationen aus. Wir erhalten daher nur die beiden Gruppen (Fig. 180¹⁾)

$$\mathfrak{G}_{3v}^5 = \{ \mathfrak{G}_3^4, \mathfrak{S}_d; \Gamma_h \}, \quad \mathfrak{G}_{3v}^6 = \{ \mathfrak{G}_3^4, \mathfrak{S}_d(\tau_s); \Gamma_h \}.$$

3. Es gibt sechs Gruppen der Symmetrie C_3^v ; vier mit dem Gitter Γ_h , zwei mit Γ_{rh} .

§ 5. Die Gruppen der Symmetrie D_3 . Die Gruppe

$$8) \quad D_3 = \{ C_3, \mathcal{U}' \}$$

¹⁾ Die Figur entspricht der Gruppe $\mathfrak{G}_{3v}^0$; sie weicht in der Form etwas von Fig. 92 ab, um sich besser an Fig. 179 anzulehnen.

geht aus C_3 mittels der Operation $\mathfrak{U}'$ hervor; die ihr isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{D}_3$ ergeben sich daher aus einer Gruppe $\mathfrak{C}_3$ durch Multiplikation mit einer Operation $\mathfrak{U}(\tau)$. Die Achse u dieser Operation muß erstens eine Umwendungs- oder Umschraubungsachse für das Fußpunktenetz der Gruppen $\mathfrak{C}_3$ sein; zweitens muß ihr auch eine Deckbewegung für die Achsenschaaren selbst entsprechen; es müssen Drehungsachsen in Drehungsachsen und Schraubenachsen in gleichartige Schraubenachsen übergehen.

Die Lage dieser zweizähligen Achse u bestimmt sich auf Grund der Untersuchungen des vorigen Paragraphen und an der Hand von Kap. XIV, § 1, 5 unmittelbar. Wie wir dort sahen, liefert jede geometrische Deckoperation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ der Achsenschaaren auch eine geometrische Deckoperation $\mathfrak{U}(\tau)$, und zwar ist die Achse u die Schnittlinie der spiegelnden Ebene σ_v mit der Ebene γ . Da wir nun in § 4 alle Gruppen $\mathfrak{C}_{3v}$ mit einer der Operationen

$$\mathfrak{S}_s, \mathfrak{S}_s(\tau_s), \mathfrak{S}_d, \mathfrak{S}_d(\tau_s)$$

erzeugt haben, so kommen (nach Kap. XIV) für die Gruppen $\mathfrak{D}_3$ nur die Umwendungen

$$9) \quad \mathfrak{U}_s \text{ und } \mathfrak{U}_d$$

als erzeugende Operationen in Betracht. Führen sie die Achsenschaaren in erlaubter Weise ineinander über, so liefern sie eine Gruppe $\mathfrak{D}_3$.

Für die Gruppen $\mathfrak{C}_3$ mit dem Gitter Γ_h sind alle Achsen gleichartig; daher stellen wieder beide Umwendungen Deckoperationen der Achsenschaaren dar. Dagegen ist für die Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ nur die Umwendung $\mathfrak{U}_s$ zulässig; da ihre drei Schaaren (a) (b) (c) verschiedenartig sind, muß jede Schaar durch die Umwendung in sich übergehen.

Über Lage und Art der zweizähligen Achsen schicken wir die folgenden allgemeinen Angaben voraus; wie stets, ziehen wir die Achsen in den *vertikalen* und den *horizontalen* Ebenen gesondert in Betracht. Zunächst sei daran erinnert, daß die Verteilung der Achsen der gleichen Richtung nur vom Gitter abhängt; aus einer einzigen Achse, sei sie Drehungsachse oder

Schraubenachse, gehen alle ihr parallelen Achsen durch Multiplikation mit den Translationen des Gitters hervor.

Wir beginnen mit den Gruppen, die Γ_h als Gitter enthalten. Da Γ_h ein Gitter von Typus m ist, so sind die Achsen einer jeden vertikalen Ebene sämtlich von gleicher Art und folgen im Abstand τ_z . Die parallelen Achsen der horizontalen Ebene richten sich nach den Resultaten von § 1. Da wir eben gesehen haben, daß als erzeugende Operationen nur U_s und U_d auftreten, so folgt für jede Gruppe, daß die Umwendungsachsen in die Seiten oder Höhen der Netzdreiecke fallen, die Umschraubungen dagegen in die Mittellinien zwischen ihnen. Wie sich die Achsen *verschiedener* Richtung auf die verschiedenen horizontalen Ebenen verteilen, gehört zu den *Eigenarten der einzelnen Gruppen*. Es treten in unseren Betrachtungen insgesamt nachstehende Punkte und Ebenen auf. Erstens auf der Achse α die Punkte

$$10) \quad O, O_1, O_2, O_3 (= F), O_m (= F_m),$$

für die

$$OO_1 = O_1O_2 = O_2O_3 = \frac{1}{3}\tau_z, \quad OO_m = O_mO_3$$

ist, und zweitens die durch sie gehenden Ebenen

$$10a) \quad \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_m (= \nu).$$

Wir erhalten aus $\mathfrak{G}_3^1$ die beiden Gruppen

$$\mathfrak{D}_3^1 = \{\mathfrak{G}_3^1, U_s; \Gamma_h\}, \quad \{\mathfrak{D}_3^2 = \mathfrak{G}_3^1, U_d; \Gamma_h\}.$$

Die zweizähligen Achsen folgen für diese Gruppen den gleichen Gesetzen, wie beim Gitter. Die Drehungsachse α bedingt nämlich, daß bei beiden Gruppen durch den Punkt O je drei zweizählige Achsen gehen; sie fallen bei $\mathfrak{D}_3^1$ in die Seiten und bei $\mathfrak{D}_3^2$ in die Höhen der gleichseitigen Dreiecke. Aus ihnen gehen alle andern nach den vorstehenden Angaben hervor. Sie erfüllen Ebenen, die im Abstand τ_z aufeinander folgen, und sämtlich die gleiche Achsenanordnung aufweisen (Fig. 181 und 182)¹⁾.

¹⁾ Für D und E vgl. § 2. Die Beschränkung der Grundfläche auf einen Teil von Fig. 176 geschieht der Deutlichkeit halber.

Aus der Gruppe $\mathfrak{G}_3^2$ und $\mathfrak{G}_3^3$ erhalten wir mittels derselben erzeugenden Operationen die Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_3^3 &= \{\mathfrak{G}_3^2, \mathfrak{U}_s; \Gamma_h\}, & \mathfrak{D}_3^4 &= \{\mathfrak{G}_3^2, \mathfrak{U}_a; \Gamma_h\}, \\ \mathfrak{D}_3^5 &= \{\mathfrak{G}_3^3, \mathfrak{U}_s; \Gamma_h\}, & \mathfrak{D}_3^6 &= \{\mathfrak{G}_3^3, \mathfrak{U}_a; \Gamma_h\}.\end{aligned}$$

Da sich $\mathfrak{G}_3^2$ und $\mathfrak{G}_3^3$ nur durch den Windungssinn ihrer dreizähligen Achsen unterscheiden, gilt das gleiche auch für die Gruppen $\mathfrak{D}_3^3, \mathfrak{D}_3^5$ einerseits und $\mathfrak{D}_3^4, \mathfrak{D}_3^6$ anderseits. Es genügt daher, die Achsenverteilung für eines dieser Paare näher anzugeben.

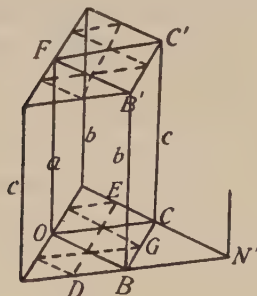


Fig. 181

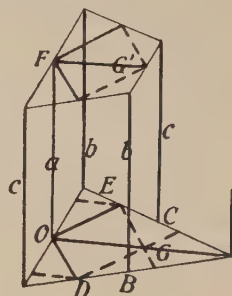


Fig. 182

Der Satz, der sie regelt, ist der Satz 3 von Kap. IV; wir folgern aus ihm, daß (Fig. 183)

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}(^{2\pi/3}, ^{2/3}\tau_s) = \mathfrak{U}'; \angle(uu') = \pi/3$$

ist, wo u' die Achse a in dem oben genannten Punkt O_1 schneidet, für den $OO_1 = \frac{1}{3}\tau_s$ ist. Die zweizähligen Achsen, die a schneiden, gehen daher durch die Punkte O, O_1, O_2 usw.; sie folgen wendeltreppenartig im Abstand $\frac{1}{3}\tau_s$ und mit einem Drehungswinkel von 60° aufeinander. Im gleichen Abstand folgen also auch die horizontalen Ebenen, die diese Achsen enthalten, es sind die Ebenen $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ und zwar liegen in jeder dieser Ebenen nur Achsen (Drehungsachsen und Schraubenachsen) von *einerlei* Richtung. Die sämtlichen in γ enthaltenen Achsen der Gruppen $\mathfrak{D}_3^1$ und $\mathfrak{D}_3^2$ verteilen sich also hier auf die Ebenen $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ und haben in jeder dieser Ebenen dieselbe Lage zueinander, wie die ihnen parallelen Achsen von $\mathfrak{D}_3^1$ und $\mathfrak{D}_3^2$ in γ (Fig. 183 und 184).

Wir gehen zu den Gruppen über, die sich aus $\mathfrak{G}_3^4$ ergeben. Wir sahen bereits, daß nur die Umwendung $\mathfrak{U}_s$ eine erzeugende Operation darstellt und gelangen so zur Gruppe

$$\mathfrak{D}_3^7 = \{ \mathfrak{G}_3^4, \mathfrak{U}_s; \Gamma_{rh} \}.$$

Für die zweizähligen Achsen dieser Gruppe, die Γ_{rh} als Gitter enthält, bleiben die für Γ_h abgeleiteten allgemeinen Regeln, wie man leicht zeigt, unverändert bestehen. Für die horizontalen Ebenen ist es evident, da das in ihnen enthaltene Fußpunktenetz wieder ein gleichseitiges Netz ist; für die vertikalen beruht es darauf,

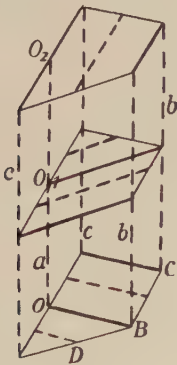


Fig. 183¹⁾

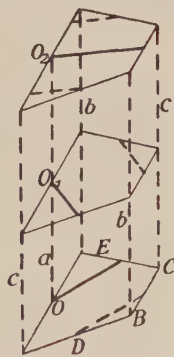


Fig. 184¹⁾

daß die zweizähligen Achsen nicht in solchen Ebenen liegen, in die eine der Translationen $2\tau_l$, $2\tau_m$, $2\tau_n$ fällt, sondern in den Ebenen, die die Winkel je zweier dieser Translationen halbieren (Fig. 90, S. 190). Diese Ebenen enthalten aber keine Translation, in die ein Teil von $2\tau_z$ als Komponente eingeht, und so folgen in jeder solchen Ebene lauter gleichartige Achsen im Abstand τ_z . Die Gesamtlage der zweizähligen Achsen ergibt sich durch Verbindung der Resultate, die wir für die vorstehenden Gruppen soeben abgeleitet haben. Die Achse u_s (Fig. 185) schneidet nämlich sowohl eine Achse a , wie eine Achse b und eine Achse c . Durch den Punkt O gehen daher,

¹⁾ In den Ebenen γ und γ_3 ist die Achsenlage die gleiche, daher fehlt in den Figuren 183 und 184 die Ebene γ_3 durch $O_3 = F$.

wie bei der Gruppe $\mathfrak{D}_3^1$, drei verschiedene Achsen der Ebene γ ; zu ihnen kommen die ihnen entsprechenden parallelen Umschraubungen. Die Ebenen dieser Art folgen wieder im Abstand τ_z aufeinander. Durch die Punkte B und C der Schraubenachsen geht, wie bei den Gruppen $\mathfrak{D}_3^3$ und $\mathfrak{D}_3^5$, nur *je eine* Achse, die sämtlichen Achsen, die b und c schneiden, haben daher dieselbe wendeltreppenartige Lage zu b und c , wie bei den eben genannten Gruppen. Die sie enthaltenden Ebenen

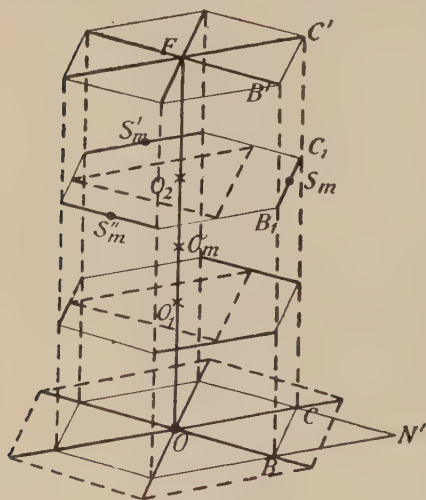


Fig. 185

sind also wieder die Ebenen $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ usw., doch liegen in jeder Ebene diesmal Achsen aller drei Richtungen¹⁾. Es ist wesentlich, darauf hinzuweisen, daß die Achsen der so entstandenen Figur mit den Achsen des rhomboedrischen Gitters identisch sind, die wir in Fig. 90 dargestellt haben. Die Punkte O und F_m von Figur 185 entsprechen nämlich den Punkten O und O_m von Figur 90; durch den Punkt O_m dieser Figur gehen genau drei solche Achsen u, u_1, u_2 , wie bei Figur 185 durch F . Wie die übrigen Achsen der Figur 185 sich in das rhomboedrische Gitter einfügen, ist leicht anzugeben. Wie a. a. O. dargelegt wurde, folgen die Achsenebenen des Gitters, ebenso wie die Ebenen $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots$, im Abstand $\frac{1}{3}\tau_z$ aufeinander; ferner gehen je drei zweizählige Achsen durch die Mitten und die Ecken der Rhomboeder. Verlängern wir also in Fig. 185 die drei zweizähligen Achsen der Ebene γ_1 bis zu ihren Schnittpunkten, so müssen dies die Zentra der Rhomboeder sein, die an die drei unteren Flächen von Fig. 90 an-

¹⁾ Infolge der dreizähligen Drehungsachse a .

grenzen; verlängern wir die zweizähligen Achsen der Ebene γ_2 bis zu ihren Schnittpunkten, so müssen sich die Ecken L_1, M_1, N_1 ergeben; diese zweizähligen Achsen sind also identisch mit den Diagonalen $L_1 M_1 \dots$ von Fig. 90, die wir a. a. O. als zweizählige Achsen erkannt haben. Die Strecke $B_1 C_1$ von Fig. 185 entspricht also auch der Strecke $B_1 C_1$ von Fig. 92, und der Punkt S_m von Fig. 185 dem Punkt S_m von Fig. 90; er ist eine Flächenmitte des Rhomboeders:

4. *Es gibt sieben Gruppen der Symmetrie D_3 ; sechs mit dem Gitter Γ_h und eine mit Γ_{rh} .*

§ 6. Die Gruppen der Symmetrie D_3^d . Gemäß dem Bildungsgesetz

$$11) \quad D_3^d = \{D_3, \mathfrak{S}'\} = \{D_3, \mathfrak{S}_d'\}$$

können die zu D_3^d isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{D}_{3d}$ aus den Gruppen $\mathfrak{D}_3$ mittels einer Inversion abgeleitet werden. Nur diejenigen Gruppen sind dazu tauglich, die eine der Gruppen $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_3^4$ als Untergruppe enthalten, also die Gruppen

$$\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{D}_3^7.$$

Die Lage des erzeugenden Symmetriezentrums hat zwei evidenten Bedingungen zu genügen. Erstens muß es eine Deckoperation für die in der Gruppe $\mathfrak{D}_3$ enthaltenen dreizähligen Achsen sein. Es muß also mit ihnen eine Gruppe $\mathfrak{C}_3$ erzeugen, und wir dürfen daher gemäß § 3 festsetzen, daß es in einen Punkt der Achse a falle¹⁾. Zweitens muß es auch eine Deckoperation für jede in $\mathfrak{D}_3$ enthaltene Schaar zweizähliger Achsen sein; es muß daher *in* eine solche Achse fallen oder in die Mitte *zwischen* zwei nächste Achsen, also entweder in den Punkt O oder in den Punkt O_m . Beide Punkte sind geeignete erzeugende Lagen; auch sind die mit ihnen gebildeten Gruppen verschieden, da ihr Abstand nur den Wert $\frac{1}{2}\tau_z$ beträgt. Dies gilt übereinstimmend für jede der drei Gruppen $\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{D}_3^7$.

Wir bezeichnen die beiden erzeugenden Inversionen durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_m$ und erhalten mit ihnen sechs Gruppen $\mathfrak{D}_{3d}$, die sich, wie sofort gezeigt werden soll, folgendermaßen darstellen lassen:

¹⁾ Ein Symmetriezentrum zwischen zwei Achsen b und c stellt sich von selbst ein (§ 3).

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{3a}^1 &= \{\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{I}; \Gamma_h\} = \{\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{S}_a; \Gamma_h\} \\ \mathfrak{D}_{3a}^2 &= \{\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{I}_m; \Gamma_h\} = \{\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{S}_a(\tau_x); \Gamma_h\} \\ \mathfrak{D}_{3a}^3 &= \{\mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{I}; \Gamma_h\} = \{\mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{S}_s; \Gamma_h\} \\ \mathfrak{D}_{3a}^4 &= \{\mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{I}_m; \Gamma_h\} = \{\mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{S}_s(\tau_x); \Gamma_h\} \\ \mathfrak{D}_{3a}^5 &= \{\mathfrak{D}_3^7, \mathfrak{I}; \Gamma_h\} = \{\mathfrak{D}_3^7, \mathfrak{S}_a; \Gamma_{rh}\} \\ \mathfrak{D}_{3a}^6 &= \{\mathfrak{D}_3^7, \mathfrak{I}_m; \Gamma_h\} = \{\mathfrak{D}_3^7, \mathfrak{S}_a(\tau_x); \Gamma_{rh}\}.\end{aligned}$$

Die in diesen Gleichungen enthaltenen spiegelnden Ebenen ergeben sich wie folgt: Jede Achse u_s des Netzes steht (Kap. IX, § 14) auf einer Ebene σ_a senkrecht und ebenso u_a auf σ_s . Ist daher $\mathfrak{I}$ die erzeugende Inversion, so fällt sie in eine Achse u_s oder u_a und bedingt mit jeder solchen Achse eine auf ihr senkrechte vertikale Symmetrieebene. So ist es bei $\mathfrak{D}_{3a}^1, \mathfrak{D}_{3a}^3, \mathfrak{D}_{3a}^5$. Ist dagegen O_m das erzeugende Zentrum, so hat man (Kap. IV, Satz 7a)

$$\mathfrak{I}\mathfrak{I}_m = \mathfrak{I}\mathfrak{I}\mathfrak{I}_x = \mathfrak{S}_v\mathfrak{I}_x = \mathfrak{S}_v(\tau_x),$$

die Inversion $\mathfrak{I}_m$ bedingt also mit jeder solchen Achse je eine analoge Operation $\mathfrak{S}_v(\tau_x)$; so ist es bei $\mathfrak{D}_{3a}^2, \mathfrak{D}_{3a}^4, \mathfrak{D}_{3a}^6$. Bei den ersten drei Gruppen treten also drei auf den Achsen senkrechte Symmetrieebenen auf, bei den letzten drei Gruppen drei analoge Ebenen mit der Translation τ_x . Die Zeichnung besonderer Achsenfiguren erscheint hier entbehrlich. Sie ergeben sich durch unmittelbare Kombination der Achsenfiguren für die Gruppen $\mathfrak{D}_3$ mit den Figuren der Gruppen $\mathfrak{C}_{3v}$, die die auftretenden spiegelnden Ebenen enthalten. Da die Achse u_s auf der Ebene σ_a und u_a auf σ_s senkrecht steht, so sind in den Gruppen

$$\mathfrak{D}_{3a}^1, \mathfrak{D}_{3a}^2, \mathfrak{D}_{3a}^3, \mathfrak{D}_{3a}^4, \mathfrak{D}_{3a}^5, \mathfrak{D}_{3a}^6,$$

die Untergruppen

$$\mathfrak{C}_{3v}^2, \mathfrak{C}_{3v}^4, \mathfrak{C}_{3v}^1, \mathfrak{C}_{3v}^3, \mathfrak{C}_{3v}^5, \mathfrak{C}_{3v}^6.$$

enthalten. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_{3a}^5$ fällt ein Symmetriezentrum auch in die Mitte S_m der Geraden B_1C_1 (Fig. 185) und ebenso in die Mitten S'_m, S''_m der beiden analogen Strecken der Ebene γ_2 ; außerdem auch in die Mitten T_m der Rhomboederkanten (Kap. XIII, Satz 1).

5. Es gibt sechs Gruppen der Symmetrie D_3^a ; vier mit dem Gitter Γ_h und zwei mit Γ_{rh} .

§ 7. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte. Das Koordinatensystem war in Kap. VII auf zwei Arten gewählt worden. Erstens so, daß die z -Achse in die Achse a fällt, die erzeugende Achse u' in die x -Achse und die erzeugende Ebene σ_v' in die yz -Ebene. In dieser Weise wählen wir das Koordinatensystem für alle diejenigen Gruppen, die das Gitter Γ_h enthalten; bei ihnen gibt also die erzeugende Ebene σ_v die yz -Ebene ab, und die erzeugende Achse u die x -Achse. Die Koordinatenachsen liegen dann freilich *nicht für alle Gruppen in gleicher Weise zum Gitter*; das ist aber ohne Belang¹⁾. Für die Gruppen, die das Gitter Γ_{rh} enthalten, folgen wir der zweiten in Kap. VII getroffenen Wahl der Koordinaten. Die Ebene σ_v halbiert den Winkel der positiven x - und y -Achse, und die erzeugende Achse u ist senkrecht zu dieser Ebene.

Bei den Gruppen $\mathfrak{C}_3$ bedürfen die Zusatztranslationen keiner besonderen Erörterung. Für $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_3^4$ stellen sich keine ein, und für $\mathfrak{C}_3^2$ und $\mathfrak{C}_3^3$ treten bei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^2$ die ihnen entsprechenden Translationskomponenten (in reduzierter Form) auf. Gruppen $\mathfrak{C}_{3i}$ entstehen nur aus $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_3^4$; überdies fällt bei ihnen das erzeugende Inversionszentrum in O , es treten also gleichfalls keine Zusatztranslationen auf.

Auch die Gruppen $\mathfrak{C}_{3v}$ erledigen sich in einfachster Weise. Sie entstehen ebenfalls nur aus den zusatzfreien Gruppen $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_3^4$. Ist daher $\mathfrak{S}_v$ die erzeugende Operation, so können Zusatztranslationen nicht auftreten; ist es aber $\mathfrak{S}_v(\tau_z)$, so tritt in üblicher Weise τ_z als einziger Zusatzwert auf. Somit erhalten wir folgende Tabelle:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{C}_3^1, \mathfrak{C}_3^4: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{C}_3^2: \quad 0 \quad \frac{2}{3}\tau_z \quad \frac{4}{3}\tau_z; \quad \mathfrak{C}_3^3: \quad 0 \quad \frac{4}{3}\tau_z \quad \frac{2}{3}\tau_z \\ \mathfrak{C}_{3i}^1, \mathfrak{C}_{3i}^2: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{C}_{3v}^1, \mathfrak{C}_{3v}^2, \mathfrak{C}_{3v}^5: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{C}_{3v}^3, \mathfrak{C}_{3v}^4, \mathfrak{C}_{3v}^6: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tau_z \quad \tau_z \quad \tau_z. \end{array}$$

Die Gruppen $\mathfrak{D}_3$ ergeben sich aus den Gruppen $\mathfrak{C}_3$ mittels der Umwendung $\mathfrak{U}_s$ oder $\mathfrak{U}_d$; welche es auch sei, so gibt sie die

¹⁾ Die Wahl des Koordinatensystems hat sich immer der Eigenart des Einzelfalles anzupassen.

x -Achse ab. Der Einfluß dieser Umwendung auf die Koordinatentripel der Gruppen $\mathfrak{C}_3$ ist zu bestimmen. Dies bedarf nur dann der Erörterung, wenn ein solches Tripel die Form $xyz + \tau$ hat. Die Umwendung 11 führt allgemein (Kap. VII, § 1) xyz in $x\bar{y}\bar{z}$ über; sie verwandelt daher τ_z in $-\tau_z$ und führt

$$xyz + \tau_z \text{ in } x\bar{y}\bar{z} - \tau_z$$

über. Wir erhalten demnach (in reduzierter Form) die Tabelle:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{D}_3^7: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{D}_3^3, \mathfrak{D}_3^4: \quad 0 \quad \frac{2}{3}\tau_z \quad \frac{4}{3}\tau_z \quad 0 \quad \frac{4}{3}\tau_z \quad \frac{2}{3}\tau_z \\ \mathfrak{D}_3^5, \mathfrak{D}_3^6: \quad 0 \quad \frac{4}{3}\tau_z \quad \frac{2}{3}\tau_z \quad 0 \quad \frac{2}{3}\tau_z \quad \frac{4}{3}\tau_z. \end{array}$$

Die Gruppen $\mathfrak{D}_{3d}$ entstehen nur aus den Gruppen $\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{D}_3^7$, die dem vorstehenden gemäß von allen Zusatztranslationen frei sind. Ist daher $\mathfrak{J}$ die erzeugende Inversion, so können Zusatzwerte für die Koordinatentripel nicht auftreten. Ist es $\mathfrak{J}_m$, so haben wir davon auszugehen (§ 6), daß $\mathfrak{J}_m = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{T}_z$ ist; neben dem Übergang von xyz in $x\bar{y}\bar{z}$ tritt also noch die Translation τ_z additiv zu allen Koordinatentripeln hinzu. Wir erhalten so die Tabelle:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{D}_{3d}^1, \mathfrak{D}_{3d}^3, \mathfrak{D}_{3d}^5: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \quad \quad \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{D}_{3d}^2, \mathfrak{D}_{3d}^4, \mathfrak{D}_{3d}^6: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \quad \quad \quad \tau_z \quad \tau_z \quad \tau_z \quad \tau_z \quad \tau_z \quad \tau_z. \end{array}$$

Die Gruppen $\mathfrak{C}_3^1, \mathfrak{C}_3^4, \mathfrak{C}_{3i}^1, \mathfrak{C}_{3i}^2, \mathfrak{C}_{3v}^1, \mathfrak{C}_{3v}^3, \mathfrak{C}_{3v}^5, \mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{D}_3^7, \mathfrak{D}_{3d}^1, \mathfrak{D}_{3d}^2, \mathfrak{D}_{3d}^5$ entsprechen (Kap. XII, Satz 12) dem einfachen Fall der Bravais'schen Strukturen. Die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ stellt die Gesamtsymmetrie des Gitters Γ_{rh} dar.

§ 8. Die Eigensymmetrie der Bausteine. In den Tabellen, die für die einzelnen Gruppen die Punktlagen mit Eigensymmetrie angeben, sollen unberücksichtigt bleiben: die Symmetrie S_1 , die jedem Punkt einer Symmetrieebene zukommt, die Symmetrie S_2 eines Symmetriezentrums, die Symmetrie C_2 , die jedem Punkt einer zweizähligen Drehungsachse zukommt, und die

Symmetrie C_3 , die jedem Punkt einer dreizähligen Achse eigen ist, durch die eine Symmetrieebene σ_v nicht hindurchgeht. Die übrigen Symmetriegruppen sind für die einzelnen Punkte im wesentlichen unmittelbar ersichtlich. Besondere Hinweise machen nur die Gruppen $\mathfrak{D}_3$ und $\mathfrak{D}_{3d}$ nötig.

In die Tabellen nehmen wir außer den Punkten O, F, B, C auch die Punkte B', C' der oberen horizontalen Ebene auf; ferner die Punkte S_m, S_m', S_m'' von Fig. 185 (S. 362). Weitere gleichwertige Punkte können von ihnen aus unmittelbar erschlossen werden. Bei den Gruppen $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_3^4$ treten gleichwertige Punkte mit höherer Eigensymmetrie noch nicht auf; für die Gruppen $\mathfrak{C}_{3i}$ und $\mathfrak{D}_{3d}$ werden die Achsen b und c gleichwertig. Der Punkt F ist auch hier stets der Punkt, für den $OF = \tau_z$ ist¹⁾, der Punkt $F_m = O_m$ also die Mitte von OF .

Tabelle A. Gruppen $\mathfrak{C}_{3i}, \mathfrak{C}_{3v}, \mathfrak{D}_3$

Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{C}_{3i}^1, \mathfrak{C}_{3i}^2$	C_3^i	O, F	$\mathfrak{D}_3^1$	D_3	O, B, C, F, B', C'
$\mathfrak{C}_{3v}^1$	C_3^v	a, b, c	$\mathfrak{D}_3^2$	D_3	O, F
$\mathfrak{C}_{3v}^2, \mathfrak{C}_{3v}^5$	C_3^v	a	$\mathfrak{D}_3^7$	D_3	O, F

Bei den Gruppen $\mathfrak{D}_{3d}$ bedürfen die Punkte mit der Eigensymmetrie C_2^h einer Vorbemerkung. Ein in O vorhandenes Symmetriezentrum macht bei den Gruppen mit dem Gitter F_h auch die Punkte D, E, G (Fig. 181, 182) zu Symmetriezentren. Durch sie geht sowohl bei der Gruppe $\mathfrak{D}_3^1$, wie bei $\mathfrak{D}_3^2$ eine

¹⁾ In Figur 90 (S. 190) ist er durch O_m bezeichnet worden; hier ist O_m die Mitte von OF .

zweizählige Achse; für $\mathfrak{D}_3^1$ fällt sie in eine Seite der gleichseitigen Dreiecke, für $\mathfrak{D}_3^2$ in eine Höhe. Diese Punkte, sowie die analogen Punkte D' , E' , G' sind daher Punkte der Symmetrie C_2^h . Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ fällt ein Symmetriezentrum in jede Kantenmitte und in jede Flächenmitte des Rhomboeders (Fig. 90, S. 190), insbesondere also auch in die Punkte S_m , S_m' , S_m'' von Fig. 185; da alle diese Punkte zweizähligen Achsen angehören, so werden sie ebenfalls zu Punkten C_2^h . Die Symmetrieebenen sind stets Ebenen durch eine Achse a ; für S_m , S_m' , S_m'' ist es die Achse a des Rhomboeders in Fig. 90, für die Kantenmitten sind es Achsen, die einem der angrenzenden Rhomboeder angehören. Wir wollen die (an der Figur 185 nicht vorhandenen) Kantenmitten in den Tabellen durch T_m usw. bezeichnen; gleichwertig sind von ihnen alle diejenigen, die durch Drehung um eine der dreizähligen Achsen auseinander hervorgehen¹⁾.

Tabelle B. Gruppen $\mathfrak{D}_3^d$

Gruppen $\mathfrak{D}_3^d$	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppen $\mathfrak{D}_3^d$	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{D}_{3d}^1$	C_2^h	$D = E = G, D' = E' = G'$	$\mathfrak{D}_{3d}^4$	C_3^i	F_m
	C_3^v	a		D_3	$O = F$
	D_3	$B = C, B' = C'$	$\mathfrak{D}_{3d}^5$	C_2^h	$S_m = S_m' = S_m'', T_m$
	D_3^d	O, F			usw.
$\mathfrak{D}_{3d}^2$	C_3^i	F_m		C_3^v	a
	D_3	$O = F, B = C, B' = C'$		D_3^d	O, F
$\mathfrak{D}_{3d}^3$	C_2^h	$D = E = G, D' = E' = G'$	$\mathfrak{D}_{3d}^6$	C_3^i	$O_m (= F_m)$
	C_3^v	$a, b = c$		D_3	$O = F$
	D_3^d	O, F			

¹⁾ Auch für das Gitter Γ_{rh} selbst sind alle Punkte T_m Punkte der Symmetrie C_2^h .

Tabelle C. Rhomboedrischer Typus

Gruppe G_{μ}	Zählig- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_2^h	4	$\mathcal{D}_{3d}^1, \mathcal{D}_{3d}^3$ $\mathcal{D}_{3d}^5$	Γ_h Γ_{rh}	D, E, G, D', E', G' S_m, S_m', S_m'', T_m usw.
C_3^i	6	$\mathcal{C}_{3i}^1$ $\mathcal{C}_{3i}^2$ $\mathcal{D}_{3d}^2, \mathcal{D}_{3d}^4$ $\mathcal{D}_{3d}^6$	Γ_h Γ_{rh} Γ_h Γ_{rh}	O, F O, F F_m $F_m (= O_m)$
C_3	6	$\mathcal{C}_{3v}^1$ $\mathcal{C}_{3v}^2$ $\mathcal{C}_{3v}^5$ $\mathcal{D}_{3d}^1$ $\mathcal{D}_{3d}^3$ $\mathcal{D}_{3d}^5$	Γ_h Γ_h Γ_{rh} Γ_h Γ_h Γ_{rh}	a, b, c a a a a, b, c a
D_3	6	$\mathcal{D}_3^1$ $\mathcal{D}_3^2$ $\mathcal{D}_3^7$ $\mathcal{D}_{3d}^1$ $\mathcal{D}_{3d}^2$ $\mathcal{D}_{3d}^4$ $\mathcal{D}_{3d}^6$	Γ_h Γ_h Γ_{rh} Γ_h Γ_h Γ_h Γ_{rh}	O, B, C, F, B', C' O, F O, F B, C, B', C' O, B, C, F, B', C' O, F O, F
D_{3d}	12	$\mathcal{D}_{3d}^1, \mathcal{D}_{3d}^3$ $\mathcal{D}_{3d}^5$	Γ_h Γ_{rh}	O, F O, F

Über die kritischen Lagen der Bausteine gilt folgendes. Da eine Übersymmetrie der Struktur niemals über die Symmetrie des Gitters steigen kann, so kann sie sich bei den Gruppen mit dem Gitter Γ_h nicht über D_6^h und bei denen mit dem Gitter Γ_{rh} nicht über D_3^d erheben. Sie kann sich aber auch so erhöhen, daß sie nur einer Untergruppe von D_6^h oder D_3^d entspricht. Folgende Beispiele mögen die hier auftretenden Möglichkeiten klären.

Wir gehen von der Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ aus und fragen, wie man einen Baustein mit Eigensymmetrie legen muß, damit die mittels $\mathfrak{C}_3^4$ abgeleitete Struktur Σ eine Gesamtsymmetrie erhält, die höher ist, als die ihr an sich zukommende Symmetrie C_3 .

Sei μ zunächst zentrisch symmetrisch. Soll seine Symmetrie auf die aus $\mathfrak{C}_3^4$ entstandene Struktur Σ übergehen, so muß diese die Gesamtsymmetrie C_{3i} erhalten und damit der Gruppe $\mathfrak{C}_{3i}^2$ entsprechen; die Gruppe $\mathfrak{C}_{3i}^2$ ist die einzige, die $\mathfrak{C}_3^4$ als Untergruppe besitzt. Der Baustein μ muß also notwendig in eine Achse a von $\mathfrak{C}_3^4$ fallen. *Jeder Punkt einer Achse a stellt also eine kritische Lage für Bausteine der Symmetrie S_2 dar.* In jeder andern Lage bleibt die Eigensymmetrie S_2 von μ ohne Wirkung.

Sei μ zweitens mit der Eigensymmetrie C_2 behaftet; wir nehmen seine zweizählige Achse u naturgemäß horizontal an. Soll die Struktur Σ auch selbst die Symmetrie C_2 annehmen, so folgern wir wie vorher, daß die Gesamtsymmetrie die Symmetrie D_3 sein muß. Offenbar wird sie der aus $\mathfrak{C}_3^4$ entstehenden Gruppe $\mathfrak{D}_3^7$ entsprechen müssen; sie ist wieder die einzige Gruppe $\mathfrak{D}_3$, in die $\mathfrak{C}_3^4$ als Untergruppe eingeht. Der Baustein μ muß daher so liegen, daß seine zweizählige Achse u in eine Achse u_s fällt, also eine Achse a , sowie auch Achsen b und c schneidet (Fig. 185). *Hat die Achse u von μ diese Lage, so stellt jeder Punkt des Raumes eine kritische Lage für μ dar.* Hat die Achse u diese Lage nicht, so bleibt die Eigensymmetrie von μ auf die Gesamtsymmetrie ohne Einfluß.

Sei μ drittens ein Baustein mit vertikaler Symmetrieebene. Eine entstehende Übersymmetrie der Struktur Σ kann dann nur einer Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}$ entsprechen, insbesondere einer solchen,

die $\mathfrak{C}_3^4$ als Untergruppe enthält und reine Symmetrieebenen besitzt. Das ist allein die Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}^5$. Der Baustein μ muß wieder so liegen, daß seine Symmetrieebene eine erzeugende Operation für $\mathfrak{C}_3^4$ darstellt, sie muß also durch eine Achse a gehen und in eine Höhe des Dreiecks OBC fallen (Fig. 177). *Jede dem genügende Lage von μ ist eine kritische; andere Lagen bedingen keine Übersymmetrie.*

Möge μ viertens eine horizontale Symmetrieebene σ_h besitzen. Wir werden sehen, daß *sie in keiner Lage eine Übersymmetrie erzeugt*. Es gibt nämlich unter den Gruppen des rhomboedrischen Typus keine, die eine horizontale Symmetrieebene besitzt; eine sich etwa einstellende Übersymmetrie von Σ würde also sicher keiner rhomboedrischen Gruppe entsprechen. Aber sie entspricht auch keiner Gruppe eines anderen Typus. Jede mittels $\mathfrak{C}_3^4$ abgeleitete Struktur genügt notwendig dem Satz b) von Kap. XII, § 5; soll also die horizontale Symmetrieebene σ_h von μ auf diese Struktur übergehen, so muß σ_h eine Deckoperation für die Achsen von $\mathfrak{C}_3^4$ sein. Das ist aber unmöglich; denn in $\mathfrak{C}_3^4$ treten auch dreizählige Schraubenachsen auf, und jede von ihnen müßte durch σ_h in sich übergehen. Anders ist es, wenn die Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ durch $\mathfrak{C}_3^1$ ersetzt wird; hierauf werden wir in Kap. XVII, § 10 zurückkommen.

Wir nehmen endlich an, dem Baustein μ komme eine höhere Symmetrie zu, z. B. die Symmetrie

$$C_2^h = \{C_2, \mathfrak{S}'\} = \{C_2, \mathfrak{S}'\}.$$

Dann greifen zunächst die vorstehenden Schlüsse für jedes einzelne Symmetrieelement von μ gesondert Platz. Soll aber die aus $\mathfrak{C}_3^4$ entstehende Struktur Σ die Symmetrie C_2^h selbst annehmen, und damit die Symmetrie D_3^d erwerben, so müssen alle soeben entwickelten Bedingungen *zugleich* erfüllt sein. Da $\mathfrak{C}_3^4$ das Gitter Γ_{rh} besitzt, so schließen wir zunächst, daß die sich einstellende Gesamtsymmetrie nur diejenige der Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ oder $\mathfrak{D}_{3d}^6$ sein kann. Ferner muß der Baustein μ an einer Stelle liegen, der gemäß der Tabelle C die Eigensymmetrie C_2^h zukommt. Das ist nur für die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ der Fall, und zwar muß μ entweder in den Punkt S_m der Seite B_1C_1 (oder einen ana-

logen) fallen und seine Symmetrieebene auf B_1C_1 senkrecht stehen oder aber in eine Kantenmitte T_m mit entsprechender Lage der Symmetrieebene. Ist dies der Fall, so erwirbt die Struktur Σ die Übersymmetrie D_8^d ; sie entspricht der Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$. Jede dem genügende Lage von μ ist also eine besonders kritische. Man erkennt, wie die Tabelle C in diesem Fall die Frage nach den kritischen Stellen unmittelbar zu beantworten gestattet.

Kap. XVI. Die Raumgruppen vom tetragonalen Typus

§ 1. Vorbemerkungen und Hilfsformeln. 1) Dem tetragonalen System gehören die Gruppen

$$D_4^h, D_4, V^d, C_4^h, C_4^v, C_4, S_4$$

an; jede ist durch den Besitz einer vierzähligen Achse (erster oder zweiter Art) ausgezeichnet. In sie gehen daher die tetragonalen Gitter Γ_q und Γ_q' mit den Tripeln

$$\begin{aligned} &\Gamma_q; 2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z \\ &\Gamma_q'; 2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z, \tau_x + \tau_y + \tau_z = 2\tau_d \end{aligned}$$

ein. Die Translationen τ_x und τ_y haben gleiche Länge. Das Gitter Γ_q entspricht den beiden Gittern Γ_v und Γ_v' des rhombischen Systems, ebenso Γ_q' den beiden Gittern Γ_v'' und Γ_v''' .

Dieser geometrische Tatbestand bedarf sozusagen einer *kristallographischen Ergänzung*. In Kap. IX erkannten wir, daß nur zwei geometrisch verschiedene tetragonale Gitter existieren. Dies hindert aber nicht, eine tetragonale unzentrierte Stammfigur Π_0 auch so zu zentrieren, daß ein Zentrierungspunkt in ihre Grundfläche oder in jede Seitenfläche eingefügt wird, und dies hat in dem Fall, daß die Richtungen τ_x und τ_y aus irgendeinem besondern Grunde für eine Gruppe *bereits festgelegt sind*, einen guten kristallographischen Sinn. Die Art des Gitters hängt dann davon ab, wie die beiden Richtungen τ_x, τ_y zu den Achsen der Gruppe liegen, und dies bedingt, daß wir auch hier die beiden Fälle der Körperzentrierung und der Flächenzentrierung unterscheiden. Wir bezeichnen das Gitter,

wenn es in dieser Weise als flächenzentriert erscheint, durch Γ_q'' ; es hat dann die Translationen

$$\Gamma_q'': 2\tau_g = \tau_x + \tau_y, 2\tau_h = \tau_x + \tau_z, 2\tau_k = \tau_y + \tau_z^1).$$

2) Die Translation der Schraubung $\mathfrak{A}(\pi/2, t)$ kann (Kap. XII, § 2) nur die Werte

$$1) \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{2}\tau_z, \quad t = \tau_z, \quad t = \frac{3}{2}\tau_z$$

haben. Den Werten $\frac{1}{2}\tau_z$ und $\frac{3}{2}\tau_z$ entsprechen Schraubungen von entgegengesetztem Windungssinn. Bei den Gruppen mit dem Gitter Γ_q sind alle Achsen nach Kap. XII, § 4 gleichartig, also entweder Drehungsachsen oder aber gleichartige Schraubachsen. Ist dagegen Γ_q' das Gitter einer Gruppe, so bewirkt die in ihm enthaltene Translation $2\tau_d = \tau_x + \tau_y + \tau_z$, daß in der Gruppe die beiden Werte

$$1a) \quad t = 0, \quad t = \tau_z \quad \text{oder} \quad t = \frac{1}{2}\tau_z, \quad t = \frac{3}{2}\tau_z$$

zugleich auftreten, was beiläufig bemerkt, von der Auffassung von Γ_q' unabhängig ist.

3) Die vertikalen parallelen Achsen hängen durch folgende Formeln miteinander zusammen. Zunächst seien nochmals die Formeln angeführt, die den vorstehenden Resultaten zugrunde liegen; sie lauten (Kap. III, § 1 und Kap. IV, § 1)

$$a) \quad \mathfrak{A}(\pi/2) \cdot \{2\tau_x\} = \mathfrak{B}(\pi/2) \quad \text{und}$$

$$b) \quad \mathfrak{A}(\pi/2) \cdot \mathfrak{T}_x \mathfrak{T}_y \mathfrak{T}_z = \mathfrak{B}(\pi/2) \mathfrak{T}_z = \mathfrak{B}(\pi/2, \tau_z),$$

und zwar geht die Achse b im ersten Fall durch den Punkt G des Netzquadrats $OABC'$, im zweiten durch D (Fig. 85, S. 185). Durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}\tau_z$ folgt hieraus weiter

$$c) \quad \mathfrak{A}(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z) \mathfrak{T}_x \mathfrak{T}_y \mathfrak{T}_z = \mathfrak{B}(\pi/2, \frac{3}{2}\tau_z).$$

Ferner besteht die evidente Gleichung

$$d) \quad \mathfrak{A}^2(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z) = \mathfrak{A}(\pi, \tau_z),$$

aus ihr folgt durch Multiplikation mit $\tau_x + \tau_y + \tau_z$ noch

$$e) \quad \mathfrak{A}^2(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z) \cdot \mathfrak{T}_x \mathfrak{T}_y \mathfrak{T}_z = \mathfrak{A}(\pi, \tau_z) \mathfrak{T}_x \mathfrak{T}_y \cdot \mathfrak{T}_z \\ = \mathfrak{C}(\pi, \tau_z) \mathfrak{T}_z = \mathfrak{C}(\pi, 2\tau_z),$$

wo (Kap. IV, § 1) die Achse c durch den Punkt G_m hindurchgeht.

¹⁾ In der Bearbeitung vom Jahre 1891 tritt diese Unterscheidung noch nicht auf. Man kann sie übrigens auch für Γ_q durchführen.

4) Nach Kap. IX, § 3 sind die zweizähligen Achsen eines quadratischen Netzes teils Drehungsachsen und teils Schraubenachsen. Die den Seiten parallelen Achsen sind sämtlich Drehungsachsen, sie fallen in die Seiten und in die Mittellinien der Quadrate; bei den Achsen diagonalen Richtung sind die Diagonalen Drehungsachsen und die Mittellinien zwischen ihnen Schraubenachsen (Fig. 186). Danach bestimmen sich die zweizähligen Achsen der Fußpunktenetze. Nach Kap. XIV, § 1 bestimmen sie auch die vertikalen spiegelnden Ebenen der Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$. Hier mögen für sie zunächst nur die Bezeichnungen

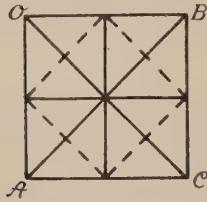


Fig. 186

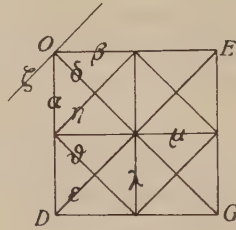


Fig. 186a

angegeben werden. Es sei $\vartheta \parallel \delta$ und $\eta \parallel \varepsilon$ je eine Ebene durch D_m (Fig. 186 a) und $\zeta \parallel \varepsilon$ die Ebene durch O ; es sind dann

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \delta, \varepsilon, \vartheta, \eta, \zeta$$

die Ebenen, die als spiegelnde Ebenen von Deckoperationen auftreten.

5) Art und Anordnung dieser spiegelnden Ebenen hängt davon ab, ob das Gitter Γ_q oder Γ'_q ist; die in Kap. XIV, § 2 für die rhombischen Gitter abgeleiteten Resultate übertragen sich sinngemäß auf die Gitter Γ_q und Γ'_q . Für die Schaaren $\{\alpha\}$ und $\{\beta\}$ ist es unmittelbar der Fall; es sei noch erwähnt, daß beim Gitter Γ'_q die Ebenen der Schaaren $\{\alpha\}$ und $\{\beta\}$ in den Abständen $\frac{1}{2}\tau_y$ und $\frac{1}{2}\tau_x$ aufeinander folgen und abwechselnd die Translationen

$$\begin{aligned} 2) \quad & 0, \tau_x \text{ oder } \tau_z, \tau_x + \tau_z \text{ und} \\ & 0, \tau_y \text{ oder } \tau_z, \tau_y + \tau_z \end{aligned}$$

besitzen; da $\tau_x + \tau_y + \tau_z = 2\tau_d$ eine Translation von Γ'_q ist, so kann für $\tau_x + \tau_z$ auch τ_y und für $\tau_y + \tau_z$ auch τ_x eintreten. Das Gitter Γ'_q wird hier in der ersten Auffassung vorausgesetzt.

Um die Eigenschaften der Schaaren $\{\delta\}$ und $\{\varepsilon\}$ zu erhalten, haben wir die eben genannten Resultate in der Weise zu übertragen, daß wir δ und ε statt β und α als Seitenfläche der Figur Π_0 auffassen. Für die Anwendung der Sätze 3 und 4 von Kap. XIII erscheinen dann δ und ε als Grundfläche. Dies bewirkt, daß wir die Gitter Γ_c und Γ'_q als tetragonale Sonderfälle der sämtlichen vier Gitter $\Gamma_v, \Gamma'_v, \Gamma''_v, \Gamma'''_v$ betrachten müssen.

Wird das Gitter Γ'_q als Sonderfall des Gitters Γ_v und mit δ als Grundfläche aufgefaßt, so erscheint es als ein Gitter vom Typus Γ'_m mit seitenzentrierter Fläche γ , und zwar ist A der Zentrierungspunkt (Fig. 187). Wir bestimmen zunächst wieder das Ausgangsgitter Γ_m , aus dem es durch Zentrierung entsteht. Ihm kommen die Translationen $2\tau_1 = OC'$, $2\tau_2 = OC$, $2\tau_3 = OC_1$ zu, d. h. also

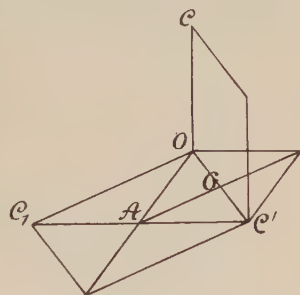


Fig. 187

$$2\tau_1 = 2\tau_x + 2\tau_y = 4\tau', \quad 2\tau_2 = 2\tau_z, \quad 2\tau_3 = 2\tau_x - 2\tau_y = 4\tau''.$$

Die Translationen des durch Einfügung von A entstehenden zentrierten Gitters stellen sich also in der Form dar

$$2\tau_1 = 4\tau', \quad 2\tau_2 = 2\tau_z, \quad 2\tau_3' = \tau_1 + \tau_3 = 2\tau_x^1).$$

Gemäß dem genannten Satz 4 folgen die zu δ parallelen spiegelnden Ebenen im Abstand $\tau'' = \frac{1}{2} AG$ aufeinander; ihre Translationskomponenten haben abwechselnd die Werte

$$3) \quad \begin{aligned} 0, \quad \tau_1 &= 2\tau' = \tau_x + \tau_y \text{ oder} \\ \tau_2 &= \tau_z, \quad \tau_2 + \tau_1 = \tau_x + \tau_y + \tau_z. \end{aligned}$$

¹⁾ Daß sie ein primitives Tripel von Γ_q bilden, ist klar; vgl. Kap. VIII, § 8.

Analog ist es für die Ebenenschaar $\{\varepsilon\}$. Ihren spiegelnden Ebenen kommen abwechselnd die Translationen

$$3a) \quad 0, 2\tau'' = \tau_x - \tau_y \text{ oder } \tau_z, \tau_x - \tau_y + \tau_z$$

zu; sie folgen im Abstand $\tau' = \frac{1}{2} OG$ aufeinander.

Kommt das Gitter I'_q als ein Sonderfall von $I'_{v'}$ in Betracht, so hat es, mit δ als Grundfläche, den Charakter des Gitters I_m mit dem Tripel (Fig. 188)

$$2\tau_1 = OG = 2\tau', \quad 2\tau_2 = OC = 2\tau_z, \quad 2\tau_3 = GA = 2\tau''.$$

In diesem Fall sind alle spiegelnden Ebenen von gleicher Art; sie folgen im Abstand τ'' , und τ hat einen der beiden Werte

$$4) \quad \tau = 0 \text{ oder } \tau = \tau'.$$

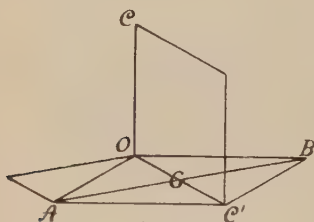


Fig. 188

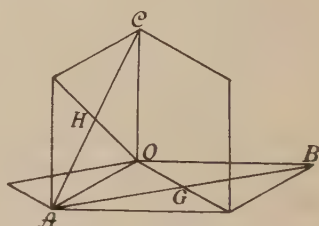


Fig. 188a

Analog ist es für die Schaar $\{\varepsilon\}$. Die Ebenen folgen im Abstand τ' mit den Translationen

$$4a) \quad \tau = 0 \text{ oder } \tau = \tau'.$$

Wird I'_q als ein Gitter $I'_{v''}$ aufgefaßt, so erscheint es, für δ als Grundfläche, als ein körperzentriertes Gitter I_m' (Fig. 188a). Das Gitter I_m , aus dem es durch Zentrierung entsteht, ist das eben betrachtete Gitter mit dem Tripel OG, OC, GA . Für dieses Gitter ist die Ebene α eine Diagonalebene und daher der Endpunkt H der Translation OH ein Zentrierungspunkt. Es kommen daher die in Kap. XIV, § 2 für das Gitter $I'_{v''}$ abgeleiteten Resultate zur Anwendung. Das Tripel von I_m bilden die obenstehenden Translationen

$$2\tau_1 = 2\tau', \quad 2\tau_2 = 2\tau_z, \quad 2\tau_3 = 2\tau'',$$

und für Γ_v'' ergeben sich daher die Translationen

$$2\tau_1 = 2\tau', 2\tau_2 = 2\tau_z, 2\tau_3' = \tau' + \tau'' + \tau_z = 2\tau_h.$$

Die spiegelnden Ebenen folgen im Abstand $\frac{1}{2}\tau''$, und ihre abwechselnden Translationen sind

$$5) \quad 0, \tau' + \tau_z \text{ oder } \tau', \tau_z.$$

Für die Schaar $\{\varepsilon\}$ stellen sich analog die Translationen

$$5a) \quad 0, \tau'' + \tau_z \text{ oder } \tau'', \tau_z$$

ein, und es folgen die Ebenen im Abstand $\frac{1}{2}\tau'$ aufeinander.

Wird endlich Γ_q' als ein Sonderfall von Γ_v''' angesehen, so hat es, für δ als Grundfläche, ebenfalls den Charakter des körperzentrierten Gitters Γ_m' . In der Ebene δ bilden (Fig. 189) $OM = 2\tau_1$ und $MC' = 2\tau_2$ ein primitives Paar; als ebene Stammfigur π_o von δ erscheint daher der durch das Dreieck OMC' bestimmte Rhombos. Das Gitter Γ_q' ist wieder in der

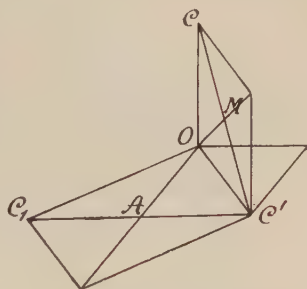


Fig. 189

Weise als zentriert aufzufassen, daß A der Zentrierungspunkt ist; es ist also körperzentriert und wir haben die in Kap. XIV für das Gitter Γ_v''' abgeleiteten Resultate zu übertragen. Ein Tripel des unzentrierten Gitters Γ_m bilden die Translationen

$$OM = 2\tau_1 = 2\tau_a, \quad MC' = 2\tau_2 = 2\tau_d''', \\ OC_1 = 2\tau_3 = 4\tau'';$$

als Tripel für Γ_q' ergeben sich daher die Werte

$$2\tau_1 = 2\tau_a, \quad 2\tau_2 = 2\tau_d''', \quad 2\tau_3' = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2\tau_x.$$

Die spiegelnden Ebenen der Schaar $\{\delta\}$ folgen also im Abstand τ'' aufeinander; ihre Translationen haben die abwechselnden Werte

$$6) \quad 0, \tau_a + \tau_d''' = \tau_x + \tau_y \text{ oder } \tau_a, \tau_d'''.$$

Analog finden sich für die Schaar $\{\varepsilon\}$ die Translationenwerte

$$6a) \quad 0, \tau_x - \tau_y \text{ oder } \tau_d', \tau_d'',$$

und es folgen sich die spiegelnden Ebenen im Abstand τ' . Da $\tau_x + \tau_y + \tau_z$ eine Translation von Γ_q' ist, so kann $\tau_x + \tau_y$ durch τ_z ersetzt werden, und dasselbe gilt für $\tau_x - \tau_y$.

§ 2. Die Gruppen der Symmetrie S_4 . Die Gruppe S_4 enthält die der vierzähligen Achse zweiter Art entsprechenden Operationen

$$1, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{A}}'^2, \bar{\mathfrak{A}}'^3, \bar{\mathfrak{A}}' = \bar{\mathfrak{A}}(\pi/2),$$

die ihr isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{S}_4$ bestehen daher aus den Operationen

$$7) \quad \Gamma_\tau, \{\bar{\mathfrak{A}}F_\tau\}, \{\bar{\mathfrak{A}}^2I_\tau\}, \{\bar{\mathfrak{A}}^3\tau\},$$

wo F_τ eine der beiden Gruppen Γ_q oder Γ_q' ist, und $\bar{\mathfrak{A}}$ eine zu $\bar{\mathfrak{A}}'$ isomorphe Operation. Gemäß Kap. IV, § 5 ist auch $\bar{\mathfrak{A}}$ eine Drehspiegelung $\bar{\mathfrak{A}}(\pi/2)$; wir gelangen daher nur dadurch zu verschiedenen Gruppen $\mathfrak{S}_4$, daß wir Γ_τ durch Γ_q oder Γ_q' ersetzen. Diese Gruppen sind

$$\mathfrak{S}_4^1 = \{\bar{\mathfrak{A}}(\pi/2); \Gamma_q\} \text{ und } \mathfrak{S}_4^2 = \{\bar{\mathfrak{A}}(\pi/2); \Gamma_q'\}.$$

Die Achsenfiguren stimmen, gemäß Kap. XII, § 4, mit denen der Gitter Γ_q und Γ_q' überein. Insbesondere wird das Fußpunktenetz für die Gruppe $\mathfrak{S}_4^1$ durch Fig. 85 dargestellt, das der Gruppe $\mathfrak{S}_4^2$ durch Figur 87 (S. 185). Ein weiterer Unterschied besteht in der Verteilung der Punkte, *die feste Punkte der vierzähligen Achsen zweiter Art sind*. Wir erhalten sie, wenn wir die erzeugende Drehspiegelung $\bar{\mathfrak{A}}(\pi/2)$ mit den Translationen des Gitters multiplizieren. Beim Gitter Γ_q läßt das Produkt von $\bar{\mathfrak{A}}(\pi/2)$ mit $2\tau_x$ und $2\tau_y$ *die spiegelnde Ebene unverändert*; alle vierzähligen Achsen a und b zweiter Art besitzen also hier die Ebene γ als Symmetrieebene. Beim Gitter Γ_q' haben wir zu bilden

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{A}}(\pi/2)\{\tau_x + \tau_y + \tau_z\} &= \mathfrak{S}_h\bar{\mathfrak{A}}(\pi/2)\{\tau_x + \tau_y + \tau_z\} \\ &= \mathfrak{S}_h\mathfrak{B}(\pi/2)\{\tau_z\} = \mathfrak{B}(\pi/2)\mathfrak{S}_h\{\tau_z\}, \end{aligned}$$

und es stellt $\mathfrak{S}_h\{\tau_z\}$ eine Spiegelung $\mathfrak{S}_h'$ an einer Ebene σ_h' dar, die von γ den Abstand $1/2 \tau_z$ besitzt, also die Ebene ν ist. Es sind also H' und K' die festen Punkte auf den Achsen b (Fig. 190). *Die festen Punkte der vierzähligen Achsen zweiter*

Art *a* und *b* haben daher die Höhendifferenz $\frac{1}{2}\tau_z$. Figur 190a zeigt die Achsenfigur für das flächenzentrierte Gitter Γ_q'' .

Auf jeder einzelnen Achse haben diese Punkte, wie ausdrücklich bemerkt sei, den Abstand τ_z voneinander; eine horizontale spiegelnde Ebene bedingt stets alle, die im Abstand τ_z aufeinander folgen.

1. Es gibt zwei Gruppen der Symmetrie S_4 ; eine mit dem Gitter Γ_q und eine mit Γ_q' .

§ 3. Die Gruppen der Symmetrie C_4 . Auch diese Gruppen

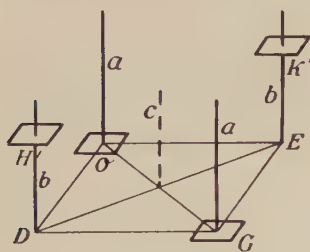


Fig. 190

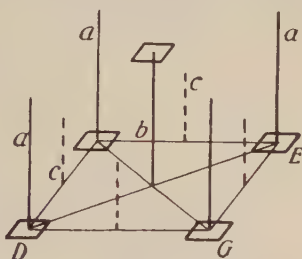


Fig. 190a

sind unmittelbar nach Kap. XII, § 4 zu bilden. Die Gruppe C_4 hat die Operationen

$$1, \mathcal{U}, \mathcal{U}^2, \mathcal{U}^3; \mathcal{U}' = \mathcal{U}(\pi/2),$$

jede ihr isomorphe Raumgruppe $\mathfrak{C}_4$ besteht daher aus den Operationen

$$8) \quad \Gamma_\tau, \{\mathcal{U}\Gamma_\tau\}, \{\mathcal{U}^2\Gamma_\tau\}, \{\mathcal{U}^3\Gamma_\tau\},$$

wenn Γ_τ eine der beiden Gruppen Γ_q oder Γ_q' und $\mathcal{U}$ eine zu $\mathcal{U}'$ isomorphe Operation ist, also eine Operation $\mathcal{U}(\pi/2, t)$, wo t gemäß § 1 einen der vier Werte

$$9) \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{2}\tau_z, \quad t = \tau_z, \quad t = \frac{3}{2}\tau_z$$

haben kann.

Bei den Gruppen mit dem Gitter Γ_q sind, wie wir schon in § 1, 2 sahen, alle vierzähligen Achsen gleichartig; ebenso sind es auch alle zweizähligen. Den obigen vier Werten von t

entsprechend finden wir daher vier verschiedene Gruppen, und zwar

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_4^1 &= \{\mathfrak{A}(\pi/2); \Gamma_q\}, \quad \mathfrak{G}_4^3 = \{\mathfrak{A}(\pi/2, \tau_z); \Gamma_q\} \\ \mathfrak{G}_4^2 &= \{\mathfrak{A}(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z); \Gamma_q\}, \quad \mathfrak{G}_4^4 = \{\mathfrak{A}(\pi/2, \frac{3}{2}\tau_z); \Gamma_q\}.\end{aligned}$$

Alle diese Gruppen besitzen nach Kap. XII, § 4 dasselbe Fußpunktenetz, und zwar das in Fig. 85 (S. 185) dargestellte Netz des Gitters Γ_q . Die vierzähligen Achsen gehen also durch die Ecke O und die Mitte G der Stammfigur π_0 ; die zweizähligen Achsen treffen die Seitenmitten D und E . Bei der Gruppe $\mathfrak{G}_4^1$ sind alle Achsen Drehungsachsen; bei $\mathfrak{G}_4^3$ sind alle vierzähligen Achsen Schraubenachsen, die zweizähligen (wegen Formel e)

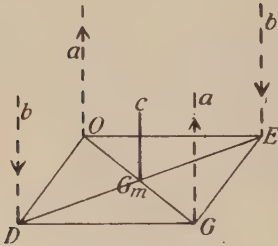


Fig. 191

von § 1) Drehungsachsen. Die Achsenfigur von $\mathfrak{G}_4^3$ entsteht also aus Figur 85, wenn die Achsen a und b in Schraubenachsen übergehen. Bei $\mathfrak{G}_4^2$ und $\mathfrak{G}_4^4$ sind alle Achsen Schraubenachsen; diese beiden Gruppen sind von *entgegengesetztem Windungssinn*¹⁾.

Für das Gitter Γ_q' können sich, wie ebenfalls schon in § 1 erwähnt ist, nur *zwei* verschiedene Gruppen einstellen; gemäß b) und c) treten die Schraubungen

$\mathfrak{A}(\pi/2)$ und $\mathfrak{B}(\pi/2, \tau_z)$, ebenso $\mathfrak{A}(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z)$ und $\mathfrak{B}(\pi/2, \frac{3}{2}\tau_z)$ zugleich auf. Wir erhalten so die beiden Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_4^5 &= \{\mathfrak{A}(\pi/2); \Gamma_q'\} = \{\mathfrak{B}(\pi/2, \tau_z); \Gamma_q'\} \\ \mathfrak{G}_4^6 &= \{\mathfrak{A}(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z); \Gamma_q'\} = \{\mathfrak{B}(\pi/2, \frac{3}{2}\tau_z); \Gamma_q'\}.\end{aligned}$$

Das Fußpunktenetz ist für beide Gruppen durch Fig. 87 (S. 186) bestimmt, und zwar ist die Achsenfigur der Gruppe $\mathfrak{G}_4^5$ dieselbe wie die des Gitters Γ_q' , also mit Figur 87 identisch. Von den vierzähligen Achsen gehen die Drehungsachsen durch O und G und die Schraubenachsen durch D und E ; die zweizähligen Achsen sind sämtlich Schraubenachsen. Bei der Gruppe

¹⁾ Figur 85 entspricht auch den Gruppen $\mathfrak{G}_4^2$ und $\mathfrak{G}_4^4$, und zwar so, daß alle Drehungsachsen in Schraubenachsen mit der gleichen Gleitungskomponente verwandelt werden.

$\mathfrak{C}_4^6$ sind alle vierzähligen Achsen Schraubenachsen (Fig. 191)¹⁾. Nach § 1d ist die vierzählige Schraubenachse a auch als zweizählige Achse eine Schraubenachse; nach Formel e) ist aber jetzt die durch G_m gehende zweizählige Achse c eine Drehungsachse. Die Gruppe $\mathfrak{C}_4^6$ enthält in a und b vierzählige Achsen von *beiderlei* Windungssinn.

Die Gruppen $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ sind diejenigen, für die auch die in § 1 genannte flächenzentrierte Auffassung des Gitters in Betracht kommt; ob die eine oder die andere Auffassung geboten ist, hängt davon ab, in welcher Weise die Richtungen τ_x und τ_y durch die Achsen der Gruppe bestimmt sind. Man erkennt aus den Achsenfiguren unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

2. Je nachdem bei den Gruppen $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ der Abstand zweier nächsten Achsen oder aber der Abstand zweier nächsten vierzähligen Achsen die Richtungen der Translationen $2\tau_x$ und $2\tau_y$ abgibt, erscheint das Gitter als flächenzentriert oder als körperzentriert.

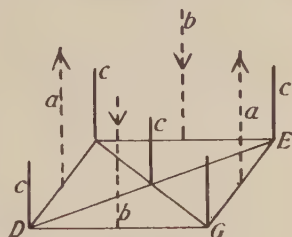


Fig. 192

Für die Gruppe $\mathfrak{C}_4^5$ ist diese doppelte Auffassung schon in den Achsenfiguren 87 und 88 zur Geltung gekommen, für die Gruppe $\mathfrak{C}_4^6$ ist die zweite Auffassung in Fig. 192 enthalten. Die Figur ist zugleich so geformt worden, daß die Drehungsachse c durch den Punkt O geht. Die Ebenen (ab) haben die diagonale Lage, die Ebenen zweier nächsten Achsen c sind den Quadratseiten parallel.

3. Es gibt sechs Gruppen der Symmetrie C_4 ; vier mit dem Gitter Γ_q und zwei mit Γ_q' .

§ 4. Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie C_4^v . Die Gruppe C_4^v erfüllt das Bildungsgesetz

$$C_4^v = \{C_4, \mathfrak{S}_v'\},$$

¹⁾ Die Figur enthält nur den vierten Teil der Grundfläche von Fig. 87.

wo $\mathfrak{S}_v'$ irgendeine Ebene durch die vierzählige Achse ist; die Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ sind daher mit einer zu $\mathfrak{S}_v'$ isomorphen Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ zu bilden. Die Gruppe C_4^v enthält vier durch diese Achse gehende Symmetrieebenen; daher kommen auch den Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ vier isomorphe Schaaren spiegeinder Ebenen zu. Die erzeugende Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ haben wir (Kap. XIV, § 1, 4) an der Hand der folgenden Bedingungen zu bestimmen. Sie muß erstens das Fußpunktenetz der Achsen in einer Geraden schneiden, die eine zweizählige Achse für dieses Netz ist; zweitens muß die ihr entsprechende Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$ auch für die Achsenschaaren eine erlaubte Deckoperation sein.

Als Ebenen der erzeugenden Operation bieten sich am natürlichsten die Ebenen der Schaaren $\{\delta\}$ und $\{\varepsilon\}$ dar. Da wir aber in Kap. VII als Ebene der erzeugenden Operation die Ebene β benutzt haben, so wollen wir auch hier eine Ebene der Schaar $\{\beta\}$ für die Erzeugung wählen. Dies hat zugleich den sachlichen Vorteil, daß wir *diese Operation direkt aus Kap. XIV entnehmen können*. Eine jede vierzählige Achse ist auch eine zweizählige, und daher können offenbar nur solche erzeugenden Operationen der Schaar $\{\beta\}$ auftreten, die auch in Kap. XIV zur Ableitung der rhombischen Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ benutzt wurden. Die durch sie bedingten Operationen an den Ebenen der Schaaren $\{\delta\}$ und $\{\varepsilon\}$ nehmen wir aber auch in die definierenden Gleichungen auf.

Wir stellen zunächst die Formeln auf, nach denen sich die Operationen an den verschiedenen Ebenen gegenseitig bedingen. Es ist (Kap. II, Satz 10 und 8)

$$a) \quad \mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{S}_\beta = \mathfrak{S}_\delta \quad \text{und} \quad b) \quad \mathfrak{S}_\beta \cdot \mathfrak{I}_x = \mathfrak{S}_\mu.$$

Aus a) folgt weiter

$$a') \quad \mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{S}_\beta(\tau_z) = \mathfrak{S}_\delta(\tau_z);$$

ferner liefert die Gleichung b)

$$\mathfrak{S}_\beta \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_y = \mathfrak{S}_\mu(\tau_y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_\beta \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_y \mathfrak{I}_z = \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z).$$

Mittels dieser Formeln ergibt sich, wenn wir nunmehr die Gleichung a) rechtsseitig mit $\tau_x + \tau_y$ und $\tau_x + \tau_y + \tau_z$ multiplizieren

$$c) \quad \mathfrak{A}(\pi/2) \mathfrak{S}_\mu(\tau_y) = \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y)$$

$$d) \quad \mathfrak{A}(\pi/2) \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z) = \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y + \tau_z).$$

Durch Multiplikation der Gleichungen c), d) mit τ_z ergeben sich die entsprechenden Formeln für die Operation $\mathfrak{A}(\pi/2, \tau_z)$, nämlich

$$c') \quad \mathfrak{A}(\pi/2, \tau_z) \mathfrak{S}_\mu(\tau_y) = \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y + \tau_z)$$

$$d') \quad \mathfrak{A}(\pi/2, \tau_z) \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z) = \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y) \cdot \{2\tau_z\}.$$

Diesen Formeln ist die Operation $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$ an der Ebene δ unmittelbar zu entnehmen. Sie bedingt zunächst eine Operation an der Ebene ζ , nämlich diejenige, die aus $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$ durch Drehung oder Schraubung um die vierzählige Achse a hervorgeht¹⁾; von ihr schließen wir nach den Resultaten von § 1, 5 auf die Operation $\mathfrak{S}_\varepsilon(\tau)$ an der Ebene ε . Übrigens gehen auch die Operationen an den Ebenen α und β , an λ und μ , endlich auch an ϑ und η durch Drehung um a (also durch Transformation mit $\mathfrak{A}$) auseinander hervor; was Zeichnung und Verständnis der Achsenfiguren erleichtert.

§ 5. Die Gruppen der Symmetrie C_4^v . Von den Gruppen $\mathfrak{C}_4$ mit dem Gitter Γ_q sind nur $\mathfrak{C}_4^1$ und $\mathfrak{C}_4^3$ zur Erzeugung einer Gruppe $\mathfrak{C}_{4v}$ tauglich. Ihre Achsen sind als zweizählige Achsen Drehungsachsen und bilden daher eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_2^1$ traten in Kap. XIV, § 3 nur

$$10) \quad \mathfrak{S}_\beta(\tau) \text{ und } \mathfrak{S}_\mu(\tau)$$

als erzeugende Operationen auf, und zwar kann τ an sich einen der vier Werte

$$11) \quad \tau = 0, \tau = \tau_z, \tau = \tau_y, \tau = \tau_y + \tau_z$$

haben. Hier führen jedoch nicht alle diese Werte zu Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$, da ja die vierzählige und die zweizählige Achsenschaar gesondert in sich übergehen muß.

Für die Gruppe $\mathfrak{C}_4^1$ sind, wie Figur 85 (S. 185) zeigt, nur

$$12) \quad \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\beta(\tau_z), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)$$

¹⁾ Die Operation ist dieselbe, wenn a Drehungsachse oder Schraubensachse ist.

zulässige Deckoperatione, während $\mathfrak{S}_\mu$ und $\mathfrak{S}_\beta(\tau_y)$, ebenso $\mathfrak{S}_\mu(\tau_x)$ und $\mathfrak{S}_\beta(\tau_y + \tau_z)$ auszuschließen sind, und dasselbe zeigt die Achsenfigur 191 für die Gruppe $\mathfrak{U}_4^3$. Wir erhalten so die Gruppen¹⁾

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{4v}^1 &= \{\mathfrak{U}_4^1, \mathfrak{S}_\beta; \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta; \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y) \\ \mathfrak{U}_{4v}^2 &= \{\mathfrak{U}_4^1, \mathfrak{S}_\mu(\tau_y); \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y); \mathfrak{S}_\varepsilon \\ \mathfrak{U}_{4v}^3 &= \{\mathfrak{U}_4^3, \mathfrak{S}_\beta(\tau_z); \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta; \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y) \\ \mathfrak{U}_{4v}^4 &= \{\mathfrak{U}_4^3, \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z); \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y), \mathfrak{S}_\varepsilon \\ \mathfrak{U}_{4v}^5 &= \{\mathfrak{U}_4^1, \mathfrak{S}_\beta(\tau_z); \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y + \tau_z) \\ \mathfrak{U}_{4v}^6 &= \{\mathfrak{U}_4^1, \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z); \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y + \tau_z); \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z) \\ \mathfrak{U}_{4v}^7 &= \{\mathfrak{U}_4^3, \mathfrak{S}_\beta; \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y + \tau_z) \\ \mathfrak{U}_{4v}^8 &= \{\mathfrak{U}_4^3, \mathfrak{S}_\mu(\tau_y); \Gamma_q\}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y + \tau_z); \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z).\end{aligned}$$

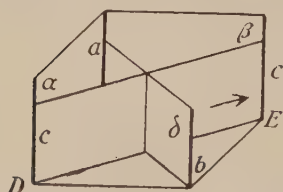


Fig. 193

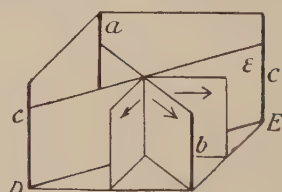


Fig. 194

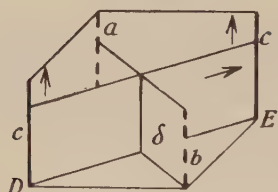


Fig. 195

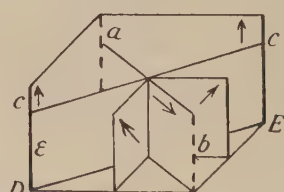


Fig. 195 a

Die Figuren 193, 194, 195, 195a, 196, 196a entsprechen den Gruppen $\mathfrak{U}_{4v}^1, \mathfrak{U}_{4v}^2, \mathfrak{U}_{4v}^3, \mathfrak{U}_{4v}^4, \mathfrak{U}_{4v}^7, \mathfrak{U}_{4v}^8$. Durch Zufügung der Translation τ_z in *allen* Ebenen der Figuren 193, 194 ergeben sich die Figuren für die Gruppen $\mathfrak{U}_{4v}^5$ und $\mathfrak{U}_{4v}^6$.

Da die Gruppe $\mathfrak{U}_4^6$ vierzählige Schraubenachsen von beiderlei Windungssinn enthält, so gestatten sowohl $\mathfrak{U}_4^5$ wie auch $\mathfrak{U}_4^6$ die Ableitung einer Gruppe $\mathfrak{U}_{4v}$. Bei der Gruppe $\mathfrak{U}_4^5$ entspricht

¹⁾ Die Numerierung der Gruppen ist die gleiche geblieben, wie in der ersten Bearbeitung; sie richtete sich dort nach den Operationen $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$.

das Gitter Γ_q' dem Gitter Γ_v''' ; daher können für sie nur solche erzeugenden Operationen auftreten, die sich in Kap. XIV bei der Erzeugung der Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ mit dem Gitter Γ_v''' einstellten, und dies sind wiederum nur die Operationen $\mathfrak{S}_\beta(\tau)$ und $\mathfrak{S}_\mu(\tau)$. Gemäß § 1e kommen aber bei den hier abzuleitenden Gruppen Operationen an den Ebenen β und μ zugleich vor; wir können uns daher entweder auf $\mathfrak{S}_\beta(\tau)$ oder auf $\mathfrak{S}_\mu(\tau)$ als erzeugende Operation beschränken. Die Werte von τ sind gemäß § 1 entweder

- 13) 0 und τ_y oder τ_z und $\tau_y + \tau_z^1$.

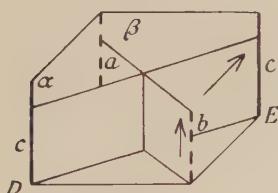


Fig. 196

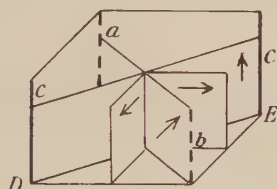


Fig. 196a

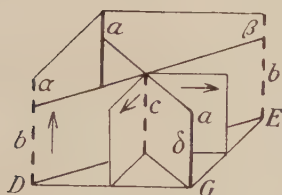


Fig. 197

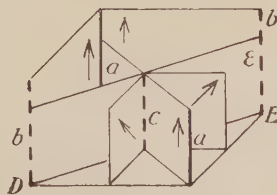


Fig. 197a

Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_4^5$ (Fig. 86, S. 186) sind die Achsen (a) Drehungsachsen und die Achsen (b) Schraubenachsen; jede der beiden Schaaren muß daher gesondert in sich übergehen. Wählen wir $\mathfrak{S}_\beta(\tau)$ als erzeugende Operation, so ist dies nur für $\tau = 0$ und $\tau = \tau_z$ der Fall, aber nicht für $\tau = \tau_y$ und $\tau = \tau_y + \tau_z$. Wir erhalten so aus $\mathfrak{C}_4^5$ die beiden Gruppen (Fig. 197 und 197a)

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{4v}^9 &= \{\mathfrak{C}_4^5, \mathfrak{S}_\beta; \Gamma_q'\}; \mathfrak{S}_\delta; \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z) \\ \mathfrak{C}_{4v}^{10} &= \{\mathfrak{C}_4^5, \mathfrak{S}_\beta(\tau_z); \Gamma_q'\}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \mathfrak{S}_\varepsilon.\end{aligned}$$

¹⁾ τ_z ist wegen der Translation $2\tau_d$ mit $\tau_y + \tau_x$ gleichwertig.

Die in diesen Gleichungen für die Ebenen δ und ε enthaltenen Operationen ergeben sich, wie in den früheren Fällen, aus den Formeln von § 4; wir leiten sie, zumal im Hinblick auf die aus $\mathfrak{G}_4^6$ zu gewinnenden Gruppen, noch auf folgende Weise ab. Wie in § 1, 5 erwähnt wurde, nimmt das Gitter Γ_q' für die Ebenen δ und ε als Seitenflächen der Stammfigur den Charakter des Gitter Γ_v'' an. Fassen wir also die vierzähligen Achsen wieder als zweizählige auf, so können die sich bildenden Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}$ nur solche sein, die dem Gitter Γ_v „entsprechen, also die Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}^{18}$ und $\mathfrak{G}_{2v}^{19}$ von Kap. XIV, § 5. In diesen Gruppen sind die Operationen

$$14) \quad \mathfrak{S}_\delta, \mathfrak{S}_\delta(\tau_z), \mathfrak{S}_\delta(\tau_d'''), \mathfrak{S}_\delta(\tau_d)$$

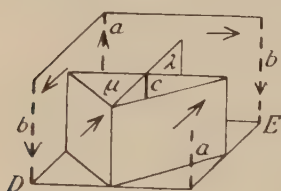


Fig. 198

enthalten; sie sind es also, die bei den aus $\mathfrak{G}_4^5$ und $\mathfrak{G}_4^6$ entstehenden Gruppen $\mathfrak{G}_{4v}$ auftreten. Die ersten beiden erscheinen nach Formel a) und a') in den aus $\mathfrak{G}_4^5$ abgeleiteten Gruppen; die letzten beiden werden sich für $\mathfrak{G}_4^6$ einstellen.

Bei der Gruppe $\mathfrak{G}_4^6$ sind nämlich a und b entgegengesetzte Schraubenachsen; die zulässigen Operationen $\mathfrak{S}_v(\tau)$ müssen also a und b miteinander vertauschen: Es ist daher δ keine Symmetrieebene für die Achsenschaaren und es treten somit notwendig die beiden Operationen $\mathfrak{S}_\delta(\tau_d''')$ und $\mathfrak{S}_\delta(\tau_d)$ auf. Wählen wir $\mathfrak{S}_\mu(\tau)$ als erzeugende Operation, so sind wieder $\tau = 0$ und $\tau = \tau_z$ die zulässigen, dagegen τ_y und $\tau_y + \tau_z$ die unzulässigen Werte von τ . Wir erhalten so die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{4v}^{11} &= \{ \mathfrak{G}_4^6, \mathfrak{S}_\mu; \Gamma_q' \}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_d); \mathfrak{S}_\eta(\tau_d'') \\ \mathfrak{G}_{4v}^{12} &= \{ \mathfrak{G}_4^6, \mathfrak{S}_\mu(\tau_z); \Gamma_q' \}; \mathfrak{S}_\delta(\tau_d'''); \mathfrak{S}_\eta(\tau_d'). \end{aligned}$$

Da die Ebene μ durch die zweizählige Drehungsachse c geht, so bedingt sie auch die Symmetrieebene λ (Fig. 198)¹⁾.

¹⁾ In die Figur ist der Deutlichkeit halber nicht die Operation $\mathfrak{S}_\eta(\tau_d')$ aufgenommen, sondern die Operation an der ihr parallelen Ebene. Aus Fig. 198 ergibt sich durch Zusatz von $\pm \tau_z$ in allen Ebenen die Achsenfigur für $\mathfrak{G}_{4v}^{12}$.

Einfacher gestaltet sich das Bildungsgesetz beider Gruppen, wenn wir für $\mathfrak{C}_4^6$ die Achsenfigur 192 zugrunde legen, in der Γ_q' als ein flächenzentriertes Gitter Γ_q'' erscheint. Sie zeigt unmittelbar, daß sie die Operationen $\mathfrak{S}_\delta$ und $\mathfrak{S}_\delta(\tau_z)$ zuläßt, und daß neben $\mathfrak{S}_\delta$ auch $\mathfrak{S}_\varepsilon$ auftritt. Wir erhalten so für $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$ und $\mathfrak{C}_{4v}^{12}$ die neue Form

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathfrak{C}_{4v}^{11} &= \{ \mathfrak{C}_4^6, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_q''; \mathfrak{S}_\varepsilon \} \\ \mathfrak{C}_{4v}^{12} &= \{ \mathfrak{C}_4^6, \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \Gamma_q'' \}; \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z). \end{aligned}$$

Die zu α und β parallelen spiegelnden Ebenen sind diejenigen, die den Ebenen ϑ und η der vorigen Erzeugung entsprechen; sie fallen in Figur 198a in die Mittelebenen λ' und μ' zwischen α und λ einerseits und β und μ andererseits, mit den Werten $\mathfrak{S}_{\lambda'}(\tau_h)$, $\mathfrak{S}_{\mu'}(\tau_k)$ und $\mathfrak{S}_{\lambda'}(\tau_{h'})$ und $\mathfrak{S}_{\mu'}(\tau_{k'})$.

4. Es gibt zwölf Gruppen der Symmetrie C_4^v ; acht mit dem Gitter Γ_q und vier mit Γ_q' .

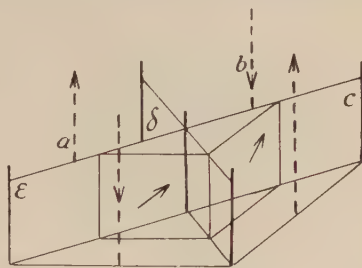


Fig. 198a

§ 6. Die Gruppen der Symmetrie C_4^h . Von der Gleichung

$$C_4^h = \{ C_4, \mathfrak{S}_h' \} = \{ C_4, \mathfrak{I}' \}$$

wollen wir für die Erzeugung der Gruppen $\mathfrak{C}_{4h}$ den zweiten Teil benutzen. Danach werden wir die Gruppen $\mathfrak{C}_{4h}$ aus den Gruppen $\mathfrak{C}_4$ mittels einer Inversion geeigneter Lage ableiten; nur die Gruppen

$$\mathfrak{C}_4^1, \mathfrak{C}_4^3, \mathfrak{C}_4^5, \mathfrak{C}_4^6$$

sind wiederum verwendbar. Die aus ihnen erzeugbaren Gruppen $\mathfrak{C}_{4h}$ enthalten aber auch Operationen $\mathfrak{S}_h(\tau)$; für ihre Bestimmung benutzen wir die Formeln, die wir in Kap. XIII, § 6 für die dort mit $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$ bezeichneten Inversionen ableiteten. Wir haben die vierzähligen Achsen wieder als zweizählige aufzufassen und die Formeln so anzuwenden, daß wir von den Inversionen ausgehen und die Art der Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$ sowie

die Lage der Ebene σ_h aus ihnen ablesen. Das Inversionszentrum kann auch hier in eine Achse fallen oder in die Mitte zwischen zwei Achsen; im ersten Fall hat es die Lage, wie die Inversion $\mathfrak{I}$ oder $\mathfrak{I}_1$ von Kap. XIII, im zweiten Fall entspricht es den Inversionen $\mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{I}_3$.

Für die Gruppen $\mathfrak{C}_4^1$ und $\mathfrak{C}_4^3$ ist die Achse a als zwei-zählige Achse eine Drehungsachse. Fällt daher das Inversionszentrum in den Punkt O von a oder in den Punkt G_m von Figur 85 oder 87, so bedingt es nach Formel a) und c) von Kap. XIII eine Spiegelung $\mathfrak{S}_h$ oder eine Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_h(\tau)$ an der durch O gehenden Ebene σ_h , und zwar ist hier

$$\tau = 2 OG_m = OG = \tau_x + \tau_y.$$

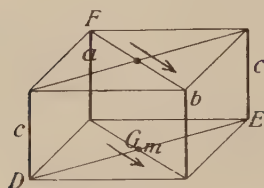


Fig. 199

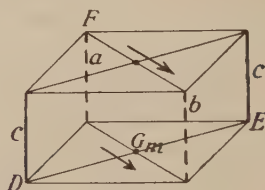


Fig. 200

Wir bezeichnen die diesen Punkten entsprechenden Inversionen jetzt durch $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_g$ und erhalten so die Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{4h}^1 &= \{\mathfrak{C}_4^1, \mathfrak{I}; \Gamma_q\} = \{\mathfrak{C}_4^1, \mathfrak{S}_h\} \\ \mathfrak{C}_{4h}^2 &= \{\mathfrak{C}_4^3, \mathfrak{I}; \Gamma_q\} = \{\mathfrak{C}_4^3, \mathfrak{S}_h\} \\ \mathfrak{C}_{4h}^3 &= \{\mathfrak{C}_4^1, \mathfrak{I}_g; \Gamma_q\} = \{\mathfrak{C}_4^1, \mathfrak{S}_h(\tau_x + \tau_y)\} \\ \mathfrak{C}_{4h}^4 &= \{\mathfrak{C}_4^3, \mathfrak{I}_g; \Gamma_q\} = \{\mathfrak{C}_4^3, \mathfrak{S}_h(\tau_x + \tau_y)\}.\end{aligned}$$

Die spiegelnden Ebenen sind für jede dieser Gruppen von gleicher Art und folgen im Abstand τ_z . Es mag genügen, die Achsenfiguren für $\mathfrak{C}_{4h}^3$ und $\mathfrak{C}_{4h}^4$ zu zeichnen (Fig. 199 und Fig. 200).

Für die Gruppen $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ folgen die spiegelnden Ebenen dem Satz 4 von Kap. XIII; ihnen kommen entweder 0 und $\tau_x + \tau_y$ oder τ_x und τ_y als Translationen zu. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_4^5$ sind die vierzähligen Achsen a Drehungsachsen und die Achsen b Schraubenachsen; sie gestattet daher nur solche In-

§ 7. Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie V^a .

Die Gruppe V^a entsteht aus V gemäß dem Bildungsgesetz

$$V^a = \{V, \mathfrak{S}_a'\} = \{S_4, \mathfrak{U}'\},$$

und zwar halbiert die Ebene σ_a' der Spiegelung $\mathfrak{S}_a'$ die Winkel zwischen der positiven u - und v -Achse; die u - und v -Achse werden für die Gruppe V^a gleichwertig. Im Anschluß an diese Erzeugung bilden wir die Gruppen $\mathfrak{B}_a$ aus den Gruppen $\mathfrak{B}$ mittels einer Operation $\mathfrak{S}_a(\tau)$, deren Ebene zu σ_a' parallel ist. Folgende allgemeine Hinweise schicken wir voraus.

1) Die w -Achse ist in V^a eine vierzählige Achse zweiter Art, und daher eine zweizählige Drehungsachse. Dies überträgt sich isomorph auf die Gruppen $\mathfrak{B}_a$; eine ihrer Achsenschaaren muß daher die vierzähligen Achsen liefern, während die beiden andern Achsenschaaren sich vertauschen. Nun ist eine jede Gruppe $\mathfrak{B}$ entweder nach allen drei Richtungen symmetrisch gebaut, oder wenigstens für die u - und v -Achsen; wir dürfen daher bestimmen, daß in allen Fällen die vierzähligen Achsen zweiter Art der Achsenschar $\{w\}$ angehören. Da eine vierzählige Achse zweiter Art eine zweizählige Drehungsachse ist, so können Gruppen $\mathfrak{B}_a$ nur aus solchen Gruppen $\mathfrak{B}$ hervorgehen, in denen zweizählige Drehungsachsen auftreten, also aus

$$\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^3, \mathfrak{B}^6, \mathfrak{B}^7, \mathfrak{B}^8, \mathfrak{B}^9.$$

2) Wie in der Punktgruppe V^a die Gruppe S_4 als Untergruppe enthalten ist, so ist auch in jeder Gruppe $\mathfrak{B}^a$ eine Gruppe $\mathfrak{S}_4$ enthalten, und zwar (§ 2) die Gruppe $\mathfrak{S}_4^1$ oder $\mathfrak{S}_4^2$, je nachdem das Gitter Γ_q oder Γ_q' ist. In den Gruppen $\mathfrak{S}_4$ treten vierzählige Achsen zweiter Art und zweizählige Achsen auf, das gleiche gilt also auch für die Gruppen $\mathfrak{B}_a$. Welche Achsen einer Gruppe $\mathfrak{B}$ für die aus ihr entstehende Gruppe $\mathfrak{B}_a$ vierzählige Achsen werden, hängt von dem einzelnen Fall ab; auf einen allgemeinen Umstand sei jedoch schon hier hingewiesen, wir beschränken uns dabei auf die Gruppen $\mathfrak{B}$ mit dem Gitter Γ_v . Ihre Achsenfiguren haben vier vertikale Kanten; von ihnen können also nur zwei die Rolle der Achsen a und b von Fig. 85 und 87 (S. 185) übernehmen. *Welche es sind, ist gleichgültig, da jedes Paar gleiche Lage zur Achsengesamtheit*

hat. Es wird aber nur *eines* dieser Paare zu vierzähligen Achsen, und daher haben in der Gruppe $\mathfrak{B}_d$ selbst die beiden Achsenpaare *verschiedene* Bedeutung. Dies gilt in ähnlicher Weise auch für die Gruppen $\mathfrak{B}$ mit dem Gitter Γ_v''' . Um übrigens die Beziehung der Gruppen $\mathfrak{B}$ zu den Gruppen $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{B}_d$ durchsichtiger zu machen, werden wir in den Achsenfiguren die Achsen w der Gruppen $\mathfrak{B}$ *in der Weise bezeichnen, wie es dem tetragonalen Typus entspricht*, also durch a, b, c ; nur die Bezeichnung der Achse w' von Figur 144a und 144b behalten wir bei. Achsenfiguren, die sich durch Einfügung von τ_z in alle spiegelnden Ebenen ergeben, sind wiederum nicht gesondert gezeichnet.

3) Um die vierzähligen Achsen zweiter Art und ihre *festbleibenden* Punkte für die einzelnen Gruppen $\mathfrak{B}_d$ zu bestimmen, haben wir einige Formeln nötig. Wir schließen sie zweckmäßig von vornherein an die Achsenfiguren an, für die sie erforderlich sind, und beginnen mit der Formel (S. 84, Fig. 24)

$$a) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{S}_\delta = \mathfrak{S}_h\mathfrak{A}(\pi/2) = \mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{S}_h.$$

Sie entspricht z. B. der Gruppe $\mathfrak{B}^1$ und besagt, daß die Spiegelung $\mathfrak{S}_\delta$ mit der horizontalen zweizähligen Achse u von Fig. 140 eine vierzählige Achse a zweiter Art bedingt, die durch den Schnitt O von u und δ geht; die Ebene $\gamma = \sigma_h$ ist die spiegelnde Ebene und O der festbleibende Punkt. Durch Multiplikation mit τ_z folgt aus ihr

$$b) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{S}_\delta(\tau_z) = \mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{S}_h\mathfrak{I}_z = \mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{S}_\nu,$$

wo $\mathfrak{S}_\nu$ die Spiegelung an der Ebene ν ist, die durch den Punkt F_m hindurchgeht. In diesem Fall ist also F_m der feste Punkt der vierzähligen Achse a zweiter Art.

Diese Formeln haben wir zu verallgemeinern. Bei der Gruppe $\mathfrak{B}^3$ (Fig. 142, S. 318) treten $\mathfrak{S}_\delta$ und die Umschraubung $\mathfrak{U}(\tau_x)$ um die in γ liegende Achse u als erzeugende Operationen auf. Wir finden durch linksseitige Multiplikation von a) mit τ_x

$$\mathfrak{U}(\tau_x)\mathfrak{S}_\delta = \mathfrak{I}_x\mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{S}_h,$$

wo aber die Achse a dieser Formel durch den Schnittpunkt G_m von u und δ geht. Nun stellt nach Kap. III, § 1 das Produkt

$\mathfrak{I}_x \mathfrak{A}(\pi/2)$ eine Drehung $\mathfrak{C}(\pi/2)$ um die durch E gehende Achse c dar, und so folgt:

$$c) \quad \mathfrak{U}(\tau_x) \mathfrak{S}_\delta = \mathfrak{C}(\pi/2) \mathfrak{S}_h.$$

In diesem Fall wird also c eine vierzählige Achse zweiter Art mit E als festem Punkt.

Eine vierte Formel bedürfen wir für die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ (Fig. 144 a) und zwar für die Operation $\mathfrak{S}_\delta(\tau')$ an der Ebene δ . Da $\mathfrak{S}_\delta = \mathfrak{S}_\delta \cdot \{\tau''\}$ ist und $\tau' + \tau'' = \tau_x$, so erhalten wir, bei Benutzung von Gleichung a)

$$\mathfrak{U} \mathfrak{S}_\delta(\tau') = \mathfrak{U} \mathfrak{S}_\delta \cdot \{\tau' + \tau''\} = \mathfrak{S}_h \mathfrak{A}(\pi/2) \cdot \{\tau_x\}.$$

Aber $\mathfrak{A}(\pi/2) \cdot \{\tau_x\}$ ist nach Kap. III, § 1 die Drehung $\mathfrak{B}'(\pi/2)$ um die Achse w' von Fig. 144 a, und so folgt

$$d) \quad \mathfrak{U} \mathfrak{S}_\delta(\tau') = \mathfrak{S}_h \cdot \mathfrak{B}'(\pi/2);$$

es ist also w' die vierzählige Achse und G_m der feste Punkt.

Eine letzte Hilfsformel macht die Gruppe $\mathfrak{B}^9$ (Fig. 145, S. 321) nötig. Sie besitzt eine Drehungsachse u , die δ in G_m schneidet; als erzeugende Operation werden wir $\mathfrak{S}_\delta(\tau_a)$ zu verwenden haben, und zwar ist

$$\tau_a = \frac{1}{2} \tau_x + \frac{1}{2} \tau_y + \frac{1}{2} \tau_z = \tau' + \frac{1}{2} \tau_z.$$

Durch Multiplikation von a) mit τ_a finden wir, da τ' mit $\mathfrak{S}_h$ vertauschbar ist,

$$\mathfrak{U} \mathfrak{S}_\delta(\tau_a) = \mathfrak{A}(\pi/2) \{\tau'\} \mathfrak{S}_h \cdot \{\frac{1}{2} \tau_z\},$$

wo die Achse a wieder durch G_m geht. Hier ist (Kap. III, § 1) das Produkt $\mathfrak{A}(\pi/2) \{\tau'\}$ eine Drehung $\mathfrak{B}(\pi/2)$ um die in der Ebene α' liegende Achse der Figur 145, die wir jetzt mit c bezeichnen wollen. Ferner liefert das Produkt $\mathfrak{S}_h \{\frac{1}{2} \tau_z\}$ die Spiegelung $\mathfrak{S}_{\nu'}$ an einer Ebene ν' , die von $\sigma_h = \gamma$ den Abstand $\frac{1}{4} \tau_z$ besitzt, also die Mittelebene zwischen ν und γ ist; ihr Schnittpunkt mit c ist der festbleibende Punkt. Wir erhalten so

$$e) \quad \mathfrak{U} \mathfrak{S}_\delta(\tau_a) = \mathfrak{C}(\pi/2) \mathfrak{S}_{\nu'}.$$

5) Für die spiegelnden Ebenen kommen die in § 1 über die Schaaren $\{\delta\}$ und $\{\varepsilon\}$ abgeleiteten Sätze in Betracht. Die dort abgeleiteten Resultate lehren zunächst, welche Arten von

spiegelnden Ebenen bei jeder der hier entstehenden Gruppen an sich auftreten können. Die Lage der einzelnen erzeugenden Ebenen zum Gitter und zum Fußpunktenetz bedarf, wie immer, für jede einzelne Gruppe gesonderter Betrachtung. Der folgende Gedanke wird uns dabei nützlich sein; wir können von den über die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ abgeleiteten Resultaten in gleicher Weise Gebrauch machen, wie in § 4. Die Operation $\mathfrak{S}_a(\tau)$ bestimmt nämlich mit den Achsen der Gruppen $\mathfrak{C}_4$, wenn wir sie wieder nur als zweizählige Achsen auffassen, je eine Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}$; ist sie bekannt, so kann man aus ihrer Gleichung ihre erzeugende Operation ablesen und erhält so die mögliche erzeugende Operation für die bezügliche Gruppe $\mathfrak{B}_a$. Die Auffindung dieser Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}$ ist daher die Aufgabe, die wir in jedem Fall zuerst lösen. Dabei ist zu beachten, daß hier die Ebene δ an die Stelle der in Kap. XIV benutzten Ebene β als Seitenfläche der Figur II, zu setzen ist, und daher den dortigen Ebenen λ, μ hier die Ebenen ϑ, η entsprechen.

§ 8. Die Gruppen der Symmetrie V^d . Wir beginnen mit den Gruppen $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^3$. Ihr Gitter Γ_v nimmt für δ als Seitenfläche den Charakter des Gitters Γ_v' an. Die sich hier einstellenden Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ sind daher unter denen zu suchen, die Γ_v' als Gitter enthalten, und zwar Γ_v' mit zentrierter Grundfläche, und das sind die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{11}, \mathfrak{C}_{2v}^{12}, \mathfrak{C}_{2v}^{13}$. Von ihnen kommt die Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{12}$ nicht in Frage, da ihre zweizähligen Achsen Schraubenachsen sind. Die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$ sind demnach diejenigen, die sich in den aus $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^3$ entstehenden Gruppen $\mathfrak{B}_a$ allein einstellen können; wir lernen aus ihren Erzeugungsgleichungen, daß nur $\mathfrak{S}_\delta$ und $\mathfrak{S}_\delta(\tau_z)$ als erzeugende Operationen zu verwenden sind. Sie sind auch tatsächlich Deckoperationen für $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^3$. Wir erhalten so aus $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^3$ je zwei Gruppen; wir wollen in ihre Gleichungen auch eine spiegelnde Ebene der Schaar $\{\varepsilon\}$ aufnehmen und können sie in die Form setzen

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_a^1 &= \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_q\} = \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y)\} \\ \mathfrak{B}_a^2 &= \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \Gamma_q\} = \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y + \tau_z)\} \\ \mathfrak{B}_a^3 &= \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_q\} = \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y)\} \\ \mathfrak{B}_a^4 &= \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \Gamma_q\} = \{\mathfrak{B}^3, \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y + \tau_z)\}.\end{aligned}$$

Die hier auftretende Operation an der Ebene ε läßt sich, wenn sie nicht unmittelbar in Evidenz tritt, aus den Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}$ in der gleichen Weise entnehmen, wie die erzeugende Operation selbst. Diese Gleichungen enthalten nämlich auch eine Operation gegen die Ebene α oder eine ihr parallele Ebene, und der entspricht hier eine Operation gegen eine Ebene der Schaar $\{\varepsilon\}$. Insbesondere entspricht der Ebene α selbst die durch die Achse a gehende Ebene ζ , und falls die Gleichung für $\mathfrak{G}_{2v}$ die Operation gegen α gibt, so kennen wir sie auch für ζ und können sie gemäß § 1, Gl. 3a) unmittelbar für ε selbst ablesen. In dieser Weise ist oben verfahren worden.

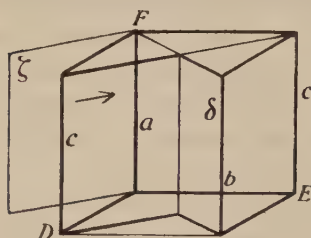


Fig. 203

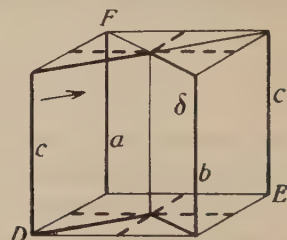


Fig. 204

Die spiegelnden Ebenen schneiden die Seite OA in O , D und A , Figur 203 und 204 geben die Achsenfiguren für $\mathfrak{B}_a^1$ und $\mathfrak{B}_a^{31}$.

Nach den Formeln a) und b) sind für die beiden Gruppen $\mathfrak{B}_a^1$ und $\mathfrak{B}_a^2$ die Achsen a und b die vierzähligen Achsen; für $\mathfrak{B}_a^1$ sind die Punkte O und G , für $\mathfrak{B}_a^2$ aber F_m und G' die festen Punkte. Für die Gruppen $\mathfrak{B}_a^3$ und $\mathfrak{B}_a^4$ dagegen sind nach Formel c) die Achsen c vierzählig; für die Gruppe $\mathfrak{B}_a^3$ sind D und E die festen Punkte, für $\mathfrak{B}_a^4$ dagegen H' und K' .

Die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ enthält das Gitter $\Gamma_{v'}$. Die Achse w' der Achsenfigur 144a bewirkt hier, wie wir schon in § 1 erwähnten, daß das Gitter $\Gamma_{v'}$, wenn wir δ als Seitenfläche wählen, den Charakter des Gitters Γ_v annimmt. Die sich für $\mathfrak{B}^6$ einstellenden Gruppen $\mathfrak{G}_{2v}$ sind daher unter den Gruppen des § 3 von Kap. XIV enthalten. Da aber die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ nur Drehungs-

¹⁾ Die Ebene ζ ist in Figur 203 ebenfalls enthalten; bei den folgenden Figuren erschien sie entbehrlich.

achsen besitzt, so können nur $\mathfrak{G}_{2v^1}$, $\mathfrak{G}_{2v^3}$, $\mathfrak{G}_{2v^4}$, $\mathfrak{G}_{2v^6}$ die hier auftretenden Gruppen sein. Ihre Erzeugungsgleichungen zeigen, daß für die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ als erzeugende Operationen

$$15) \quad \mathfrak{S}_a, \mathfrak{S}_a(\tau_z), \mathfrak{S}_a(\tau'), \mathfrak{S}_a(\tau' + \tau_z)$$

in Frage kommen. Von ihnen sind die ersten beiden zulässige Deckoperationen für die Ebene δ , die letzten beiden aber für die Ebene ϑ , wie man leicht an der Figur 144a erkennt; die Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_\vartheta(\tau')$ bringt O nach D , und führt die Achse v

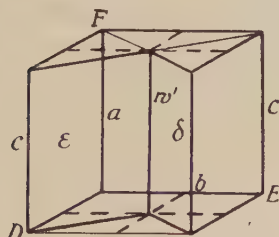


Fig. 205

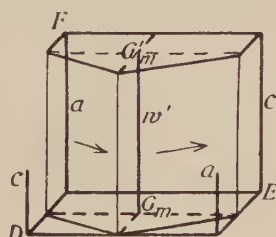


Fig. 206

der Grundfläche in die Achse u über. Wir erhalten so die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_a^5 &= \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_q \} = \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\epsilon \} \\ \mathfrak{B}_a^6 &= \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \Gamma_q \} = \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\epsilon(\tau_z) \} \\ \mathfrak{B}_a^7 &= \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\vartheta(\tau'); \Gamma_q \} = \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\eta(\tau'') \} \\ \mathfrak{B}_a^8 &= \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\vartheta(\tau' + \tau_z); \Gamma_q \} = \{ \mathfrak{B}^6, \mathfrak{S}_\eta(\tau'' + \tau_z) \}. \end{aligned}$$

Bei den Gruppen $\mathfrak{B}_a^5$ und $\mathfrak{B}_a^6$ wird die zur Ebene ϵ gehörige Operation durch die in $\mathfrak{B}^6$ enthaltene zweizählige Achse w' unmittelbar in Evidenz gesetzt; bei den Gruppen $\mathfrak{B}_a^7$ und $\mathfrak{B}_a^8$ stellt sich je eine Operation an der Ebene η ein, und zwar die, die (§ 4) aus der Operation an der Ebene ϑ durch Drehung um die Achse a hervorgeht (Fig. 205 u. 206). Die vorstehenden Gruppen verhalten sich daher in bezug auf die Ebenenschaaren $\{ \delta \}$ und $\{ \epsilon \}$ durchaus gleichartig; für sie sind daher auch die vier Kanten der Achsenfiguren gleichberechtigt. Nach den Formeln a) und b) werden bei den Gruppen $\mathfrak{B}_a^5$ und $\mathfrak{B}_a^6$ alle vier Kanten zu Achsen zweiter Art; die festen Punkte sind O, D, E, G für die Gruppe $\mathfrak{B}_a^5$ und F_m, G', H', K' für die

Gruppe $\mathfrak{B}_d^6$. Die Formel d) zeigt, daß bei den Gruppen $\mathfrak{B}_d^7$ und $\mathfrak{B}_d^8$ die Achse w' vierzählig wird, und zwar ist für $\mathfrak{B}_d^7$ der Punkt G_m der feste Punkt, für $\mathfrak{B}_d^8$ tritt dafür (nach Formel b) ein Punkt ein, der um $\frac{1}{2}\tau_z$ über G_m liegt, also der Punkt M_m .

Der Gruppe $\mathfrak{B}^7$ kommt das Gitter F_v'' zu; wie wir in § 1 sahen, nimmt es für δ als Seitenfläche den Charakter des Gitters I_v''' an, und zwar so, daß der Punkt H den Zentrierungs-

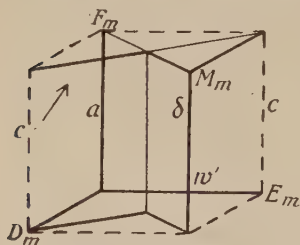


Fig. 207

punkt abgibt. Die hier in Frage kommenden Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}$ sind daher die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$; die Erzeugungsgleichungen von $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$ (S. 311) liefern für die aus $\mathfrak{B}^7$ ableitbaren Gruppen $\mathfrak{B}_d$ die beiden Operationen

$$16) \quad \mathfrak{S}_\delta \text{ und } \mathfrak{S}_\delta(\tau_z)$$

als mögliche erzeugende Operationen. Sie sind auch tatsächlich

Deckoperationen für die Achsenfigur von $\mathfrak{B}^7$; ebenso wie sie es für $\mathfrak{B}^6$ waren. Sie liefern die beiden Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_d^9 &= \{ \mathfrak{B}^7, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_q' \} = \{ \mathfrak{B}^7, \mathfrak{S}_\varepsilon \} \\ \mathfrak{B}_d^{10} &= \{ \mathfrak{B}^7, \mathfrak{S}_\delta(\tau_z); \Gamma_q' \} = \{ \mathfrak{B}^7, \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z) \}. \end{aligned}$$

Für die zugehörigen Achsenfiguren (Fig. 207) verwenden wir, wie meist bei den Gruppen mit dem Gitter F_v'' , den kleinen Oktanten von Fig. 80a; sie enthalten auch die Operationen $\mathfrak{S}_\eta(\tau'' + \tau_z)$ und $\mathfrak{S}_\eta(\tau'')$, die nach § 1, Gl. 5a) den Ebenen η entsprechen. Wie $\mathfrak{B}_d^5$ und $\mathfrak{B}_d^6$ zeigen auch diese Gruppen für die Ebenen δ und ε das gleiche Verhalten¹⁾. Nach der Formel a) ist bei $\mathfrak{B}_d^9$ sowohl die Achse a , wie auch w' eine vierzählige Achse mit O und M_m als festem Punkt; nach Formel b) fallen bei der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{10}$ die festen Punkte dieser Achsen in die Punkte F_m und G_m .

Die oben noch genannte Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$ hat nicht die Eigenschaft, daß ihrer erzeugenden Operation auch eine erzeugende

¹⁾ Die Ebene ε ist in Figur 207 nicht mehr enthalten, sie geht durch w' .

Operation für die Gruppe $\mathfrak{B}^7$ entspricht. Die Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$ enthält nämlich die Ebene μ als Spiegelungsebene, und der müßte für $\mathfrak{B}^7$ die Ebene η als Symmetrieebene für die Achsenfigur 144b entsprechen; was jedoch nicht zutrifft.

Die Gruppen $\mathfrak{B}^8$ und $\mathfrak{B}^9$ enthalten beide das Gitter Γ_v''' ; es nimmt für δ als Seitenfläche den Charakter des Gitters Γ_v'' an, und es sind also $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$ die Gruppen, die in den aus $\mathfrak{B}^8$ und $\mathfrak{B}^9$ ableitbaren Gruppen $\mathfrak{B}_d$ auftreten. Der Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$ entsprechend erhalten wir zunächst $\mathfrak{S}_\delta$ als mögliche erzeugende Operation; sie ist eine Deckoperation nur für $\mathfrak{B}^8$ und

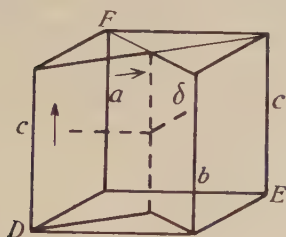


Fig. 208

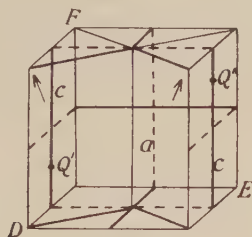


Fig. 209¹)

ihre Achsenfigur 144c, aber nicht für die Gruppe $\mathfrak{B}^9$. Sie liefert aus $\mathfrak{B}^8$ die Gruppe (Fig. 208)

$$\mathfrak{B}_d^{11} = \{\mathfrak{B}^8, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_{q'}\} = \{\mathfrak{B}^8, \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z)\}.$$

Die Operation $\mathfrak{S}_\delta$ bedingt nämlich auch eine Spiegelung an der Ebene ζ , gemäß § 1, Gleichung 6a) stellt sich daher für die Ebene ε die Translation τ_z ein, die übrigens (a. a. O.) auch durch $\tau_x - \tau_y$ ersetzt werden kann.

Nach den Formeln a) und b) werden in diesem Fall sämtliche vier Kanten der Achsenfigur 144c vierzählig; für die Achsen a ist O und G der feste Punkt, für die Achsen c dagegen ist es H' und K' , in Übereinstimmung damit, daß in $\mathfrak{B}^8$ wegen des Gitters $\Gamma_{q'}$ die Gruppe $\mathfrak{S}_4^2$ (§ 2) als Untergruppe enthalten ist. Dies gilt ebenso für die Gruppe, die wir jetzt aus $\mathfrak{B}^9$ an der Hand der Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$ ableiten werden.

In der Gruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$ tritt $\mathfrak{S}_{\mu'}(\tau_k)$ als erzeugende Operation auf, und zwar ist die Ebene μ' die Mittelebene zwischen den

¹) Vgl. S. 398, Anm.

Ebenen β und μ . Ihr entspricht hier die Ebene ϑ und der Translation τ_k entspricht gemäß § 1 die Translation τ_d , so daß sich $\mathfrak{S}_\vartheta(\tau_d)$ als mögliche erzeugende Operation einstellt. Sie ist, wie unmittelbar erhellt, keine Deckoperation für die Gruppe $\mathfrak{B}^8$; wohl aber ist sie es für $\mathfrak{B}^9$. Um es zu zeigen, wollen wir an die Achsenfigur 145a der Gruppe $\mathfrak{B}^9$ anknüpfen; sie ist (S. 321) so angelegt, daß durch O eine Drehungsachse geht. Von ihr haben wir auf die Figur 145 zurückzuschließen. Nun ist leicht zu erkennen, daß der Ebene ϑ von Fig. 145a, die durch D_m geht, in Figur 145 die Ebene δ durch O entspricht, so daß für die Figur 145 $\mathfrak{S}_\delta(\tau_d)$ als mögliche erzeugende Operation in Frage kommt. Sie ist es auch wirklich. Sie führt O in M_m über, den Punkt F_m in die Mitte G_m' der oberen Fläche, den Punkt D_m über L_m nach H_m' , also auch die Schraubenachsen durch F_m und D_m in die Schraubenachsen durch G_m' und H_m' usw. Als spiegelnde Ebene der Schaar $\{\varepsilon\}$ stellt sich analog die Operation $\mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_d')$ ein.

Die vierzähligen Achsen der Gruppe entnehmen wir der Formel e); sie macht (Fig. 209) die in der Ebene α' liegende Achse w zur vierzähligen Achse zweiter Art, mit dem Punkt Q' als festem Punkt; für die Achse w der Ebene α stellt sich analog der Punkt Q'' ein; in Übereinstimmung damit, daß als Untergruppe $\mathfrak{S}_4$ wiederum $\mathfrak{S}_4^2$ erscheint¹⁾.

Obwohl die so gebildete Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$ aus der Gruppe $\mathfrak{B}^9$ mit körperzentriertem Gitter hervorgeht, haben wir ihr *tetragonales* Gitter doch *als flächenzentriert aufzufassen*. Hier tritt der in § 1 erwähnte Umstand auf, daß die Richtungen τ_x und τ_y von vornherein *festliegen*, sie fallen mit den u - und v -Achsen von $\mathfrak{B}^9$ zusammen. Zu ihnen haben die Ebenen der Achsen c (Fig. 209) die *nicht* diagonale Lage, also diejenige, für die gemäß § 3 das Gitter als flächenzentriert aufzufassen ist, und demgemäß haben wir die definierende Gleichung der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$ in die Form zu setzen:

$$\mathfrak{B}_d^{12} = \{ \mathfrak{B}^9, \mathfrak{S}_\delta(\tau_d); I_q'' \} = \{ \mathfrak{B}^9, \mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_d') \}.$$

¹⁾ Der Punkt Q' der Figur gehört an die rechtsliegende Achse, der Punkt Q'' an die linksliegende. Ebenso ist es bei der Figur 235.

6. Es gibt zehn Gruppen der Symmetrie V^a ; sechs mit dem Gitter Γ_q und vier mit Γ_q' .

§ 9. Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie D_4 .
Gemäß der Gleichung

$$D_4 = \{C_4, U'\}$$

sind die zu D_4 isomorphen Gruppen $\mathfrak{D}_4$ mittels einer zu U' isomorphen Operation U aus den Gruppen $\mathfrak{C}_4$ zu bilden. Folgende Betrachtungen schicken wir voraus.

1) In D_4 treten vier Nebenachsen u auf; die Gruppen $\mathfrak{D}_4$ enthalten daher ebenfalls vier verschiedene Schaaren isomorpher zweizähliger Achsen. Sie laufen den Seiten und Diagonalen der quadratischen Fußpunktenetze parallel. Die Achsen, in denen die in § 1 eingeführten vertikalen Ebenen

$$17) \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu, \delta, \vartheta, \varepsilon, \eta, \zeta$$

die Ebene γ schneiden, mögen durch

$$17a) \quad u_\alpha, u_\beta, u_\lambda, u_\mu, u_\delta, u_\vartheta, u_\varepsilon, u_\eta, u_\zeta$$

bezeichnet werden.

2) In Übereinstimmung mit den Ausführungen über die rhomboedrischen Gruppen $\mathfrak{D}_3$ hängt die Anordnung der zweizähligen Nebenachsen bei den Gruppen $\mathfrak{D}_4$ für jede *einzelne* Richtung nur vom Gitter ab; sie folgt also den gleichen allgemeinen Regeln, wie bei den Gittern selbst. In den *horizontalen* Ebenen sind daher (§ 1) alle zu den Quadratseiten parallelen Achsen von gleicher Art, also entweder sämtlich Drehungsachsen oder sämtlich Schraubenachsen; je zwei benachbarte haben den Abstand τ_x oder τ_y . Die den Diagonalen parallelen Achsen sind teils Drehungsachsen, teils Schraubenachsen, die im Abstand τ' und τ'' aufeinander folgen. Für die *vertikalen* Ebenen ergibt sich folgendes: Bei den Gruppen mit dem Gitter Γ_q sind, wie beim Gitter Γ_v , alle Achsen einer vertikalen Ebene von gleicher Art; sie folgen im Abstand τ_z . Bei den Gruppen mit dem Gitter Γ_q' gilt für die zu α und β parallelen Ebenen das Gleiche. Für die zu δ und ε parallelen Ebenen ist es anders; hier treten die in Kap. IX, § 13 für Γ_q' angeführten Sätze in Kraft (Fig. 79). In jede solche Ebene fallen

nämlich zwei der Translationen $2\tau_a, 2\tau_a', 2\tau_a'', 2\tau_a'''$, sie enthält daher stets sowohl Drehungsachsen wie Schraubenachsen; sie folgen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ aufeinander.

3) Die Erzeugung der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ ist durch zwei Bedingungen bestimmt. Die erzeugende Achse u muß eine Deckoperation für das Fußpunktenetz der Gruppen $\mathfrak{C}_4$ sein, außerdem aber auch eine Deckoperation für die Achsenschaaren selbst; sie muß also Drehungsachsen in Drehungsachsen und Schraubenachsen in gleichwertige Schraubenachsen überführen. Gemäß den Sätzen von Kap. XIV, § 1, 5 erhalten wir die erzeugenden Operationen aus den Operationen $\mathfrak{S}_v(\tau)$, die die Achsenschaaren der Gruppen $\mathfrak{C}_4$ geometrisch gestatten, und die wir in § 4 sämtlich erörtert haben. Da wir in § 4 jede Gruppe $\mathfrak{C}_{4v}$ mit einer erzeugenden Ebene der Schaar $\{\delta\}$ gebildet haben, soll hier die Achse der erzeugenden Operation zu u_δ parallel gewählt werden. Es kommen also nur

$$18) \quad \mathfrak{U}_\delta(\tau) \text{ und } \mathfrak{U}_\vartheta(\tau)$$

als erzeugende Operationen in Betracht. Die Operation $\mathfrak{S}_\vartheta(\tau)$ tritt jedoch in § 4 nur bei der Gruppe $\mathfrak{C}_4^6$ auf. Da sie aber die entgegengesetzten Schraubenachsen a und b miteinander vertauscht, während eine jede Gruppe $\mathfrak{D}_4$ jede Achsenart in sich überführen muß, so scheidet die Operation $\mathfrak{U}_\vartheta(\tau)$ hier aus, und es ist nur $\mathfrak{U}_\delta(\tau)$ als erzeugende Operation zu verwenden.

4) Die folgenden Hilfsformeln zeigen, wie sich die horizontalen Achsen *verschiedener* Richtung gegenseitig bedingen. Es kommen dafür auf der durch O gehenden Achse a die im Abstand $\frac{1}{4}\tau_z$ folgenden Punkte

$$19) \quad O, O_1, O_2(=F_m), O_3, O_4(=F')$$

in Betracht und die durch sie gehenden Ebenen

$$19a) \quad \gamma, \gamma_1, \gamma_2(=\nu), \gamma_3, \gamma_4.$$

Nach Kap. III, Satz 5 gilt die Formel

$$a) \quad \mathfrak{U}(\pi/2)\mathfrak{U}_\delta = \mathfrak{U}_\beta^1).$$

¹⁾ Hier ist die Drehung im Sinn des Uhrzeigers als positiv angenommen.

Ferner liefert uns der Satz 3 von Kap. IV die beiden Gleichungen

$$b) \mathfrak{A}(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z)\mathfrak{U}_\delta = \mathfrak{U}_{\beta'} \quad \text{und} \quad b') \mathfrak{A}(\pi/2, \tau_z)\mathfrak{U}_\delta = \mathfrak{U}_{\beta''},$$

und zwar geht die Achse $u_{\beta'}$ durch den Punkt O_1' von a , für den $O_1'O = OO_1$ ist, und $u_{\beta''}$ durch den analogen Punkt O_2' . Wird die erste Gleichung rechtsseitig mit $\tau_x + \tau_y$ multipliziert, so kommt

$$\mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y) = \mathfrak{U}_\beta \mathfrak{T}_x \mathfrak{T}_y$$

oder, da $\mathfrak{U}_\beta \mathfrak{T}_x = \mathfrak{U}_\mu$ ist (Kap. III, Satz 1a),

$$c) \quad \mathfrak{A}(\pi/2)\mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y) = \mathfrak{U}_\mu(\tau_y).$$

Die beiden Operationen der linken Seite bedingen also die Achse u_μ als zweizählige Schraubenachse. Aus der Gleichung c) folgt endlich durch Multiplikation mit τ_z

$$d) \quad \mathfrak{A}(\pi/2, \tau_z)\mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y) = \mathfrak{T}_z \mathfrak{U}_\mu(\tau_y) = \mathfrak{U}_{\mu'}(\tau_y),$$

und zwar geht die Achse $u_{\mu'} \parallel u_\mu$ durch den eben genannten Punkt O_2' im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ von O .

5) In jeder Gruppe $\mathfrak{D}_4$ treten zwei Untergruppen $\mathfrak{B}$ auf, die wichtige Bedeutung besitzen. Um sie darzulegen, knüpfen wir zunächst an die Punktgruppe D_4 an. In ihr treten (Kap. V, § 5) vier Umwendungen

$$\mathfrak{U}', \mathfrak{U}_1', \mathfrak{U}_2', \mathfrak{U}_3'$$

auf; die Umwendungen $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}_2'$ bilden mit der Hauptachse a' , wenn wir sie nur als zweizählige Achse betrachten, also nur die beiden Operationen 1, $\mathfrak{A}'_2$ berücksichtigen, eine in D_4 enthaltene Untergruppe V mit den Operationen

$$1, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{U}', \mathfrak{U}_2';$$

ebenso bestimmen auch die Umwendungen $\mathfrak{U}_1', \mathfrak{U}_3'$ mit der Achse a' eine Untergruppe V von D_4 , die die Operationen

$$1, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{U}_1', \mathfrak{U}_3'$$

enthält. Nehmen wir $u' \parallel u_\alpha$ an, so werden

$$u', u_1', u_2', u_3' \text{ zu } u_\alpha, u_\delta, u_\beta, u_\epsilon$$

parallel, und wir bezeichnen demgemäß die beiden Gruppen V durch

$$21) \quad V_{\alpha\beta} \text{ und } V_{\delta\epsilon}.$$

Dies übertragen wir auf die Raumgruppen $\mathfrak{D}_4$; wir erhalten zwei isomorphe Gruppen

$$21a) \quad \mathfrak{B}_{\alpha\beta} \text{ und } \mathfrak{B}_{\delta\epsilon},$$

die in jeder Gruppe $\mathfrak{D}_4$ auftreten. Die Achsen von $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ bestehen aus den vertikalen Achsen von $\mathfrak{D}_4$ in Verbindung mit den Achsenschaaren $\{u_\alpha\}$ und $\{u_\beta\}$, die Achsen von $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ aus den vertikalen Achsen in Verbindung mit den Schaaren $\{u_\delta\}$ und $\{u_\epsilon\}$. Diese beiden Gruppen sollen für jede Gruppe $\mathfrak{D}_4$ angegeben werden. Um sie leicht zu finden, hat man die in den Gruppen $\mathfrak{D}_4$ auftretenden vierzähligen Achsen zunächst wiederum als *zweizählige* aufzufassen.

§ 10. Die Gruppen der Symmetrie $\mathfrak{D}_4$. Bei allen Gruppen $\mathfrak{C}_4$ verwenden wir nach § 9, 3 $\mathfrak{U}_\delta(\tau)$ als erzeugende Operation; und zwar hat τ nur die beiden Werte

$$18) \quad \tau = 0 \text{ und } \tau = \tau_x + \tau_y.$$

Wir betrachten zunächst die Gruppen $\mathfrak{C}_4$ mit dem Gitter Γ_q . Aus jeder von ihnen ergeben sich zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{D}_4$; so erhalten wir die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_4^1 &= \{ \mathfrak{C}_4^1, \mathfrak{U}_\delta; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^1; \mathfrak{B}^6 \\ \mathfrak{D}_4^2 &= \{ \mathfrak{C}_4^1, \mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y); \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^3; \mathfrak{B}^6 \\ \mathfrak{D}_4^3 &= \{ \mathfrak{C}_4^2, \mathfrak{U}_\delta; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^2; \mathfrak{B}^5 \\ \mathfrak{D}_4^4 &= \{ \mathfrak{C}_4^2, \mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y); \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^4; \mathfrak{B}^5 \\ \mathfrak{D}_4^5 &= \{ \mathfrak{C}_4^3, \mathfrak{U}_\delta; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^1; \mathfrak{B}^6 \\ \mathfrak{D}_4^6 &= \{ \mathfrak{C}_4^3, \mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y); \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^3; \mathfrak{B}^6 \\ \mathfrak{D}_4^7 &= \{ \mathfrak{C}_4^4, \mathfrak{U}_\delta; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^2; \mathfrak{B}^5 \\ \mathfrak{D}_4^8 &= \{ \mathfrak{C}_4^4, \mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y); \Gamma_q \}; \mathfrak{B}^4; \mathfrak{B}^5. \end{aligned}$$

Die in diesen Gleichungen enthaltenen Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ werden sich auf Grund der noch zu bestimmenden Achsenfiguren leicht ergeben; die erste Gruppe ist stets die Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, die zweite ist $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$.

In $\mathfrak{D}_4^1$ ist (Fig. 210) die Achse a eine vierzählige Drehungsachse; durch den Punkt O geht also je eine Achse $u_\alpha, u_\beta, u_\delta, u_\epsilon$, und daher stimmt die Anordnung der zweizähligen Achsen mit der des Gitters Γ_q überein. Horizontale Achsenebenen dieser Art folgen (nach § 9, 4) gleichartig im Abstand τ_z aufeinander.

Wir gehen zunächst zu den Gruppen $\mathfrak{D}_4^5$ und $\mathfrak{D}_4^6$ über. Die Achse a ist für $\mathfrak{C}_4^3$ eine zweizählige Drehungsachse; bei der Gruppe $\mathfrak{D}_4^5$ geht daher durch O außer u_δ auch die Drehungsachse u_ζ^1). Als vierzählige Achse ist a eine Schraubenachse mit der Schraubung $\mathfrak{A}(\pi/2, \tau_z)$; nach Formel b') von § 9 bedingen daher die Achsen u_δ und u_η je eine Drehungsachse u_α und u_β durch den Punkt O_2^1). Die sämtlichen in γ enthaltenen Achsen der Figur 210 verteilen sich also bei der Gruppe $\mathfrak{D}_4^5$ auf die Ebenen γ und γ_2 und haben in ihnen für jede einzelne Rich-

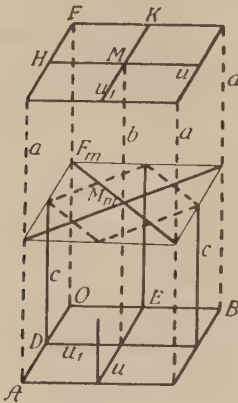


Fig. 212

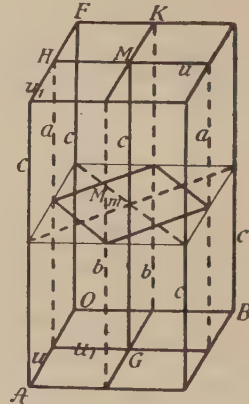


Fig. 212a

tung die gleiche Anordnung wie in Figur 210. Dies liefert die durch Figur 212 dargestellte Achsenfigur. Anwendungen auf die kubischen Gruppen machen auch eine Achsenfigur erforderlich, in der die Achse c durch O geht; dem entspricht die Figur 212a.

Die mit $\mathfrak{U}_\delta(\tau_x + \tau_y)$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{D}_4^6$ steht zu $\mathfrak{D}_4^5$ im gleichen Verhältnis, wie die Gruppe $\mathfrak{D}_4^2$ zu $\mathfrak{D}_4^1$; es gilt daher auch für ihre Achsenanordnung die oben genannte einfache Beziehung, und zwar ist für die Achsen der Richtung α und β diesmal die Gleichung d) von § 9 heranzuziehen (Fig. 213)²⁾.

¹⁾ In Fig. 212 geht aus besonderen Gründen die Achse u_δ durch $F_m = O_2$ und u_α, u_β durch O .

²⁾ Man kann auch diese Figuren so darstellen, daß die Achse c durch O geht.

In $\mathfrak{D}_4^3$ ist a eine vierzählige Schraubenachse der Form $\mathfrak{A}(\pi/2, 1/2\tau_z)$; hier kommt die Formel b) von § 9, sowie Satz 3 von Kap. IV zur Anwendung. Sie bedingen zunächst (Fig. 214)¹⁾ eine zu u_β parallele Drehungsachse $u_{\beta'} (= u_1) \parallel u_\beta$ durch den Punkt O_1 , der den Abstand $1/4\tau_z$ von O hat; alsdann durch den Punkt O_2 eine Achse $u_{\zeta''} \parallel u_\zeta$, dann wieder durch den Punkt O_3 eine Achse $u_{\alpha''} \parallel u_\alpha$ usw., so daß diese Achsen wendeltreppenartig längs a aufeinander folgen. Jede Achsenebene enthält nur Achsen von einerlei Richtung; in jeder Ebene haben die parallelen Achsen die gleiche Lage zueinander wie bei der Gruppe $\mathfrak{D}_4^1$. Die in der Ebene γ gelegenen Achsen dieser Gruppe verteilen sich also diesmal auf vier verschiedene Ebenen. Analog ist es für $\mathfrak{D}_4^4$, nur daß hier in γ statt der Drehungsachse u_δ eine Schraubenachse auftritt, was wieder den gleichen Übergang der Drehungsachsen in Schraubenachsen und umgekehrt bewirkt, wie bei den vorstehenden Gruppen (Fig. 215).

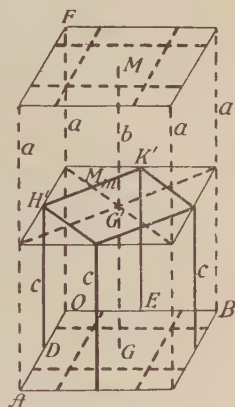


Fig. 213

Die Gruppen $\mathfrak{D}_4^7$ und $\mathfrak{D}_4^8$ zeigen die gleichen Verhältnisse wie $\mathfrak{D}_4^3$ und $\mathfrak{D}_4^4$; beide Gruppenpaare unterscheiden sich nur durch den Windungssinn ihrer vierzähligen Achsen.

Mit den so hergestellten Achsenfiguren lassen sich auch die Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$, die in den definierenden Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ (S. 402) auftreten, leicht in Evidenz setzen. Wie bereits in § 9 erwähnt ist, fassen wir die vierzähligen Achsen zunächst wieder als zweizählige auf. Alle bisher abgeleiteten Gruppen $\mathfrak{D}_4$ besitzen das Gitter Γ_q , daher kommt ihren Untergruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ das Gitter Γ_v zu. Wir erkennen so als Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ für $\mathfrak{D}_4^1$ und $\mathfrak{D}_4^2$ unmittelbar die Gruppen $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^3$. Bei den Gruppen $\mathfrak{D}_4^3$ und $\mathfrak{D}_4^4$ ist zu beachten,

¹⁾ Die im folgenden genannte Achse $u_{\zeta''}$ durch O_2 ist nicht gezeichnet. Der positive Drehungssinn ist der in Anm. 1, S. 400 genannte.

daß alle Achsen auch als zweizählige Achsen Schraubenachsen sind; daher können ihre Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ nur $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}^4$ sein. Dasselbe gilt von den zu ihnen enantiomorphen Gruppen $\mathfrak{D}_4^7$ und $\mathfrak{D}_4^8$. Bei $\mathfrak{D}_4^5$ und $\mathfrak{D}_4^6$ sind alle Achsen als zweizählige Achsen Drehungsachsen, und so ergeben sich wiederum $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^3$ als die zugehörigen Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$.

Für die Bestimmung der Gruppen $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ ist zunächst wesentlich, daß jetzt u_δ und u_ϵ den *Seiten* der Achsenfiguren der

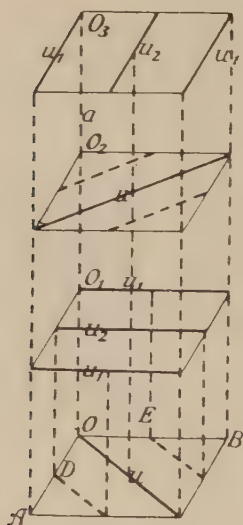


Fig. 214

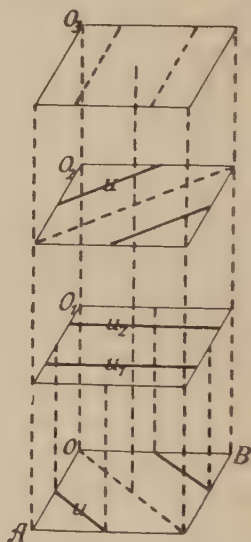


Fig. 215

Gruppen $\mathfrak{B}$ entsprechen, und daß das Gitter Γ_q' demgemäß den Charakter des Gitters Γ_v' annimmt. Nun gibt es nur zwei Gruppen $\mathfrak{B}$ mit dem Gitter Γ_v' , nämlich $\mathfrak{B}^5$ und $\mathfrak{B}^6$, jede Gruppe $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ muß also eine dieser beiden Gruppen sein. In der Tat lehren die Achsenfiguren, daß es $\mathfrak{B}^6$ ist für $\mathfrak{D}_4^1$, $\mathfrak{D}_4^2$, $\mathfrak{D}_4^5$, $\mathfrak{D}_4^6$ und $\mathfrak{B}^5$ für $\mathfrak{D}_4^3$, $\mathfrak{D}_4^4$, $\mathfrak{D}_4^7$, $\mathfrak{D}_4^8$.

Der Erzeugung der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ aus den Gruppen $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$, die Γ_q' als Gitter enthalten, schicken wir eine Bemerkung über die Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ voraus. Die Translation

$2\tau_d = \tau_x + \tau_y + \tau_z$ des Gitters I_q' bedingt, daß die beiden Operationen

$$20) \quad \mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y) \text{ und } \mathfrak{S}_\delta(\tau_z)$$

gleichwertig sind. Aus diesem Grunde konnte von den beiden Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^9$ und $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$ in § 5 die eine mit der Operation $\mathfrak{S}_\delta$ und die andere mittels $\mathfrak{S}_\delta(\tau_z)$ erzeugt werden. Dies bewirkt, daß den Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^9$ und $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$ bei der hier zugrunde gelegten Übertragung gemäß Kap. XIV, § 1, 4 *eine und dieselbe Gruppe* $\mathfrak{D}_4$ entspricht; die Operationen $\mathfrak{S}_\delta$ und $\mathfrak{S}_\delta(\tau_z)$ liefern *übereinstimmend die Umwendung* $\mathfrak{U}_\delta$ *als erzeugende Operation*. Sie ist aber auch tatsächlich eine Deckoperation, da sie jede der beiden Achsenschaaren (a) und (b) in sich überführt. Wir erhalten so aus $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_4^9 &= \{ \mathfrak{C}_4^5, \mathfrak{U}_\delta; I_q' \}; \mathfrak{B}^8; \mathfrak{B}^7 \\ \mathfrak{D}_4^{10} &= \{ \mathfrak{C}_4^6, \mathfrak{U}_\delta; I_q' \}; \mathfrak{B}^9; \mathfrak{B}^7. \end{aligned}$$

Um die Achsenfiguren beider Gruppen herzustellen, schlagen wir den umgekehrten Weg ein, wie vorher; wir bestimmen zuerst die in den vorstehenden Gleichungen enthaltenen Untergruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$. Dem Gitter I_q' der Gruppen $\mathfrak{D}_4^9$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$ entsprechen die rhombischen Gitter I_v'' und I_v''' ; so folgt bereits, daß als Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ nur $\mathfrak{B}^7, \mathfrak{B}^8, \mathfrak{B}^9$ auftreten können. Insbesondere nimmt I_q' für $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ den Charakter des Gitters I_v''' an, und für $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ den von I_v'' ; daher muß $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ beidemale die Gruppe $\mathfrak{B}^7$ sein und $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ entweder $\mathfrak{B}^8$ oder $\mathfrak{B}^9$. Auf dieser Grundlage lassen sich die Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{D}_4^9$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$ in folgender Weise ermitteln.

Für die Gruppe $\mathfrak{D}_4^9$ ist die Achse α eine vierzählige Drehungsachse, daher bedingt die erzeugende Umwendung $\mathfrak{U}_\sigma$ im Punkt O je eine Umwendungsachse $u_\alpha, u_\beta, u_\delta, u_\epsilon$. Die in $\mathfrak{D}_4^9$ auftretende Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ kann mithin nur die Gruppe $\mathfrak{B}^8$ sein und nicht $\mathfrak{B}^9$; auch sehen wir so bestätigt, daß die Gruppe $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ die Gruppe $\mathfrak{B}^7$ ist. Wir schließen weiter, daß der eben genannte Punkt O auch den Punkt O für die Gruppen $\mathfrak{B}^7$ und $\mathfrak{B}^8$ bildet (Fig. 216). Damit ist die Achsenfigur von $\mathfrak{D}_4^9$ bestimmt; sie entsteht unmittelbar durch die Eintragung aller Achsen der Gruppen $\mathfrak{B}^7$ und $\mathfrak{B}^8$. Wir legen sie wie bei

den Gruppen $\mathfrak{B}$ so an, daß die Grundfläche nur aus dem Quadrat $ODEG$ besteht; ferner ist zu beachten, daß die Achse b (durch D) eine zweizählige Drehungsachse ist. Dies bewirkt, daß die Gruppe $\mathfrak{B}^7$ die Lage zur Figur 216 hat, die durch die eingeklammerten Buchstaben angedeutet ist; insbesondere fällt der Punkt M_m von Fig. 144 b in Fig. 216 in die Mitte H' von DH .

Um die Achsenfigur der Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ zu erhalten, gehen wir am besten von der Gruppe $\mathfrak{B}^7$ und ihrer Achsenfigur 80 (S. 182) aus; sie bildet den Grundstock der Figur 217, und

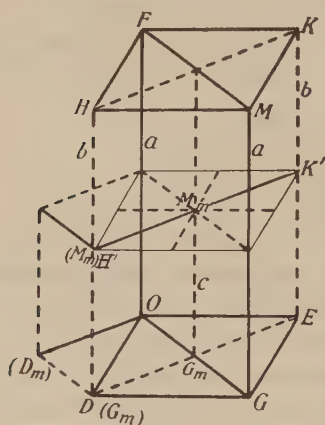


Fig. 216

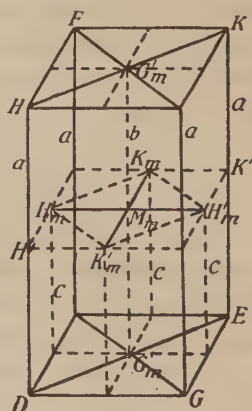


Fig. 216 a

zwar so, daß Grundfläche, Mittelfläche und obere Fläche von Fig. 217 die nämlichen Flächen von Fig. 80 darstellen. Da die Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ aus der Gruppe $\mathfrak{C}_4^6$ entsteht, so müssen die vertikalen Schraubenachsen von $\mathfrak{B}^7$ die vierzähligen Schraubenachsen von $\mathfrak{D}_4^{10}$ abgeben, die vier vertikalen Kanten von Figur 217 stellen also die Achsen c dar. Die vierzählige Achse a bedingt (Kap. IV, Satz 3) mit der durch O gehenden zweizähligen Achse u_α zwei Achsen diagonalen Richtung, die die Achse a in den Mitten der Strecken $D_m H_m$ und $H_m D_m''$ schneiden¹⁾. Daraus

¹⁾ Der positive Drehungssinn der Achse a ist der Uhrzeigersinn; die dem umgekehrten Sinn entsprechende Figur ergibt sich aus der Figur 217 durch Spiegelung gegen die vertikale Ebene durch $E_m G_m$. Der Buchstabe c gehört an die Kante $O_1 O_3$.

ist erstens ersichtlich, daß in $\mathfrak{D}_4^{10}$ neben $\mathfrak{B}^7$ noch die Gruppe $\mathfrak{B}^9$ auftritt, und zweitens auch, wie sich die Achsen von $\mathfrak{B}^9$ in die Achsen von $\mathfrak{B}^7$ einordnen. Zugleich erhellt, daß wir für diese Anlage der Figur das Gitter I_q' als flächenzentriert aufzufassen haben, und demgemäß $\mathfrak{B}^7$ als $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{B}^9$ als $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$. Die erzeugende Umwendung fällt jetzt in die Achse u_α , und

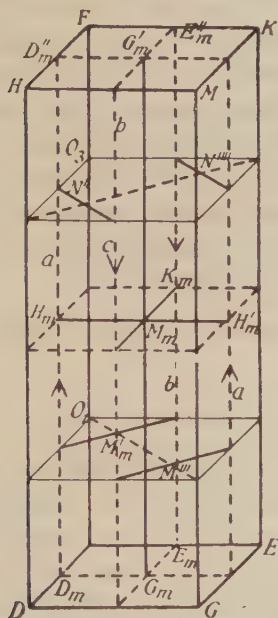


Fig. 217

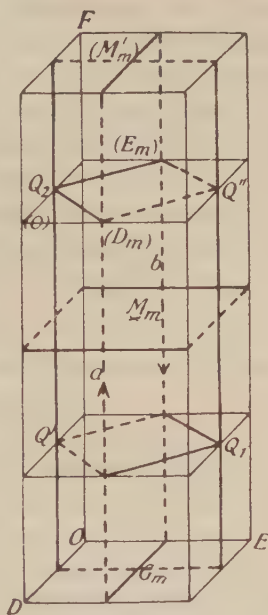


Fig. 217a

wir können daher die Gleichung von $\mathfrak{D}_4^{10}$ auch in die Form setzen

$$\mathfrak{D}_4^{10} = \{ \mathfrak{C}_4^6, u_\alpha; I_q'' \}; \mathfrak{B}^7; \mathfrak{B}^9.$$

Anwendungen im Gebiet der kubischen Gruppen erfordern noch eine Figur, die die Entstehung von $\mathfrak{D}_4^{10}$ aus Fig. 145 von $\mathfrak{B}^9$ in Evidenz setzt. Wir müssen dazu zur körperzentrierten Auffassung des Gitters zurückkehren, haben also die Diagonalfächen von Fig. 217 als die neuen Seitenflächen zu wählen, und erhalten so die Figur 217a¹⁾; die Horizontalfläche von 217,

¹⁾ Der Buchstabe (O) gehört zum Punkt Q_2 .

die die Punkte Q_2, Q'' enthält, gibt die neue Grundfläche ab. Die eingeklammerten Buchstaben lassen die gegenseitige Beziehung beider Figuren erkennen. Außer einer Drehung um 45° muß also die Figur 217 noch eine vektorielle Verschiebung um $\frac{1}{2}\tau_x + \frac{3}{4}\tau_z$ erfahren, um in Fig. 217a überzugehen¹⁾.

Umgekehrt haben wir bei der Figur 216, ebenfalls mit Rücksicht auf die kubischen Gruppen, zu der Umstellung überzugehen, die das Gitter als flächenzentriert erscheinen läßt. Es geschieht einfach in der Weise, daß wir die Diagonalebene δ von 216 zur Ebene α der neuen Figur machen, den Punkt O aber beibehalten; die Figur 216 also um 45° drehen. Dies liefert die Figur 216a, deren Punkte nunmehr wieder die (in 216 eingeklammerten) Bezeichnungen von $\mathfrak{B}^7$ annehmen.

9. Es gibt zehn Gruppen der Symmetrie D_4 ; acht mit dem Gitter Γ_q und zwei mit Γ'_q .

§ 11. Die Gruppen der Symmetrie D_4^h . Die Gruppe D_4^h genügt der Erzeugungsformel

$$D_4^h = \{D_4, \mathfrak{S}_h'\} = \{D_4, \mathfrak{S}'\};$$

die zu ihr isomorphen Raumgruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ lassen sich daher mittels einer Inversion als erzeugender Operation ableiten. Die hierzu tauglichen Inversionen bestimmen wir im Anschluß an die in § 9 eingeführten Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$; aus diesem Grunde sind sie in die definierenden Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ aufgenommen worden. *Ist die Inversion eine Deckoperation für die in $\mathfrak{D}_4$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{C}_4$ und $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ (oder $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$), so ist sie es auch für die gesamte Achsenschaar von $\mathfrak{D}_4$.* Dies ergibt sich unmittelbar daraus, daß die sämtlichen Nebenachsen der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ durch die Achsen der Gruppe $\mathfrak{C}_4$ und eine einzige erzeugende Nebenachse bereits bestimmt sind.

¹⁾ Entfernt man aus der Figur 217a die Drehungsachsen der Richtungen τ_x, τ_y, τ_z , so daß nur die Schraubenachsen der Gruppe $\mathfrak{B}^4$ übrig bleiben, und behält in jeder horizontalen Ebene dementsprechend nur Achsen einer einzigen Richtung bei, so erhält man eine neue Figur der Gruppen $\mathfrak{D}_4^8$ und $\mathfrak{D}_4^7$, die sich in der gleichen Weise in die Achsenfigur von $\mathfrak{B}^4$ einordnet, wie Fig. 217a in die Achsenfigur der Gruppe $\mathfrak{B}^9$.

Wir bezeichnen die erzeugenden Symmetriezentra in der gleichen Weise, wie bei den Gruppen $\mathfrak{B}_h$; die Inversionen, die gegen die Punkte

$$22) \quad O, M_m, D_m, F_m, G_m, H_m$$

stattfinden, heißen

$$22a) \quad \mathfrak{I}, \mathfrak{I}_m, \mathfrak{I}_d, \mathfrak{I}_f, \mathfrak{I}_g, \mathfrak{I}_h.$$

In der definierenden Gleichung einer jeden Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ soll auch die Gruppe $\mathfrak{B}_h$ angegeben werden, die aus der in $\mathfrak{D}_4$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ durch die erzeugende Inversion entsteht, und außerdem die in $\mathfrak{D}_{4h}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{C}_{4v}$. Damit sind die spiegelnden Ebenen aller Richtungen gekennzeichnet. Auf diese Weise machen wir besondere Achsenfiguren für die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ entbehrlich; ein Gesamtbild aller charakteristischen Operationen würde nicht mehr übersichtlich sein.

Nur die Gruppen

$$\mathfrak{D}_4^1, \mathfrak{D}_4^2, \mathfrak{D}_4^5, \mathfrak{D}_4^6, \mathfrak{D}_4^9, \mathfrak{D}_4^{10}$$

sind zur Ableitung einer Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ geeignet.

Die definierende Gleichung der Gruppe $\mathfrak{D}_4^1$ zeigt, daß die Untergruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ ist. Die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ läßt die Punkte

$$O, F_m, G_m, M_m$$

als erzeugende Zentra zu; jeder dieser Punkte gibt auch für die in $\mathfrak{D}_4^1$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{C}_4^1$ ein Symmetriezentrum ab und liefert daher eine Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$. Die genannten Zentra erzeugen mit $\mathfrak{B}^1$ die Gruppen (Kap. XIV, § 10) $\mathfrak{B}_h^1, \mathfrak{B}_h^3, \mathfrak{B}_h^4, \mathfrak{B}_h^2$, und wir erhalten so die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{4h}^1 &= \{ \mathfrak{D}_4^1, \mathfrak{I}; I_q' \}; \mathfrak{B}_h^1; \mathfrak{C}_{4v}^1 \\ \mathfrak{D}_{4h}^2 &= \{ \mathfrak{D}_4^1, \mathfrak{I}_f; I_q \}; \mathfrak{B}_h^3; \mathfrak{C}_{4v}^5 \\ \mathfrak{D}_{4h}^3 &= \{ \mathfrak{D}_4^1, \mathfrak{I}_g; I_q \}; \mathfrak{B}_h^4; \mathfrak{C}_{4v}^2 \\ \mathfrak{D}_{4h}^4 &= \{ \mathfrak{D}_4^1, \mathfrak{I}_m; I_q \}; \mathfrak{B}_h^2; \mathfrak{C}_{4v}^6. \end{aligned}$$

Hier sind nur noch die auftretenden Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ zu begründen; sie lassen sich unmittelbar aus den definierenden Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{D}_4, \mathfrak{B}_h$ und der Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ ablesen. Die in $\mathfrak{D}_4^1$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{C}_4$ ist $\mathfrak{C}_4^1$. Nun zeigen die Formeln

der Gruppen $\mathfrak{B}_h^1, \mathfrak{B}_h^3, \mathfrak{B}_h^4, \mathfrak{B}_h^2$ von Kap. XIV, daß in ihnen die Operationen

$$23) \quad \mathfrak{S}_\beta, \mathfrak{S}_\beta(\tau_z), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y), \mathfrak{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)$$

auftreten, und man entnimmt nunmehr aus den Formeln von § 4, daß gerade $\mathfrak{C}_{4v}^1, \mathfrak{C}_{4v}^5, \mathfrak{C}_{4v}^2, \mathfrak{C}_{4v}^6$ diejenigen Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ sind, die aus $\mathfrak{C}_4^1$ mit den vorstehenden Operationen entstehen. *In dieser einfachen Weise kann die Gruppe $\mathfrak{C}_{4v}$ für jede Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ gefunden werden.*

Ebenso erhalten wir aus der Gruppe $\mathfrak{D}_4^2$ vier neue Gruppen. In der Gruppe $\mathfrak{D}_4^2$ ist wieder $\mathfrak{C}_4^1$ als Untergruppe enthalten; gemäß § 9 ist die in ihr enthaltene Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ die Gruppe $\mathfrak{B}^3$. Sie läßt alle unter 22) genannten Inversionen zu; es scheiden aber die an D_m und H_m aus, da sie die Achsen a und c der Gruppe $\mathfrak{C}_4^1$ vertauschen würden. Die übrigen sind erlaubte Inversionen. Sie bedingen mit $\mathfrak{B}^3$ die vier Gruppen $\mathfrak{B}_h^9, \mathfrak{B}_h^{11}, \mathfrak{B}_h^{12}, \mathfrak{B}_h^{10}$. Vergleichen wir, wie oben, ihre erzeugenden Formeln mit den Formeln der aus $\mathfrak{C}_4^1$ entstehenden Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ von § 4, so ergibt sich, daß sich als Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ diesmal die vier Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^2, \mathfrak{C}_{4v}^6, \mathfrak{C}_{4v}^1, \mathfrak{C}_{4v}^5$ einstellen. Wir finden so die vier Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{4h}^5 &= \{ \mathfrak{D}_4^2, \mathfrak{S}; \mathbf{I}_q \}; \mathfrak{B}_h^9; \mathfrak{C}_{4v}^2 \\ \mathfrak{D}_{4h}^6 &= \{ \mathfrak{D}_4^2, \mathfrak{S}_f; \mathbf{I}_q \}; \mathfrak{B}_h^{11}; \mathfrak{C}_{4v}^6 \\ \mathfrak{D}_{4h}^7 &= \{ \mathfrak{D}_4^2, \mathfrak{S}_g; \mathbf{I}_q \}; \mathfrak{B}_h^{12}; \mathfrak{C}_{4v}^1 \\ \mathfrak{D}_{4h}^8 &= \{ \mathfrak{D}_4^2, \mathfrak{S}_m; \mathbf{I}_q \}; \mathfrak{B}_h^{10}; \mathfrak{C}_{4v}^5. \end{aligned}$$

In der Gruppe $\mathfrak{D}_4^5$ sind die vierzähligen Schraubenachsen als zweizählige Achsen Drehungsachsen; ihre Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ ist nach § 9 wiederum die Gruppe $\mathfrak{B}^1$. Jedes der für $\mathfrak{B}^1$ möglichen Symmetriezentra O, F_m, G_m, M_m ist auch ein Symmetriezentrum für die in $\mathfrak{D}_4^5$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{C}_4^3$ und führt daher zu einer Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$. Die aus $\mathfrak{B}^1$ entstehenden Untergruppen $\mathfrak{B}_h$ müssen mit denen identisch sein, die sich soeben für $\mathfrak{D}_4^1$ aus $\mathfrak{B}^1$ ergaben; ihr Vergleich mit den Formeln der aus $\mathfrak{C}_4^3$ entstehenden Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ liefert diesmal die vier Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^3, \mathfrak{C}_{4v}^7, \mathfrak{C}_{4v}^4, \mathfrak{C}_{4v}^8$. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{4h}^9 &= \{ \mathfrak{D}_4^5, \mathfrak{I}; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^1; \mathfrak{C}_{4v}^7 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{10} &= \{ \mathfrak{D}_4^5, \mathfrak{I}_f; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^3; \mathfrak{C}_{4v}^3 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{11} &= \{ \mathfrak{D}_4^5, \mathfrak{I}_g; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^4; \mathfrak{C}_{4v}^8 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{12} &= \{ \mathfrak{D}_4^5, \mathfrak{I}_m; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^2; \mathfrak{C}_{4v}^{11}.\end{aligned}$$

Die Untergruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ der Gruppe $\mathfrak{D}_4^6$ ist wiederum die Gruppe $\mathfrak{B}^3$, die in $\mathfrak{D}_4^6$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{C}_4$ ist $\mathfrak{C}_4^3$. Von den möglichen Symmetriezentren der Gruppe $\mathfrak{B}^3$ scheiden D_m und H_m wieder aus, weil sie die Achsen a und c vertauschen würden. Die andern sind zulässige Inversionen auch für $\mathfrak{C}_4^3$. Die sich einstellenden Untergruppen $\mathfrak{B}_h$ sind, genau wie bei $\mathfrak{D}_4^2$, die Gruppen $\mathfrak{B}_h^9, \mathfrak{B}_h^{11}, \mathfrak{B}_h^{12}, \mathfrak{B}_h^{10}$; der Vergleich mit den Gleichungen von § 4 liefert als Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ die Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^8, \mathfrak{C}_{4v}^4, \mathfrak{C}_{4v}^7, \mathfrak{C}_{4v}^5$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{4h}^{13} &= \{ \mathfrak{D}_4^6, \mathfrak{I}; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^9; \mathfrak{C}_{4v}^8 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{14} &= \{ \mathfrak{D}_4^6, \mathfrak{I}_f; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^{11}; \mathfrak{C}_{4v}^4 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{15} &= \{ \mathfrak{D}_4^6, \mathfrak{I}_g; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^{12}; \mathfrak{C}_{4v}^7 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{16} &= \{ \mathfrak{D}_4^6, \mathfrak{I}_m; \Gamma_q \}; \mathfrak{B}_h^{10}; \mathfrak{C}_{4v}^5.\end{aligned}$$

Die Untergruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ der Gruppe $\mathfrak{D}_4^9$ ist nach § 9 die Gruppe $\mathfrak{B}^8$. Aus der Gruppe $\mathfrak{B}^8$ entstehen nur zwei Gruppen $\mathfrak{B}_h$; die erste, nämlich $\mathfrak{B}_h^{25}$, mittels der Inversion $\mathfrak{I}$, die zweite, $\mathfrak{B}_h^{26}$, mittels $\mathfrak{I}_f$. Beide sind auch zulässige Inversionen für die in $\mathfrak{D}_4^9$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{C}_4^5$. Der Vergleich der definierenden Gleichungen für $\mathfrak{B}_h^{25}$ und $\mathfrak{B}_h^{26}$ mit den Gleichungen der aus $\mathfrak{C}_4^5$ entstehenden Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ von § 4 läßt $\mathfrak{C}_{4v}^9$ und $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$ als Untergruppen erkennen; und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{4h}^{17} &= \{ \mathfrak{D}_4^9, \mathfrak{I}; \Gamma_q' \}; \mathfrak{B}_h^{25}; \mathfrak{C}_{4v}^9 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{18} &= \{ \mathfrak{D}_4^9, \mathfrak{I}_f; \Gamma_q' \}; \mathfrak{B}_h^{26}; \mathfrak{C}_{4v}^{10}.\end{aligned}$$

Den vorstehenden Gleichungen liegt die Achsenfigur 216 zugrunde; für die Figur 216a können sie in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad \mathfrak{D}_{4h}^{17} &= \{ \mathfrak{D}_4^9, \mathfrak{I}; \Gamma_q'' \}; \mathfrak{B}_h^{23}; \mathfrak{C}_{4v}^9 \\ \mathfrak{D}_{4h}^{18} &= \{ \mathfrak{D}_4^9, \mathfrak{I}_m; \Gamma_q'' \}; \mathfrak{B}_h^{23}; \mathfrak{C}_{4v}^{10}.\end{aligned}$$

¹⁾ Diese Gleichungen gelten übereinstimmend auch für die Fig. 212a.

Die erzeugenden Symmetriezentra können sich allerdings sachlich nicht geändert haben, da die Figur 216a aus 216 nur durch Drehung um 45° entsteht. Die Rolle der Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ wird aber jetzt von der früheren Gruppe $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ übernommen, und das ist die Gruppe $\mathfrak{B}^7$. Für sie ist der erzeugende Inversionspunkt F_m mit dem Punkt M_m identisch; wir durften daher ihn als erzeugendes Zentrum benutzen. Er liefert mit $\mathfrak{B}^7$ gleichfalls die Gruppe $\mathfrak{B}_h^{23}$.

Für die Achsenfigur 217 der Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ ist $\mathfrak{B}^7$ die Untergruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, an sie haben wir daher anzuknüpfen. Sie läßt zwei erzeugende Inversionen zu; die eine gegen O , die andere gegen M_m' . Die Inversion $\mathfrak{I}$ gegen O ist aber keine zulässige Deckoperation für $\mathfrak{D}_4^{10}$; es können nur solche Inversionen gestattet sein, die die Achsen (a) und (b) miteinander vertauschen. Eine solche ist die Inversion $\mathfrak{I}_m'$ gegen M_m' . Es stellt sich aber noch eine zweite Gruppe ein. Wie nämlich bei der Ableitung der Gruppe $\mathfrak{B}_h^{24}$ erwähnt wurde, läßt sich diese Gruppe auch mit einer Inversion $\mathfrak{I}_m''$ gegen die Mitte M_m'' von MM_m erzeugen; beide Gruppen erwiesen sich mit Bezug auf die Achsenschaaren von $\mathfrak{B}^7$ als identisch. Hier sind sie es aber nicht mehr. Durch M_m' geht eine zweizählige Achse, durch den Punkt M_m'' , der auf M_mM in der Ebene γ_3 durch O_3 liegt, aber nicht; beide Punkte haben also verschiedene Lage zu den Achsen und liefern daher auch verschiedene Gruppen. Es sind nur noch die Untergruppen $\mathfrak{B}_h$ und $\mathfrak{C}_{4v}$ zu bestimmen, die in den beiden so definierten Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ auftreten. Für die Gruppen $\mathfrak{B}^7$ ist es beidemal die Gruppe $\mathfrak{B}_h^{24}$; um auch die aus der Gruppe $\mathfrak{B}^9$ entstehende Gruppe $\mathfrak{B}_h$ zu ermitteln, ziehen wir die Lage unserer beiden erzeugenden Punkte zur Fig. 217a in Betracht. Diese Lage ist in Klammern in Fig. 217a eingezeichnet; wir sehen, daß dem Punkt M_m' von Figur 217 in Figur 217a der Punkt G_m' , also auch G_m entspricht. Die aus $\mathfrak{B}^9$ entstehende Gruppe $\mathfrak{B}_h$ ist also die Gruppe $\mathfrak{B}_h^{28}$; sie enthält die Spiegelung $\mathfrak{S}_\mu$, nach § 5 ist daher $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$ die sich einstellende Untergruppe $\mathfrak{C}_{4v}$. Der dem Punkt M_m'' von 217 entsprechende Punkt ist in Figur 217a nicht enthalten, wohl aber ein ihm äquivalenter Punkt. Mit M_m'' ist die Mitte jedes Teil-

oktanten von p äquivalent, der mit einer Fläche an den Teilkanten p' angrenzt, also auch der Punkt, der um $1/2\tau_z$ über oder unter M_m' liegt, ein solcher Punkt ist der Punkt M_m von Figur 217a. Dieser Punkt ist für die Achsenfigur 143 von $\mathfrak{B}^9$ mit ihrem Punkt O gleichwertig und bestimmt daher mit $\mathfrak{B}^9$ die Gruppe $\mathfrak{B}_h^{21}$. Sie enthält auch die Operation $\mathfrak{S}_\mu(\tau_y)^1$, und daher finden wir aus § 4 die Gruppe $\mathfrak{C}_{4v}^{12}$ als Untergruppe. Wir finden so als letzte Gruppen

$$\mathfrak{D}_{4h}^{19} = \{\mathfrak{D}_4^{10}, \mathfrak{I}_m'; \Gamma_q''\}; \mathfrak{B}_h^{24}, \mathfrak{B}_h^{28}, \mathfrak{C}_{4v}^{11}$$

$$\mathfrak{D}_{4h}^{20} = \{\mathfrak{D}_4^{10}, \mathfrak{I}_m''; \Gamma_q''\}; \mathfrak{B}_h^{24}, \mathfrak{B}_h^{27}, \mathfrak{C}_{4v}^{12}.$$

7. Es gibt zwanzig Gruppen der Symmetrie D_4^h ; sechzehn mit dem Gitter Γ_q und vier mit Γ_q' .

§ 12. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte. Das Koordinatensystem werde in Übereinstimmung mit Kap. VII so gewählt, daß die Ebene δ und die Achse u_δ den Winkel der positiven x - und y -Achse halbieren²⁾. Die erzeugende Operation $\mathfrak{S}_v'$ fiel dort in die yz -Ebene, und analog fällt sie hier in die Ebene β oder doch in eine zu ihr parallele Ebene. Die Ebene σ_h ist stets die xy -Ebene; danach bestimmt sich die Lage der Inversionszentra bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{4h}$ und $\mathfrak{D}_{4h}$.

Da nur die Kenntnis der Zusatztranslationen von Interesse ist, so können diejenigen Gruppen unerörtert bleiben, bei denen Zusatzwerte nicht auftreten. Dahin gehören von den Gruppen $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{C}_4$ die Gruppen

$$\mathfrak{S}_4^1, \mathfrak{S}_4^2, \mathfrak{C}_4^1 \text{ und } \mathfrak{C}_4^5.$$

Für die übrigen Gruppen $\mathfrak{C}_4$ stellen sich in üblicher Weise die durch die erzeugende Schraubung bedingten Zusatzwerte ein; gemäß folgender Tabelle, die nur die reduzierten Werte enthält.

$$\begin{array}{l} \mathfrak{C}_4^2 \text{ und } \mathfrak{C}_4^6: \quad 0 \quad 1/2\tau_z \quad \tau_z \quad 3/2\tau_z \\ \mathfrak{C}_4^3: \quad 0 \quad \tau_z \quad 0 \quad \tau_z \quad \mathfrak{C}_4^4: \quad 0 \quad 3/2\tau_z \quad \tau_z \quad 1/2\tau_z. \end{array}$$

Die Zusatzwerte bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ erledigen sich nach den folgenden, in den früheren Kapiteln dargelegten Gesichtspunkten.

¹⁾ Vgl. S. 334, Anm. 1.

²⁾ Vgl. übrigens auch S. 420.

1) Wir prüfen zunächst, welche Wirkung die Spiegelung $\mathfrak{S}_\beta$ auf die Verbindung $(xyz) + \tau$ ausübt; sie übt auf die Komponenten von τ die gleiche Wirkung aus, wie auf (xyz) und läßt also τ_z *ungeändert*. 2) Ist $\mathfrak{S}_\beta(\tau)$ die erzeugende Operation, so tritt zu dem Koordinatentripel, das mittels der Spiegelung $\mathfrak{S}_\beta$ hervorgeht, noch τ additiv hinzu. 3) Ist $\mathfrak{S}_\mu(\tau)$ die erzeugende Operation, so haben wir (§ 4, 6) die Gleichungen

$$\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_\beta \mathfrak{I}_x, \text{ also } \mathfrak{S}_\mu(\tau) = \mathfrak{S}_\beta(\tau) \mathfrak{I}_x$$

zu benutzen, in diesem Fall ist daher $\tau + \tau_x$ der additive Zusatzwert. 4) Wir benutzen die Abkürzungen

$$\tau_x + \tau_y = 2\tau', \quad \tau_x + \tau_y + \tau_z = 2\tau_d;$$

ferner sind beim Gitter Γ_q die Zusatzwerte $\tau_x + \tau_y + \tau_z$ und $\tau_x + \tau_y - \tau_z$ gleichwertig; beide können daher durch $2\tau_d$ dargestellt werden.

Für die Gruppen $\mathfrak{G}_{4v}^1$ und $\mathfrak{G}_{4v}^9$ stellen sich Zusatzwerte nicht ein; für die übrigen Gruppen ergibt sich:

$\mathfrak{G}_{4v}^2$:	0	0	0	0
	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$
$\mathfrak{G}_{4v}^3$:	0	τ_z	0	τ_z
	τ_x	0	τ_z	0
$\mathfrak{G}_{4v}^4$:	0	τ_z	0	τ_z
	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$
$\mathfrak{G}_{4v}^5$ und $\mathfrak{G}_{4v}^{10}$:	0	0	0	0
	τ_z	τ_x	τ_x	τ_z
$\mathfrak{G}_{4v}^6$:	0	0	0	0
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
$\mathfrak{G}_{4v}^7$:	0	τ_x	0	τ_z
	0	τ_z	0	τ_z
$\mathfrak{G}_{4v}^8$:	0	τ_z	0	τ_z
	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$
$\mathfrak{G}_{4v}^{11}$:	0	$\frac{1}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{3}{2}\tau_z$
	τ_x	$\tau_x + \frac{1}{2}\tau_z$	τ_y	$\tau_y + \frac{1}{2}\tau_z^1)$
$\mathfrak{G}_{4v}^{12}$:	0	$\frac{1}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{3}{2}\tau_z$
	τ_y	$\tau_y + \frac{1}{2}\tau_z$	τ_x	$\tau_x + \frac{1}{2}\tau_z^1)$

¹⁾ Da $\tau_x + \tau_y + \tau_z$ eine primitive Translation ist, so ist $\tau_y + \tau_z$ mit τ_x und $\tau_x + \tau_z$ mit τ_y gleichwertig. Vgl. auch S. 378.

Die Gruppen $\mathbb{C}_{4h}$ erledigen sich in folgender Weise:

1) Die Inversion verwandelt beim Tripel $(xyz) + \tau$ die Translation τ in $-\tau$. 2) Die Inversionen $\mathfrak{I}_g$ und $\mathfrak{I}_d$ der Gruppen $\mathbb{C}_{4h}^3$, $\mathbb{C}_{4h}^4$, $\mathbb{C}_{4h}^6$ finden gegen die Punkte G_m und D_m statt; daher bestehen für sie die Gleichungen (Kap. XIII, § 6)

$$\mathfrak{I}_g = \mathfrak{I} \cdot \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_y, \quad \mathfrak{I}_d = \mathfrak{I} \cdot \mathfrak{I}_x,$$

es kommt also bei $\mathfrak{I}_g$ zu der Wirkung von $\mathfrak{I}$ noch der Zusatzwert $\tau_x + \tau_y$ hinzu und bei $\mathfrak{I}_d$ der Wert τ_x .

Für die Gruppen $\mathbb{C}_{4h}^1$ und $\mathbb{C}_{4h}^5$, die aus $\mathbb{C}_4^1$ und $\mathbb{C}_4^5$ mit der Inversion $\mathfrak{I}$ erzeugt sind, stellen sich Zusatzwerte nicht ein; für die übrigen Gruppen ergibt sich:

$\mathbb{C}_{4h}^2$:	0	τ_z	0	τ_z
	0	τ_z	0	τ_z
$\mathbb{C}_{4h}^3$:	0	0	0	0
	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$
$\mathbb{C}_{4h}^4$:	0	τ_z	0	τ_z
	$2\tau'$	$2\tau_d'''$	$2\tau'$	$2\tau_d'''$
$\mathbb{C}_{4h}^6$:	0	$\frac{1}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{3}{2}\tau_z$
	τ_x	$\tau_x + \frac{3}{2}\tau_z$	τ_y	$\tau_x + \frac{1}{2}\tau_z$

Die Gruppen $\mathbb{B}_d$ sind sämtlich mit einer Operation $\mathfrak{S}_d(\tau)$ gebildet. Hier ist zunächst zu beachten, daß die Operation $\mathfrak{S}_d$ die Translationen τ_x und τ_y miteinander vertauscht; dadurch erfahren die Zusatzwerte, die schon bei den Gruppen $\mathbb{B}$ auftreten, die entsprechende Änderung. Das übrige regelt sich in der mehrfach dargelegten Weise, unter Beachtung der Gleichung

$$\mathfrak{S}_d(\tau') = \mathfrak{S}_d \cdot \{\tau''\} \cdot \{\tau'\} = \mathfrak{S}_d\{\tau_x\}.$$

Für $\mathbb{B}_d^1$, $\mathbb{B}_d^5$, $\mathbb{B}_d^9$, $\mathbb{B}_d^{11}$ treten Zusatztranslationen nicht auf. Für die übrigen ergibt sich:

$\mathbb{B}_d^2, \mathbb{B}_d^6, \mathbb{B}_d^{10}$:	0	0	0	0
	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z
$\mathbb{B}_d^3$:	0	$2\tau'$	$2\tau'$	0
	0	$2\tau'$	$2\tau'$	0
$\mathbb{B}_d^4$:	0	$2\tau'$	$2\tau'$	0
	τ_z	$2\tau_d$	$2\tau_d$	τ_z

$\mathfrak{B}_d^7:$	0	0	0	0
	τ_x	τ_x	τ_x	τ_x
$\mathfrak{B}_d^8:$	0	0	0	0
	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$	$\tau_x + \tau_z$
$\mathfrak{B}_d^{12}:$	0	τ_y	τ_z	τ_x
	τ_d	τ_d''	τ_d'''	$\tau_d'^1$

Die Gruppen $\mathfrak{D}_4$ sind sämtlich mit einer Operation $\mathfrak{U}_d(\tau)$ abgeleitet; der Bestimmung ihrer Zusatzwerte ist folgendes voranzuschicken:

1) Da die Operation $\mathfrak{U}_d$ auf die Komponenten der Translation τ im Tripel $(xyz) + \tau$ genau wie auf die Koordinaten xyz wirkt, führt sie (Kap. VII, § 1)

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z \text{ in } \tau_y, \tau_x, -\tau_z$$

über. 2) Ist $\mathfrak{U}_d(\tau)$ die erzeugende Operation, so kommt noch τ als additiver Zusatzwert hinzu. 3) Die Achsenfiguren, an die wir anschließen, sind für $\mathfrak{D}_4^5$ und $\mathfrak{D}_4^9$ die Figuren 212 und 216.

Für $\mathfrak{D}_4^1$ und $\mathfrak{D}_4^9$ stellen sich Zusatzwerte nicht ein; für die übrigen ergeben sich die folgenden positiven Werte:

$\mathfrak{D}_4^2:$	0	0	0	0
	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$
$\mathfrak{D}_4^3$ und $\mathfrak{D}_4^{102}:$	0	$\frac{1}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{3}{2}\tau_z$
	0	$\frac{3}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{1}{2}\tau_z$
$\mathfrak{D}_4^4:$	0	$\frac{1}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{3}{2}\tau_z$
	$2\tau'$	$2\tau' + \frac{3}{2}\tau_z$	$2\tau_d$	$2\tau' + \frac{1}{2}\tau_z$
$\mathfrak{D}_4^5:$	0	τ_z	0	τ_z
	0	τ_z	0	τ_z
$\mathfrak{D}_4^6:$	0	τ_z	0	τ_z
	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_4^7:$	0	$\frac{3}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{1}{2}\tau_z$
	0	$\frac{1}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{3}{2}\tau_z$
$\mathfrak{D}_4^8:$	0	$\frac{3}{2}\tau_z$	τ_z	$\frac{1}{2}\tau_z$
	$2\tau'$	$2\tau' + \frac{1}{2}\tau_z$	$2\tau_d'''$	$2\tau' + \frac{3}{2}\tau_z$

¹⁾ Statt τ_d' , τ_d'' , τ_d''' kann man auch $\tau_x + \tau_d$, $\tau_y + \tau_d$, $\tau_z + \tau_d$ setzen.

²⁾ Die Tripel beziehen sich auf die S. 407 enthaltene Erzeugungsgleichung. Vgl. auch S. 421.

Von den Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ sind nur die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^1$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ zusatzfrei. Bei den übrigen Gruppen soll es genügen, die Zusatzwerte für diejenigen Tripel anzugeben, die aus den Tripeln der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ mittels der erzeugenden Inversion hervorgehen, die also den Zeilen III und IV von Kap. VII, § 5 entsprechen. Für die Zeilen I und II ergeben sie sich aus der vorstehenden Tabelle. Es sind dieselben Achsenfiguren oder Erzeugungen zugrunde gelegt, wie für die Gruppen $\mathfrak{D}_4$ selbst.

$\mathfrak{D}_{4h}^2$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$:	τ_1	τ_2	τ_3	τ_z
	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z
$\mathfrak{D}_{4h}^3$:	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$
	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$
$\mathfrak{D}_{4h}^4$:	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_{4h}^5$:	0	0	0	0
	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$
$\mathfrak{D}_{4h}^6$:	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_{4h}^7$:	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$	$2\tau'$
	0	0	0	0
$\mathfrak{D}_{4h}^8$:	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z
$\mathfrak{D}_{4h}^9$:	0	τ_z	0	τ_z
	0	τ_z	0	τ_z
$\mathfrak{D}_{4h}^{10}$:	τ_z	0	τ_z	0
	τ_z	0	τ_z	0
$\mathfrak{D}_{4h}^{11}$:	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$
	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_{4h}^{12}$:	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$
	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$
$\mathfrak{D}_{4h}^{13}$:	0	τ_z	0	τ_z
	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_{4h}^{14}$:	τ_z	0	τ_z	0
	$2\tau_d$	$2\tau'$	$2\tau_d$	$2\tau'$

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{D}_{4h}^{15}: & 2\tau' & 2\tau_d & 2\tau' & 2\tau_d \\ & 0 & \tau_z & 0 & \tau_z \\ \mathfrak{D}_{4h}^{16}: & 2\tau_d & 2\tau' & 2\tau_d & 2\tau' \\ & \tau_z & 0 & \tau_z & 0. \end{array}$$

Die Formeln für $\mathfrak{D}_{4h}^{15}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ befinden sich am Schluß des Paragraphen.

Für die zyklische Gruppe $\mathfrak{C}_4^6$ und die aus ihr abgeleiteten Gruppen soll auch noch die in Figur 192 (S. 381) enthaltene Achsenlage berücksichtigt werden. Die Formeln für $\mathfrak{C}_4^6$ haben wir direkt abzuleiten. Die vier Tripel der Punktgruppe C_4 sind (S. 100)

$$xyz, \bar{y}xz, \bar{x}\bar{y}z, y\bar{x}z.$$

Ist $\mathfrak{B}$ die Drehung um die Achse b der Figur 192 und $\mathfrak{C}$ die Drehung um die Achse c , so bestehen nach Kap. IV, § 1 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\pi/2, 1/2 \tau_z) &= \mathfrak{C}(\pi/2, 1/2 \tau_z) \cdot \{\tau'\}, \\ \mathfrak{B}(3\pi/2, 3/2 \tau_z) &= \mathfrak{C}(3\pi/2, 3/2 \tau_z) \cdot \{\tau''\}; \end{aligned}$$

sie bewirken, daß sich für das zweite und vierte Tripel die Zusatztranslationen

$$\tau' + 1/2 \tau_z = \tau_d'', \quad \tau'' + 3/2 \tau_z = \tau_d'''$$

einstellen, und so ergeben sich für $\mathfrak{C}_4^6$ die Zusatzwerte

$$\mathfrak{C}_4^6: \quad 0 \quad \tau' + 1/2 \tau_z \quad 0 \quad \tau'' + 3/2 \tau_z.$$

Um die neuen Formeln für die Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$ und $\mathfrak{C}_{4v}^{12}$ abzuleiten, benutzen wir zweckmäßig die S. 101 genannte zweite Darstellung der Koordinatentripel von C_{4v} . Für sie halbiert die erzeugende Ebene σ_v den Winkel der positiven x - und y -Achse. Die gleiche Lage hat die erzeugende Ebene für die Achsen der Figur 198a (S. 387). Die Spiegelung $\mathfrak{S}_v$ an dieser Ebene führt xyz in yxz über, also τ_x und τ' in sich selbst und τ'' in $-\tau''$, und somit, da das Gitter flächenzentriert ist, ebenfalls in sich selbst, die Operation $\mathfrak{S}_v(\tau_z)$ fügt noch τ_z hinzu; und so ergeben sich die Zusatzwerte

$$\begin{array}{l} \mathbb{C}_{4v}^{11}: \quad 0 \quad \tau' + \frac{1}{2}\tau_z \quad 0 \quad \tau'' + \frac{3}{2}\tau_z \\ \quad \quad 0 \quad \tau' + \frac{1}{2}\tau_z \quad 0 \quad \tau'' + \frac{3}{2}\tau_z \\ \mathbb{C}_{4v}^{12}: \quad 0 \quad \tau' + \frac{1}{2}\tau_z \quad 0 \quad \tau'' + \frac{3}{2}\tau_z \\ \quad \tau_z \quad \tau' + \frac{3}{2}\tau_z \quad \tau_z \quad \tau'' + \frac{1}{2}\tau_z. \end{array}$$

Für die Gruppe $\mathbb{C}_{4h}^6$ ist $\mathfrak{J}_g'$ die erzeugende Operation; sie fügt zur Inversion $\mathfrak{J}$ noch die Zusatztranslation τ' hinzu, und daher ergeben sich die Werte

$$\mathbb{C}_{4h}^6: \quad 0 \quad \tau_d'' \quad 0 \quad \tau_d''' \quad \tau' \quad \frac{3}{2}\tau_z \quad \tau' \quad \tau_y + \frac{1}{2}\tau_z.$$

Um die Tripel für die Gruppen $\mathbb{D}_4^{10}$ zu erhalten, haben wir zunächst die Formeln von Kap. VII so zu ändern, daß die erzeugende Umwendung in die x -Achse fällt; sie sind dann

$$24) \quad x y z, \quad \bar{y} x z, \quad \bar{x} \bar{y} z, \quad y \bar{x} z, \quad x \bar{y} \bar{z}, \quad \bar{y} \bar{x} \bar{z}, \quad \bar{x} y \bar{z}, \quad y x \bar{z}.$$

Die Zusatzwerte von $\mathbb{C}_4^6$ erleiden durch Π_a die Änderung, daß τ' in τ'' , τ'' in τ' und τ_z in $-\tau_z$ übergeht. Daher ergeben sich für $\mathbb{D}_4^{10}$ die Werte

$$\mathbb{D}_4^{10}: \quad 0 \quad \tau' + \frac{1}{2}\tau_z \quad 0 \quad \tau'' + \frac{3}{2}\tau_z \\ \quad \quad 0 \quad \tau' + \frac{3}{2}\tau_z \quad 0 \quad \tau'' + \frac{1}{2}\tau_z.$$

Die Gruppen $\mathbb{D}_{4h}^{19}$ und $\mathbb{D}_{4h}^{20}$ gehen aus $\mathbb{D}_4^{10}$ mittels der Inversionen $\mathfrak{J}_m'$ und $\mathfrak{J}_m''$ hervor (Fig. 217). Sie bedingen noch τ_d und $3\tau_d$ als Zusatzwerte, diese treten also zum Übergang einer jeden Translation τ in $-\tau$ noch hinzu. Dies liefert, wenn wir uns wieder auf die Zeilen III und IV von Kap. VII, § 5 beschränken und beachten, daß das Gitter flächenzentriert ist, die neuen Werte

$$\begin{array}{l} \mathbb{D}_{4h}^{19}: \quad \tau_d \quad 0 \quad \tau_d \quad 0 \quad \tau_d \quad \tau_z \quad \tau_d \quad \tau_y \\ \mathbb{D}_{4h}^{20}: \quad 3\tau_d \quad 2\tau_d \quad 3\tau_d \quad 2\tau_d \quad 3\tau_d \quad \tau_z + 2\tau_d \quad 3\tau_d \quad \tau_y + 2\tau_d. \end{array}$$

als Zusatzwerte zu denjenigen Tripeln, die sich aus den Tripeln 24) durch Inversion ergeben.

Um die Zusatztranslationen auch für die Figuren 212a, 216a, 217a zu bilden, bedarf es in jedem Fall nur der Koordinatentransformation, die dem Übergang von der einen Figur zur andern entspricht. Es sind die folgenden:

1) Dem Übergang von der Figur 212 zur Fig. 212a entspricht der Übergang von x, y, z in $x' - \tau_x, y', z'$; die Zusatztranslationen bleiben jedoch ungeändert. 2) Dem Übergang von der Figur 216 zur Figur 216a entspricht eine Drehung der xy -Achsen um 45° ; von den Zusatzwerten geht τ_x, τ_y in τ'', τ' über. 3) Von der Figur 217 gelangt man zur Figur 217a durch eine Drehung vom Winkel 45° um die z -Achse, wiederum mit der eben genannten Umwandlung der Zusatzwerte; hierzu tritt noch eine Verschiebung um $\frac{1}{2}\tau_x + \frac{3}{4}\tau_z$.

Die Gruppen

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{C}_4^1, & \mathbb{C}_4^2, & \mathbb{C}_4^3, & \mathbb{C}_4^5, & \mathbb{C}_{4v}^1, & \mathbb{C}_{4v}^9, & \mathbb{C}_{4h}^1, & \mathbb{C}_{4h}^5, \\ \mathbb{B}_d^1, & \mathbb{B}_d^5, & \mathbb{B}_d^9, & \mathbb{B}_d^{11}, & \mathbb{D}_4^1, & \mathbb{D}_4^9, & \mathbb{D}_{4h}^1, & \mathbb{D}_{4h}^{17} \end{array}$$

sind diejenigen, die den Bravais'schen Strukturen entsprechen; die Gruppen $\mathbb{D}_{4h}^1$ und $\mathbb{D}_{4h}^{17}$ liefern zugleich *die Gesamtsymmetrie für die Gitter Γ_q und F_q'* .

§ 13. Die Eigensymmetrie der Bausteine. In die Tabellen nehmen wir die Punkte der Symmetrie S_1, S_2, C_2, C_4 nicht auf; doch sei hervorgehoben, daß eine vierzählige Schraubenachse mit der Translation τ_z zugleich eine zweizählige Drehungsachse ist und daher Punktlagen der Symmetrie C_2 darstellt.

Bei den tetragonalen Gruppen werden infolge der vierzähligen Achsen schon Punkte des Oktanten p gleichwertig, z. B. D und E , H und K für eine vierzählige Drehungsachse a , ebenso D und K , E und H , sowie O und F für eine vierzählige Schraubenachse a mit der Translation τ_z . Bei den Gruppen $\mathbb{C}_{4v}^2, \mathbb{C}_{4v}^4, \mathbb{C}_{4v}^6, \mathbb{C}_{4v}^8, \mathbb{C}_{4v}^{11}, \mathbb{C}_{4h}^3, \mathbb{C}_{4h}^4, \mathbb{C}_{4h}^6$ werden auch die Achsen a und b gleichwertig; *in den Figuren ist jedoch wegen Einheitlichkeit der Anlage die Bezeichnung a, b beibehalten worden.*

Tabelle A. Die Gruppen $\mathbb{C}_{4v}$ und $\mathbb{C}_{4h}$

Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathbb{C}_{4v}^1$	C_2^v C_4^v	c a, b	$\mathbb{C}_{4h}^1$	C_2^h C_4^h	$D = E, H = K$ O, F, G, M
$\mathbb{C}_{4v}^2, \mathbb{C}_{4v}^4$	C_2^v	c			
$\mathbb{C}_{4v}^3$	C_2^v	a, b	$\mathbb{C}_{4h}^2$	C_2^h	$O = F, D = K$ $E = H, G = M$
$\mathbb{C}_{4v}^7$	C_2^v	a, b, c			
$\mathbb{C}_{4v}^9$	C_2^v	b			
	C_4^v	a	$\mathbb{C}_{4h}^{5 \cdot 1)}$	C_2^h C_4^h	$D = E = H = K$ $O = M, F = G$
$\mathbb{C}_{4v}^{10}$	C_2^v	b			
$\mathbb{C}_{4v}^{11}$	C_2^v	c			

Die Eigensymmetrie für die Gruppen $\mathbb{B}_d$ wollen wir für die einzelnen Gruppen nach den Ergebnissen von § 8 zunächst etwas eingehender darlegen. Bei der Gruppe $\mathbb{B}_d^1$ sind O, F, G, M Punkte der Symmetrie V^d ; bei den Gruppen $\mathbb{B}_d^2, \mathbb{B}_d^3, \mathbb{B}_d^4$ treten solche Punkte nicht auf, sondern nur Punkte S_1 ; nach § 6 fallen sie bei $\mathbb{B}_d^2$ in die Punkte F_m und G' , bei $\mathbb{B}_d^3$ in D, E, H, K , und bei $\mathbb{B}_d^4$ in H' und K' . Bei den Gruppen $\mathbb{B}_d^5$ und $\mathbb{B}_d^6$ sind alle vier Kanten von Fig. 205 vierzählige Achsen; bei $\mathbb{B}_d^5$ erwerben alle Punkte O bis M die Symmetrie V^d , bei $\mathbb{B}_d^6$ werden F_m, G', H', K' Punkte S_4 . Für $\mathbb{B}_d^7$ und $\mathbb{B}_d^8$ ergab sich nur w' als vierzählige Achse; bei $\mathbb{B}_d^7$ fällt je ein fester Punkt in G_m und G'_m , bei $\mathbb{B}_d^8$ in M_m . Bei $\mathbb{B}_d^9$ sind alle Punkte O bis M und M_m Punkte der Symmetrie V^d , während $\mathbb{B}_d^{10}$ nur Punkte S_4 besitzt, und zwar in F_m, G', H', K' sowie in G_m und G'_m . Die Gruppe V_d^{11} enthält in O, M, F, G

1) Für $\mathbb{C}_{4h}^5$ liegen die Achsenfiguren 87 und 201 zugrunde.

wieder Punkte der Symmetrie V^d , zugleich in H' und K' Punkte der Symmetrie S_4 ; endlich kommen der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$ die Punkte Q' und Q'' von Fig. 209 als Punkte S_4 zu¹⁾.

Tabelle B. Die Gruppen $\mathfrak{B}_d$

Gruppen $\mathfrak{B}_d$	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppen $\mathfrak{B}_d$	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{B}_d^1$	C_2 V V^d	a, b $D = E, H = K$ O, F, G, M	$\mathfrak{B}_d^8$	V S_4	$O = G = H = K$ $D = E = F = M$ M_m
$\mathfrak{B}_d^2$	V S_4	$O = F, G = M$ $D = K, E = H$ F_m, G'	$\mathfrak{B}_d^9$	C_2 V^d	a, w' $O = G, F = M$ $D = E, H = K, M_m$
$\mathfrak{B}_d^3$	C_2 S_4	$a = b$ $D = E, H = K$	$\mathfrak{B}_d^{10}$	V S_4	$O = F = G = M$ $D = E = H = K, M_m$ $F_m = G' = H' = K'$ $G_m = G_m'$
$\mathfrak{B}_d^4$	S_4	H', K'	$\mathfrak{B}_d^{11}$	C_2 V S_4 V^d	$a = b$ $D = E = H = K$ $H' = K'$ $O = M, F = G$
$\mathfrak{B}_d^5$	C_2 V^d	$a = b, c, w'$ $O = G, F = M$ $D = E, H = K$	$\mathfrak{B}_d^{12}$	S_4	$Q' = Q''$ ³⁾
$\mathfrak{B}_d^6$	V S_4	$O = G = F = M$ $D = E = H = K$ $F_m = G', H' = K'$			
$\mathfrak{B}_d^{7,2)}$	V S_4	$O = D = E = G$ $F = H = K = M$ (F_m, G_m')			

Die Eigensymmetrien der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ lassen sich aus ihren Achsenfiguren unmittelbar ablesen, ebenso die gleichwertigen Punktlagen. In den Achsenfiguren fehlt jedoch meist eine Bezeichnung der ungleichwertigen Nebenachsen. Sie ist unter-

¹⁾ Vgl. S. 398, Anm. 1.

²⁾ Durch die Operation $\mathfrak{S}(\tau')$ geht O in D und D in G über, durch $\mathfrak{S}(\tau' + \tau_2)$ O in H und D in M .

³⁾ Durch die Operation $\mathfrak{S}(\tau_d)$ geht Q' in Q'' über.

blieben, um die Figuren nicht mit Buchstaben zu beschweren, und soll daher hier nachgeholt werden, unter Beschränkung auf die Drehungsachsen. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_4^1$ sind die Achsenschaaren der Ebenen γ und γ' ungleichwertig; in jeder einzelnen Ebene sind die Achsen diagonalen Richtung gleichwertig, dagegen zerfallen die Achsen seitlicher Richtung in zwei ungleichwertige Schaaren. Die Gruppe $\mathfrak{D}_4^2$ enthält nur Drehungsachsen diagonalen Richtung, sie bilden in γ und γ' je eine Schaar gleichwertiger Achsen. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_4^5$ sind die Achsen in den Ebenen γ und γ' in der Weise, wie es die Figur zeigt, gleichwertig, sie zerfallen in jeder der beiden Ebenen in vier ungleichwertige Schaaren; die diagonalen Achsen der Ebene ν bilden ebenfalls zwei ungleichwertige Schaaren. Die in der Ebene ν enthaltenen diagonalen Achsen der Gruppe $\mathfrak{D}_4^6$ bilden ebenfalls zwei ungleichwertige Schaaren. Die Gruppe $\mathfrak{D}_4^9$ besitzt in jeder der drei Ebenen γ , γ' , ν zwei ungleichwertige Achsenschaaren, die Achsen der Ebenen γ und γ' sind gleichwertig. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ endlich sind die Achsen der drei Ebenen γ , γ' , ν , wie die Figur 217 zeigt, gleichwertig¹⁾; jede einzelne Ebene enthält zwei ungleichwertige Schaaren. Die Achsen diagonalen Richtung sind sämtlich gleichwertig.

Die Eigensymmetrien der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ bedürfen einer eingehenden Erörterung. Sie sind von besonderer Wichtigkeit, da sie zugleich die Eigensymmetrien der kubischen Gruppen entscheidend beeinflussen. Wir gewinnen sie in folgender Weise. Eine jede Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ besitzt jedenfalls alle diejenigen Punktlagen mit Eigensymmetrie, die ihren Untergruppen zukommen; zunächst also die der Gruppe $\mathfrak{D}_4$, aus der sie entsteht, und die der Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}$ und $\mathfrak{B}_h$, die in ihren definierenden Gleichungen angegeben sind, endlich auch die ihrer Untergruppe $\mathfrak{B}_d$. Alle Eigensymmetrien, die diesen Gruppen zukommen, sind aus den Tabellen zu ersehen. Sie können freilich in den Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ auf einen *höheren* Symmetriecharakter anwachsen. Fällt z. B. ein Punkt, der für eine Untergruppe den Symmetrie-

¹⁾ Die Achse DD_m geht durch die Operation $\mathfrak{A}(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_2)$ in $H_m M_m$ über usw.

charakter S_4 hat, in eine Achse, die eine vierzählige Drehungsachse einer Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ ist, so verwandelt sich die Symmetrie S_4 von selbst in die höhere Symmetrie C_4^h .

Die Untergruppen $\mathfrak{B}_d$ der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ sind uns freilich noch nicht bekannt, sie sind aber für eine einfache Feststellung der Punkte der Symmetrie S_4 nötig. Analog zu dem Verfahren, nach dem wir in § 12 die Untergruppe $\mathfrak{C}_{4v}$ einer jeden Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ bestimmten, können sie durch äußere Vergleichung der definierenden Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ und der in ihnen enthaltenen Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}_{4v}$ gewonnen werden. Es mag genügen, die Art der Vergleichung an einigen Beispielen darzulegen. Die folgenden Tatsachen schicken wir voraus.

1) Eine jede Gruppe $\mathfrak{D}_4$ besitzt zwei verschiedene Untergruppen $\mathfrak{B}$, nämlich eine Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ und eine Gruppe $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$, und jeder von beiden entspricht eine Gruppe $\mathfrak{B}_d$; daher treten in jeder Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{B}_d$ auf.

2) Auch für die Gruppen $\mathfrak{B}_d$ selbst tritt eine gewisse Verdoppelung ein. Wie wir in § 8 sahen, konnten wir jedes Paar vertikaler Gegenkanten einer Gruppe $\mathfrak{B}$ zu vierzähligen Achsen der Gruppe $\mathfrak{B}_d$ machen; beide so entstehenden Gruppen $\mathfrak{B}_d$ erwiesen sich dort als identisch. *Hier hört diese Gleichwertigkeit auf.* Den Achsen (c) kommt für die Gruppen $\mathfrak{D}_4$ eine andere Bedeutung zu, als den Achsen (a, b); wir haben daher zu unterscheiden, ob sich die entstehenden Gruppen $\mathfrak{B}_d$ auf die Achsen (a, b) oder auf die Achsen (c) beziehen. In welchem Fall sich die eine oder die andere Gruppe $\mathfrak{B}_d$ einstellt, ist leicht anzugeben. Nach § 8 sind $\mathfrak{S}_\delta$ und $\mathfrak{S}_\epsilon(\tau_x - \tau_y)$ die charakteristischen Operationen der dort erzeugten Gruppen $\mathfrak{B}_d$; für die Gruppen $\mathfrak{B}_d$, die sich auf die Achsen (c) beziehen, treten analog $\mathfrak{S}_\epsilon$ und $\mathfrak{S}_\delta(\tau_x + \tau_y)$ als charakteristische Operationen ein. Wir bezeichnen die so definierten Gruppen $\mathfrak{B}_d$ durch $\mathfrak{B}_d(c)$ ¹⁾.

¹⁾ Bei $\mathfrak{B}_d^{11}$ und $\mathfrak{B}_d^{12}$ sind nach § 6 sowohl die Achsen a, b , wie auch c vierzählig. Der Unterschied von $\mathfrak{B}_d$ und $\mathfrak{B}_d(c)$ drückt sich hier nur in der Lage der festbleibenden Punkte aus; es sind für $\mathfrak{B}_d^{11}$ die Punkte O, G, H', K' , bei $\mathfrak{B}_d^{11}(c)$ aber D, E, F_m, G' , und analog ist es für $\mathfrak{B}_d^{12}$ und $\mathfrak{B}_d^{12}(c)$, die Lage von Q' und Q'' in Figur 209 entspricht also der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}(c)$ (vgl. S. 398, Anm.).

Wir wollen dies an einigen Beispielen näher durchführen; ein erstes sei die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^2$. Nach ihrer Gleichung (S. 411) enthält sie die Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^5$ und $\mathfrak{B}_h^3$, also auch die Gruppe $\mathfrak{B}^1$, aus der $\mathfrak{B}_h^3$ entsteht. Ferner tritt in der Gleichung von $\mathfrak{C}_{4v}^5$ (S. 384) die Gleitspiegelung $\mathfrak{S}_d(\tau_z)$ als erzeugende Operation auf. *Mit der Kenntniss der Gruppe $\mathfrak{B}^1$ und der Operation $\mathfrak{S}_d(\tau_z)$ ist aber die gesuchte Gruppe $\mathfrak{B}_d$ festgelegt*; es gibt nach § 8 nur eine zugehörige Gruppe $\mathfrak{B}_d$, nämlich die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$. Ein zweites Beispiel sei die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^5$. Sie geht aus der Gruppe $\mathfrak{D}_4^2$ hervor und enthält nach ihrer Gleichung (S. 412) die Untergruppen $\mathfrak{C}_{4v}^2$ und $\mathfrak{B}_h^9$, also auch die Gruppe $\mathfrak{B}^3$. Die Gruppe $\mathfrak{C}_{4v}^2$ ist (S. 384) mit den Operationen $\mathfrak{S}_d(\tau_x + \tau_y)$ und $\mathfrak{S}_\varepsilon$ gebildet; den obigen Ausführungen gemäß *bezieht sie sich also auf die Achsen c* und ist also eine Gruppe $\mathfrak{B}_d(c)$. Sie entspricht derjenigen Gruppe $\mathfrak{B}_d$ von § 8, die aus $\mathfrak{B}^3$ mit den Operationen $\mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_x - \tau_y)$ und $\mathfrak{S}_d$ gebildet ist, also der Gruppe $\mathfrak{B}_d^3$, und ist daher durch $\mathfrak{B}_d^3(c)$ zu bezeichnen. Dies ist also die sich für $\mathfrak{D}_{4h}^5$ ergebende Untergruppe $\mathfrak{B}_d$; wir haben noch hinzuzufügen, daß es diejenige ist, die aus der Untergruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ von $\mathfrak{D}_4$ entstanden ist. In dieser Weise kann die Bestimmung der aus den Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ hervorgehenden Gruppen $\mathfrak{B}_d$ für jede Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ vorgenommen werden. Das allgemeine Ergebnis ist in der folgenden Tabelle enthalten; sie enthält für jede Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ genau das, was wir soeben in Betracht zogen, also die Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, die Gruppe $\mathfrak{C}_{4v}$ und die in ihr auftretende erzeugende Operation $\mathfrak{S}_d$, $\mathfrak{S}_d(\tau_z)$ usw., sowie die daraus resultierende Gruppe $\mathfrak{B}_d$.

$\mathfrak{D}_{4h}^1$	$\mathfrak{D}_{4h}^2$	$\mathfrak{D}_{4h}^3$	$\mathfrak{D}_{4h}^4$	$\mathfrak{D}_{4h}^5$	$\mathfrak{D}_{4h}^6$	$\mathfrak{D}_{4h}^7$	$\mathfrak{D}_{4h}^8$
$\mathfrak{C}_{4v}^1$	$\mathfrak{C}_{4v}^5$	$\mathfrak{C}_{4v}^2$	$\mathfrak{C}_{4v}^6$	$\mathfrak{C}_{4v}^2$	$\mathfrak{C}_{4v}^6$	$\mathfrak{C}_{4v}^1$	$\mathfrak{C}_{4v}^5$
$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^3$	$\mathfrak{B}^3$	$\mathfrak{B}^3$	$\mathfrak{B}^3$
$\mathfrak{S}_d$	$\mathfrak{S}_d(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_\varepsilon$	$\mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_\varepsilon$	$\mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_d$	$\mathfrak{S}_d(\tau_z)$
$\mathfrak{B}_d^1$	$\mathfrak{B}_d^2$	$\mathfrak{B}_d^1(c)$	$\mathfrak{B}_d^2(c)$	$\mathfrak{B}_d^3(c)$	$\mathfrak{B}_d^4(c)$	$\mathfrak{B}_d^5$	$\mathfrak{B}_d^4$
$\mathfrak{D}_{4h}^9$	$\mathfrak{D}_{4h}^{10}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{11}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{12}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{13}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{14}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{15}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{16}$
$\mathfrak{C}_{4v}^7$	$\mathfrak{C}_{4v}^3$	$\mathfrak{C}_{4v}^8$	$\mathfrak{C}_{4v}^4$	$\mathfrak{C}_{4v}^8$	$\mathfrak{C}_{4v}^4$	$\mathfrak{C}_{4v}^7$	$\mathfrak{C}_{4v}^3$
$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^1$	$\mathfrak{B}^3$	$\mathfrak{B}^3$	$\mathfrak{B}^3$	$\mathfrak{B}^3$
$\mathfrak{S}_d(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_d$	$\mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_\varepsilon$	$\mathfrak{S}_\varepsilon(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_\varepsilon$	$\mathfrak{S}_d(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_d$
$\mathfrak{B}_d^2$	$\mathfrak{B}_d^1$	$\mathfrak{B}_d^2(c)$	$\mathfrak{B}_d^1(c)$	$\mathfrak{B}_d^4(c)$	$\mathfrak{B}_d^3(c)$	$\mathfrak{B}_d^4$	$\mathfrak{B}_d^3$

$\mathcal{D}_{4h}^{17}$	$\mathcal{D}_{4h}^{18}$	$\mathcal{D}_{4h}^{19}$	$\mathcal{D}_{4h}^{20}$
$\mathcal{C}_{4v}^9$	$\mathcal{C}_{4v}^{10}$	$\mathcal{C}_{4v}^{11}$	$\mathcal{C}_{4v}^{12}$
$\mathfrak{B}^8$	$\mathfrak{B}^8$	$\mathfrak{B}^9$	$\mathfrak{B}^9$
$\mathcal{S}_\delta$	$\mathcal{S}_\varepsilon$	$\mathcal{S}_\vartheta(\tau_d)^1$	$\mathcal{S}_\eta(\tau_{d'})^1$
$\mathfrak{B}_d^{11}$	$\mathfrak{B}_d^{11}(c)$	$\mathfrak{B}_d^{12}$	$\mathfrak{B}_d^{12}(c)$

Eine analoge Tabelle soll auch noch für die aus den Untergruppen $\mathfrak{B}_{\delta\varepsilon}$ entstehenden Gruppen $\mathfrak{B}_d$ Platz finden; ihre spiegelnden Ebenenschaaren sind diesmal die Schaaren $\{\alpha\}$ und $\{\beta\}$. Wir behandeln zunächst wieder die Gruppen $\mathcal{D}_{4h}^2$ und $\mathcal{D}_{4h}^5$. Nach der definierenden Gleichung von § 10 ist in $\mathcal{D}_4^1$ die Gruppe $\mathfrak{B}^6$ als Gruppe $\mathfrak{B}_{\delta\varepsilon}$ enthalten, also auch in $\mathcal{D}_{4h}^2$; ihre Untergruppe $\mathcal{C}_{4v}$ ist die Gruppe $\mathcal{C}_{4v}^5$. *Mit ihnen verfahren wir ganz analog wie oben.* Aus der definierenden Gleichung von $\mathcal{C}_{4v}^5$ (S. 384) haben wir jetzt die Operation für die Ebene β , also $\mathcal{S}_\beta(\tau_z)$ zu entnehmen, und nun an ihre Stelle noch $\mathcal{S}_\delta(\tau_z)$ zu setzen. Die so gefundene Operation $\mathcal{S}_\delta(\tau_z)$ bestimmt mit $\mathfrak{B}^6$ wieder die gesuchte Gruppe $\mathfrak{B}_d$; sie ist nach § 8 die Gruppe $\mathfrak{B}_d^6$. Für die zweite oben behandelte Gruppe $\mathcal{D}_{4h}^5$ ist $\mathfrak{B}^6$ ebenfalls die Gruppe $\mathfrak{B}_{\delta\varepsilon}$, ihre Untergruppe $\mathcal{C}_{4v}$ ist $\mathcal{C}_{4v}^2$. Die jetzt in Betracht kommende Operation von $\mathcal{C}_{4v}^2$ ist $\mathcal{S}_\mu(\tau_y)$; da der Ebene $\mu \parallel \beta$ die Ebene $\vartheta \parallel \delta$ entspricht, so haben wir sie zunächst durch $\mathcal{S}_\vartheta(\tau')$ zu ersetzen, und finden so (S. 395) die Gruppe $\mathfrak{B}_d^7$ als die gesuchte Gruppe $\mathfrak{B}_d$. So ergibt sich als zweite Tabelle²⁾

$\mathcal{D}_{4h}^1$	$\mathcal{D}_{4h}^2$	$\mathcal{D}_{4h}^3$	$\mathcal{D}_{4h}^4$	$\mathcal{D}_{4h}^5$	$\mathcal{D}_{4h}^6$	$\mathcal{D}_{4h}^7$
$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$
$\mathcal{S}_\beta$	$\mathcal{S}_\beta(\tau_z)$	$\mathcal{S}_\mu(\tau_y)$	$\mathcal{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)$	$\mathcal{S}_\mu(\tau_y)$	$\mathcal{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)$	$\mathcal{S}_\beta$
$\mathfrak{B}_d^5$	$\mathfrak{B}_d^6$	$\mathfrak{B}_d^7$	$\mathfrak{B}_d^8$	$\mathfrak{B}_d^7$	$\mathfrak{B}_d^8$	$\mathfrak{B}_d^5$
$\mathcal{D}_{4h}^8$	$\mathcal{D}_{4h}^9$	$\mathcal{D}_{4h}^{10}$	$\mathcal{D}_{4h}^{11}$	$\mathcal{D}_{4h}^{12}$	$\mathcal{D}_{4h}^{13}$	
$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	
$\mathcal{S}_\beta(\tau_z)$	$\mathcal{S}_\beta$	$\mathcal{S}_\beta(\tau_z)$	$\mathcal{S}_\mu(\tau_y)$	$\mathcal{S}_\mu(\tau_y + \tau_z)$	$\mathcal{S}_\mu(\tau_y)$	
$\mathfrak{B}_d^6$	$\mathfrak{B}_d^5$	$\mathfrak{B}_d^6$	$\mathfrak{B}_d^7$	$\mathfrak{B}_d^8$	$\mathfrak{B}_d^7$	

¹⁾ Diese Operationen entsprechen der Achsenfigur 145a (S. 321), die analog wie die Figur 217 von $\mathcal{D}_4^{10}$ angelegt ist (die Drehungsachse geht durch O), und die wir daher hier zu benutzen haben.

²⁾ Die Gruppen $\mathcal{C}_{4v}$ sind weggeblieben, da sie in der ersten Tabelle enthalten sind.

$\mathfrak{D}_{4h}^{14}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{15}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{16}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{17}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{18}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{19}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$
$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^6$	$\mathfrak{B}^7$	$\mathfrak{B}^7$	$\mathfrak{B}^7$	$\mathfrak{B}^7$
$\mathfrak{S}_{\mu}(\tau_y + \tau_z)$	$\mathfrak{S}_{\beta}$	$\mathfrak{S}_{\beta}(\tau_z)$	$\mathfrak{S}_{\beta}$	$\mathfrak{S}_{\beta}(\tau_x)$	$\mathfrak{S}_{\mu}^2$	$\mathfrak{S}_{\mu}(\tau_x)^1$
$\mathfrak{B}_d^8$	$\mathfrak{B}_d^5$	$\mathfrak{B}_d^6$	$\mathfrak{B}_d^9$	$\mathfrak{B}_d^{10}$	$\mathfrak{B}_d^9$	$\mathfrak{B}_d^{10}$

Nunmehr können wir auf Grund der jetzt wohlbekannten Untergruppen der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ und der ihnen zukommenden Eigensymmetrien zur Erörterung der Eigensymmetrien der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ übergehen. Es genügt aber, die Punktlagen zu erwähnen, die beim Übergang von einer Gruppe $\mathfrak{D}_4$ zur Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ ihre Symmetrie erhöhen. *Die Untergruppen, die wir dafür hauptsächlich in Betracht zu ziehen haben, sind, außer den Gruppen $\mathfrak{D}_4$ selbst, die Gruppen $\mathfrak{B}_h$ und $\mathfrak{B}_d$.* Sie zeigen insbesondere die in den Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ auftretenden Symmetrieebenen und die Punkte der Symmetrie S_4 , also gerade diejenigen Eigensymmetrien, die man aus den erzeugenden Operationen der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ und den Achsenfiguren nicht immer ohne weiteres ablesen kann. Ihre rechnerische Bestimmung würde in vielen Fällen wesentlich umständlicher sein. Daß diese Punkte für die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ eine höhere Symmetrie erwerben können, wurde bereits oben hervorgehoben.

1) $\mathfrak{D}_{4h}^1$. Die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Symmetrieebenen; demgemäß sind O, F, G, M Punkte der Symmetrie $\mathfrak{D}_4^h$ und D, E, H, K Punkte der Symmetrie $\mathfrak{V}^h$. Jeder Achse a und b kommt die Symmetrie $\mathfrak{C}_4^v$ zu, jeder Achse c und allen Umwendungsachsen der Ebenen γ und γ' die Symmetrie $\mathfrak{C}_{2v}$.

2) $\mathfrak{D}_{4h}^2$. Die Ebene ν ist Symmetrieebene; daher sind F_m und G' Punkte der Symmetrie $\mathfrak{C}_4^h$ und H' und K' Punkte $\mathfrak{C}_2^h$. Die Punkte S_4 von $\mathfrak{B}_d^2$ gehen also hier in Punkte $\mathfrak{C}_4^h$ über.

3) $\mathfrak{D}_{4h}^3$. Für die in $\mathfrak{D}_{4h}^3$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{B}_d^1(c)$ ist ε eine Symmetrieebene; demnach ist D ein Punkt der Symmetrie $\mathfrak{V}^d$, ebenso E, H, K . Die Achsen c sind Punktlagen $\mathfrak{C}_2^v$, dem Punkt G_m kommt die Symmetrie $\mathfrak{C}_2^h$ zu.

¹⁾ In Fig. 198 (S. 386) ist μ eine Mittelebene; die Achse c , durch die sie geht, wird aber für die Figur 80a (S. 182) von $\mathfrak{B}^7$ eine Kante da sie die einzige Drehungsachse ist, und daher entspricht der Ebene μ für diese Achsenfigur die Ebene δ , die in $\mathfrak{B}_d^9$ und $\mathfrak{B}_d^{10}$ auftritt.

4) $\mathfrak{D}_{4h}^4$. Die in $\mathfrak{D}_{4h}^4$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{B}_d^2(c)$ bedingt H' und K' als Punkte der Symmetrie S_4^1 .

5) $\mathfrak{D}_{4h}^5$. Die Ebene γ ist Symmetrieebene; die Untergruppe $\mathfrak{B}_d^3(c)$ zeigt, daß es auch ε ist. Die Punkte D, E, H, K sind daher Punkte der Symmetrie V^h und O, F, G, M Punkte $C_4^{h^2}$. Die Achsen c und die in γ und γ' liegenden Umwundungsachsen sind Punktlagen C_2^v .

6) $\mathfrak{D}_{4h}^6$. Es stellen sich dieselben Eigensymmetrien ein wie oben für $\mathfrak{D}_{4h}^2$.

7) $\mathfrak{D}_{4h}^7$. Die Untergruppen $\mathfrak{B}_h^{12}$ und $\mathfrak{B}_d^3$ zeigen, daß α, β, δ Symmetrieebenen sind. Die Punkte D, E, H, K erhalten daher die Symmetrie V^d , die Achsen a und b sind Punktlagen C_4^v und die Achsen c Punktlagen C_2^v . Der Punkt G_m hat die Symmetrie C_2^h .

8) $\mathfrak{D}_{4h}^8$. Die in $\mathfrak{D}_{4h}^8$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{B}_d^4$ zeigt gemäß Tabelle B, daß H' und K' Punkte S_4 sind.

9) $\mathfrak{D}_{4h}^9$. Die Ebenen α, β, γ sind Symmetrieebenen; sie bedingen für F_m die Symmetrie V^d und ebenso für G' . Alle Punkte O bis M sind Punkte der Symmetrie V^h , alle Achsen a, b, c und alle Achsen von γ und γ' sind Punktlagen C_2^v . Bei der Figur 212a treten statt F_m und G' die Punkte H' und K' ein.

10) $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$. Die Ebene ν ist Symmetrieebene, ebenso δ , wie die in $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{B}_d^1$ zeigt. Sie bedingen für F_m und G' die Symmetrie V^h , für O, F, G, M die Symmetrie V^d . Den Punkten H' und K' kommt die Symmetrie C_2^h zu, die Achsen a und b sowie die Umwundungsachsen der Ebene ν sind Punktlagen C_2^v . Für die Figur 212a wird statt δ die Ebene ε zur Symmetrieebene; die Symmetrie V^h

¹⁾ Nach der Tabelle B sind es die Punkte F_m und G' ; diese sind aber auf die Achsen c zu übertragen.

²⁾ Nach der Tabelle B sind D, E, H, K für $\mathfrak{B}_d^3$ Punkte S_4 ; auf die Achsen (c) übertragen, gehen sie in O, F, G, M über, die aber für $\mathfrak{D}_{4h}^6$ die höhere Symmetrie C_4^h annehmen.

stellt sich für H' K' ein, die Symmetrie V^d für D , E , H , K . Die Symmetrie C_2^h geht auf F_m und G' über.

11) $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$. Die in dieser Gruppe enthaltene Untergruppe $\mathfrak{B}_d^2(c)$ bedingt für H' und K' die Symmetrie S_4 . Für die Figur 212a treten F_m und G' dafür ein.

12) $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$. Die Untergruppe $\mathfrak{B}_d^1(c)$ von $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$ zeigt, daß ε eine Symmetrieebene ist; daher wird D ein Punkt der Symmetrie V^d und ebenso E , H , K . Der Punkt M_m erhält die Symmetrie C_2^h und die Achsen c die Symmetrie C_2^v . Für die Figur 212a ist δ statt ε die Symmetrieebene, und als Punkte der Symmetrie V^d stellen sich O , F , G , M ein. Der Punkt M_m bleibt ein Punkt der Symmetrie C_2^h .

13) $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$. Die Ebene γ ist Symmetrieebene; sie bedingt für alle Punkte O , D , E , G , also auch für F , H , K , M die Symmetrie C_2^h . Die Untergruppe $\mathfrak{B}_d^4(c)$ von $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$ zeigt, daß F_m und G' Punkte S_4 sind¹⁾.

14) $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$. Die Ebene ν ist Symmetrieebene, ebenso ε , wie die Untergruppe $\mathfrak{B}_d^3(c)$ zeigt; sie bedingt für H' und K' die Symmetrie V^h und für F_m und G' die Symmetrie C_2^h . Als Punkte S_4 ergeben sich O , F , G , M . Die Achsen c und die Umwendungsachsen von ν sind Punktlagen C_2^v .

15) $\mathfrak{D}_{4h}^{15}$. Die Untergruppe $\mathfrak{B}_h^{12}$ von $\mathfrak{D}_{4h}^{15}$ besitzt α und β als Symmetrieebenen; sie bedingen für H' und K' die Symmetrie V^d und machen die Achsen a , b , c zu Punktlagen C_2^v .

16) $\mathfrak{D}_{4h}^{16}$. Die Untergruppe $\mathfrak{B}_d^3$ zeigt, daß δ eine Symmetrieebene ist, und D , E , H , K Punkte der Symmetrie S_4 . Die Ebene δ macht M_m zum Punkt C_2^h und die Achsen a , b zu Punktlagen C_2^v .

17) $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$. Wir legen zunächst Figur 216 zugrunde. Die Ebenen α , β , γ , δ sind Symmetrieebenen. Wie bei der Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$ sind daher O , F , G , M Punkte der Symmetrie D_4^h und D , E , H , K

¹⁾ Nach der Tabelle B die Punkte H' und K' für $\mathfrak{B}_d^4$, also F_m und G' für $\mathfrak{B}_d^4(c)$.

Punkte V^h . Außerdem erscheint in den Punkten H' und K' die Symmetrie V^d und in M_m die Symmetrie C_2^h . Die Symmetrie C_4^v kommt nur den Drehungsachsen a zu, den Schraubenachsen b wie den Umwendungsachsen der Ebenen γ und γ' nur die Symmetrie C_2^v . In Figur 216a sind alle Punkte O bis M Punkte der Symmetrie D_4^h ; außerdem ist G_m ein Punkt der Symmetrie V^h und M_m ein Punkt der Symmetrie V^d . Endlich sind H_m und K_m Punkte C_2^h .

18) $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$. (Figur 216). Die Ebene ν ist eine Symmetrieebene, ebenso die Ebene ε , wie die Untergruppe $\mathfrak{B}_d^{11}(c)$ zeigt. Es sind daher F_m, G' Punkte der Symmetrie C_4^h , H' und K' Punkte V^h , und D, E, H, K Punkte der Symmetrie V^d . Der Punkt G_m ist ein Punkt C_2^h mit OG als Achse. Die Achse b und jede Umwendungsachse von ν ist eine Punktlage C_2^v . Für die Figur 216a werden die vertikalen Mittelebenen λ und μ zu Symmetrieebenen, und F_m, G', H', K' zu Punkten C_4^h . In M_m erscheint die Symmetrie V^h , in G_m die Symmetrie V^d und in D_m und E_m die Symmetrie C_2^h .

19) $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$. Wir legen zunächst die Figur 217 zugrunde. Die Untergruppe $\mathfrak{B}_h^{28}$ bedingt die Ebene δ also auch ε als Symmetrieebene; sie macht den Punkt M_m' zum Punkt der Symmetrie C_2^h und die Punkte O bis M und M_m zu Punkten der Symmetrie V^d . Die Geraden c sind Punktlagen C_2^v . In Fig. 217a tritt für M_m' der Punkt G_m ein; Punkte der Symmetrie V^d sind $Q_2(=O)$ und $Q_1(=M_m)$.

20) $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$. Wir legen zunächst Figur 217a zugrunde. Punkte mit Eigensymmetrie werden nur durch die Untergruppe $\mathfrak{B}_d^{12}(c)$ bedingt; es sind die Punkte Q' und Q'' der Symmetrie S_4 . Die ihnen entsprechenden Punkte der Figur 217 sind die Punkte G_m und F_m ; ebenso sind auch die mit F_m gleichwertigen Punkte G', H', K' Punkte S_4 .

Welche Punktlagen gleichwertig sind, tritt in den Achsenfiguren zumeist unmittelbar hervor. Bei den Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ sei noch auf die besonderen Verhältnisse hingewiesen, die sich stets beim flächenzentrierten Gitter einstellen, und denen wir bereits in Kap. XIV, § 12 begegneten. Bei ihnen zerfällt

der Oktant p in der Weise in acht Teiloktanten p' , daß der Ausgangsoktant p' und die drei, die an ihn längs einer Kante angrenzen, das gleiche Verhalten zeigen; die übrigen vier gehen sozusagen leer aus. Der eine von ihnen ist der, der mit p' nur die Ecke M_m gemein hat, und dessen Mitte wir M_m'' genannt haben, die andern drei sind die, die mit p' eine Fläche gemein haben. Außer den beiden Teiloktanten mit den Mittlen M_m' und M_m'' haben wir also noch sechs andere; ihre Mittlen wollen wir in der Weise, wie es Fig. 218 zeigt, mit

$$M''', M'''', N', N'', N''', N''''$$

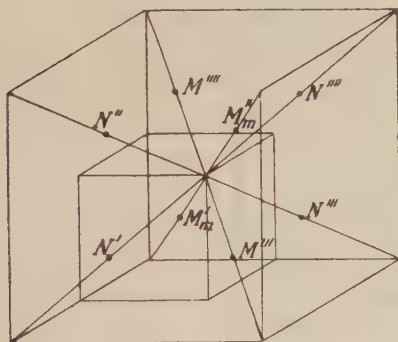


Fig. 218

bezeichnen. Als gleichwertige Punkte ergeben sich für die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ ¹⁹ die Punkte M_m', M''', N'', N'''' , sowie M_m'', M'''' , N', N''' .

Unerwähnt blieb im Vorstehenden die Gleichwertigkeit der zweizähligen Nebenachsen. Zunächst ist dafür die oben bei den Gruppen $\mathfrak{D}_4$ genannte Gleichwertigkeit maßgebend; durch die erzeugende Operation können aber ungleichwertige Achsen einer Gruppe $\mathfrak{D}_4$ für die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ gleichwertig werden. Ob und in welcher Weise dies eintritt, lehrt die erzeugende Operation unmittelbar. Achsen seitlicher Richtung können mit Achsen diagonaler Richtung niemals gleichwertig werden.

Tabelle C. Gruppen $\mathcal{D}_4$ und $\mathcal{D}_{4h}^{1)}$

Gruppen Γ	Gruppe $G\mu$	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe $G\mu$	Punktlagen
$\mathcal{D}_4^1$	V D_4	$D = E, H = K$ O, F, G, M	$\mathcal{D}_{4h}^3$	C_2^h V C_4^h D_4	$H' = K'$ $D = E = H = K$ F_m, G' $O = F, G = M$
$\mathcal{D}_4^2$	V	$D = E, H = K$			
$\mathcal{D}_4^{5,2)}$	V	$O = F, G = M, F_m$ $D = K, E = H, G'$	$\mathcal{D}_{4h}^8$	C_2^h C_2^v V^d D_4	G_m, G_m' c $D = E, H = K$ $O = G, F = M$
$\mathcal{D}_4^6$	V	H', K'			
$\mathcal{D}_4^9$	V D_4	$D = E = H = K$ $H' = K'$ $O = M, F = G$	$\mathcal{D}_{4h}^4$	V S_4 D_4	$D = E = H = K$ $H' = K'$ $O = M, F = G$
a)	V D_4	$G_m = G_m', M_m$ $O = H = K = G$ $D = E = F = M$	$\mathcal{D}_{4h}^5$	C_2^v V^h C_4^h	$c, \text{ alle } u \text{ in } \gamma \text{ und } \gamma'$ $D = E, H = K$ $O = G, F = M$
$\mathcal{D}_4^{10}$	V	$O = G = H = K = M_m$ $D = E = F = M$	$\mathcal{D}_{4h}^6$	C_2^h V C_4^h	$H' = K'$ $D = H = E = K$ F_m, G'
a)	V	$Q_1 = Q_2^{8)}$			
$\mathcal{D}_{4h}^1$	C_2^v V^h C_4^v D_4^h	$c, \text{ alle } u \text{ in } \gamma \text{ und } \gamma'$ $D = E, H = K$ a, b O, F, G, M	$\mathcal{D}_{4h}^7$	C_2^h C_2^v C_4^v V^d	G_m, G_m' c $a = b$ $D = E, H = K$

¹⁾ Die Angaben unter a) beziehen sich auf Figur 216a und 217a. Beim Übergang von Fig. 212 zu 212a bei den Gruppen $\mathcal{D}_4^5$ und $\mathcal{D}_{4h}^9, \mathcal{D}_{4h}^{10}, \mathcal{D}_{4h}^{11}, \mathcal{D}_{4h}^{12}$ sind O, G, F, M mit D, E, H, K und F_m, G' mit H', K' zu vertauschen.

²⁾ Vgl. Anm. 1.

⁸⁾ Q_1 kommt mit Q_2 durch die Schraubung $\mathcal{R}(\pi/2, \frac{1}{2}\tau_z)$ zur Deckung.

Gruppen Γ	Gruppe $G\mu$	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe $G\mu$	Punktlagen
$\mathcal{D}_{4h}^9$	V S_4	$D = E = H = K$ $H' = K'$	$\mathcal{D}_{4h}^{15}$	C_2^v V^d	$a = b, c$ H', K'
$\mathcal{D}_{4h}^{91}$	C_2^v V^h V^d	$a, b, c, \text{ alle } u \text{ in } \gamma, \gamma'$ $O = F, G = M$ $D = K, E = H$ F_m, G'	$\mathcal{D}_{4h}^{16}$	C_2^h C_2^v V S_4	M_m $a = b$ $H' = K'$ $D = E = H = K$
$\mathcal{D}_{4h}^{101}$	C_2^h C_2^v V V^h V^d	$H' = K'$ $a, b, \text{ alle } u \text{ in } \gamma$ $D = E = H = K$ F_m, G' $O = F, G = M$	$\mathcal{D}_{4h}^{17}$	C_2^h C_2^v V^h C_4^v V^d D_4^h	M_m $b \text{ und alle } u \text{ in } \gamma, \gamma'$ $D = E = H = K$ a $H' = K'$ $O = M, F = G$
$\mathcal{D}_{4h}^{111}$	S_4 V	$H' = K'$ $O = F = G = M$ $D = H = K = E$ $F_m = G'$	a)	C_2^h V^h V^d D_4^h	$H_m = K_m = H_m' = K_m'$ $G_m = G_m'$ M_m $O = G = H = K$ $D = E = F = M$
$\mathcal{D}_{4h}^{131}$	C_2^h C_2^v V V^d	M_m c $O = F = G = M$ $F_m = G'$ $D = K, E = H$	$\mathcal{D}_{4h}^{18}$	C_2^h C_2^v V^h C_4^h V^d D_4	$G_m = G_m'$ $b \text{ und alle } u \text{ in } \gamma$ $H' = K'$ $F_m = G'$ $D = E = H = K$ $O = F = G = M$
$\mathcal{D}_{4h}^{13}$	C_2^h V S_4	$O = F = G = M$ $D = E = H = K$ $H' = K'^2)$ $F_m = G'$	a)	C_2^h V^h C_4^h V^d D_4	$D_m = D_m' = D_m'' = D_m'''$ $= E_m = E_m' = E_m'' = E_m'''$ M_m $F_m = G' = H' = K'$ $G_m = G_m'$ $O = F = G = M$ $= D = E = H = K$
$\mathcal{D}_{4h}^{14}$	C_2^h C_2^v V^h S_4	$F_m = G'$ $c \text{ und alle } u \text{ in } \gamma$ H', K' $O = G = F = M$			

¹⁾ Vgl. Anm. 1, S. 434.

²⁾ Durch die Operation $\mathcal{U}(\pi/2, \tau_2)$ nebst Inversion gegen K .

Gruppen Γ	Gruppe G_{μ}	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe G_{μ}	Punktlagen
$\mathcal{D}_{4h}^{19}$	C_2^h	$M_m' = M''' = N''$ $= N''''$	$\mathcal{D}_{4h}^{20}$	V	$O = G = H = K =$ $D = E = F = M = M_m^{1)}$
	C_2^v	c		S_4	$F_m = G' = G_m = G_m'$ $= H' = K'$
	V_d	$O = G = H = K = M_m$ $D = E = F = M$			
a)	C_2^h	$G_m = G' = K'$, $G_m' = F_m = H'$	a)	V	$Q_1 = Q_2$
	V_d	$Q_1 = Q_2$		S_4	$Q' = Q''$

Die Tabelle, die alle tetragonalen Gruppen zusammenfaßt, folgt in zwei Bestandteilen; der zweite enthält die Gruppen $\mathcal{D}_4$ und $\mathcal{D}_{4h}$.

Tabelle DI. Tetragonaler Typus

Gruppe G_{μ}	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_2^h	4	$\mathcal{C}_{4h}^1$ $\mathcal{C}_{4h}^2$ $\mathcal{C}_{4h}^3$	Γ_q Γ_q Γ_q'	D, E, H, K O bis M D, E, H, K
C_2	4	$\mathcal{C}_{4v}^1, \mathcal{C}_{4v}^2, \mathcal{C}_{4v}^4$ $\mathcal{C}_{4v}^3$ $\mathcal{C}_{4v}^7$ $\mathcal{C}_{4v}^9, \mathcal{C}_{4v}^{10}$ $\mathcal{C}_{4v}^{11}$	Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q' Γ_q' Γ_q'	c a, b a, b, c b c
		$\mathcal{B}_d^1, \mathcal{B}_d^3$ $\mathcal{B}_d^5$ $\mathcal{B}_d^9$ $\mathcal{B}_d^{11}$	Γ_q Γ_q Γ_q' Γ_q'	a, b a, b, c, w' a, w' a, b
V	4	$\mathcal{B}_d^1$ $\mathcal{B}_d^2, \mathcal{B}_d^6, \mathcal{B}_d^7, \mathcal{B}_d^8$ $\mathcal{B}_d^{10}$ $\mathcal{B}_d^{11}$	Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q'	D, E, H, K O bis M O bis M, M_m D, E, H, K

¹⁾ Die Inversion $\mathcal{S}_m''$ macht F und M_m gleichwertig.

Gruppe G_{μ}	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
S_4	4	$\mathfrak{B}_d^3$ $\mathfrak{B}_d^3$ $\mathfrak{B}_d^4$ $\mathfrak{B}_d^6$ $\mathfrak{B}_d^7$ $\mathfrak{B}_d^8$ $\mathfrak{B}_d^{10}$ $\mathfrak{B}_d^{11}$ $\mathfrak{B}_d^{12}$	Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q' Γ_q' Γ_q''	F_m, G' D, E, H, K H', K' F_m, G', H', K' G_m, G_m' M_m $F_m, G_m, G_m', G', H', K'$ H', K' Q', Q''
C_4^o	8	$\mathfrak{C}_{4v}^1$ $\mathfrak{C}_{4v}^8$	Γ_q Γ_q'	a, b a
C_4^h	8	$\mathfrak{C}_{4h}^1$ $\mathfrak{C}_{4h}^5$	Γ_q Γ_q'	O, F, G, M O, F, G, M
V_d	8	$\mathfrak{B}_d^1$ $\mathfrak{B}_d^5$ $\mathfrak{B}_d^9$ $\mathfrak{B}_d^{11}$	Γ_q Γ_q Γ_q' Γ_q'	O, F, G, M O bis M O bis M, M_m O, F, G, M

Tabelle DII. Tetragonaler Typus¹⁾

Gruppe G_{μ}	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_2^h	4	$\mathfrak{D}_{4h}^2, \mathfrak{D}_{4h}^6, \mathfrak{D}_{4h}^{10}$ $\mathfrak{D}_{4h}^8, \mathfrak{D}_{4h}^7$ $\mathfrak{D}_{4h}^{12}, \mathfrak{D}_{4h}^{16}$ $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$ $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$ $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$ $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$	Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q' Γ_q' Γ_q''	H', K' G_m, G_m' M_m O bis M F_m, G' M_m G_m, G_m' M_m', M''', N'', N''''

¹⁾ Den Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$ liegt Figur 216, also das Gitter Γ_q' zugrunde, den Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ die Figur 217 und damit das Gitter Γ_q'' .

Gruppe G_{μ}	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_2^v	4	$D_{4h}^{1, 5}, D_{4h}^{8, 9}, D_{4h}^{10, 14}, D_{4h}^{15, 16}, D_{4h}^{17, 18}, D_{4h}^{19}$	$\Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q', \Gamma_q', \Gamma_q''$	c , alle u in γ, γ' c a, b, c , alle u in γ, γ' a, b , alle u in ν c , alle u in ν a, b, c a, b b , alle u in γ, γ' b , alle u in ν c
V	4	$D_4^{1, 2}, D_4^{6, 7}, D_4^{9, 10}$	$\Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q', \Gamma_q''$	D, E, H, K O bis M, F_m, G' H', K' D, E, H, K, H', K' O bis M, M_m
		$D_{4h}^{2, 3}, D_{4h}^{4, 5}, D_{4h}^{8, 9}, D_{4h}^{10, 11}, D_{4h}^{12, 13}, D_{4h}^{14, 15}, D_{4h}^{16, 17}$	$\Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q''$	D, E, H, K O bis M, F_m, G' O, F, G, M, F_m, G' H', K' O bis M, M_m
V^h	8	$D_{4h}^{1, 2}, D_{4h}^{3, 4}, D_{4h}^{5, 6}, D_{4h}^{7, 8}, D_{4h}^{9, 10}, D_{4h}^{11, 12}, D_{4h}^{13, 14}, D_{4h}^{15, 16}$	$\Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q', \Gamma_q', \Gamma_q'$	D, E, H, K O bis M F_m, G' H', K' D, E, H, K H', K'
S_4	4	$D_{4h}^{4, 5}, D_{4h}^{8, 9}, D_{4h}^{12, 13}, D_{4h}^{14, 15}, D_{4h}^{16, 17}, D_{4h}^{20}$	$\Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q''$	H', K' F_m, G' O, F, G, M D, E, H, K $F_m, G', G_m, G_m', H', K'$
C_4^v	8	$D_{4h}^{1, 2}, D_{4h}^{3, 4}, D_{4h}^{5, 6}, D_{4h}^{7, 8}, D_{4h}^{9, 10}, D_{4h}^{11, 12}, D_{4h}^{13, 14}, D_{4h}^{15, 16}, D_{4h}^{17, 18}, D_{4h}^{19, 20}$	$\Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q, \Gamma_q'$	a, b a

Gruppe G_μ	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_4^h	8	D_{4h}^2, D_{4h}^6 D_{4h}^5 D_{4h}^{18}	Γ_q Γ_q $\Gamma_{q'}$	F_m, G' O, F, G, M F_m, G'
V^d	8	$D_{4h}^3, D_{4h}^7, D_{4h}^{12}$ D_{4h}^9 D_{4h}^{10} D_{4h}^{16} D_{4h}^{17} D_{4h}^{18} D_{4h}^{19}	Γ_q Γ_q Γ_q Γ_q $\Gamma_{q'}$ $\Gamma_{q'}$ $\Gamma_{q''}$	D, E, H, K F_m, G' O, F, G, M H', K' H', K' D, E, H, K O bis M, M_m
D_4	8	D_4^1 D_4^9	Γ_q $\Gamma_{q'}$	O, F, G, M O, F, G, M
		$D_{4h}^2, D_{4h}^3, D_{4h}^4$ D_{4h}^{18}	Γ_q $\Gamma_{q'}$	O, F, G, M O, F, G, M
D_4^h	16	D_{4h}^1 D_{4h}^{17}	Γ_q $\Gamma_{q'}$	O, F, G, M O, F, G, M

Was die *kritischen Lagen* betrifft, so kann die Symmetrie einer tetragonalen Struktur niemals über die Symmetrie der tetragonalen Gitter steigen, also nicht über die Symmetrie D_4^h . Einige Beispiele mögen die vorhandenen Möglichkeiten veranschaulichen und die Methoden aufzeigen, die man am besten befolgt. Wir gehen von der Gruppe $\mathcal{C}_{4v}^5$ aus und stellen, wie im vorigen Kapitel, die Frage, welche Lage und Eigensymmetrie ein Baustein μ erhalten muß, damit eine mit $\mathcal{C}_{4v}^5$ abgeleitete Struktur Σ eine höhere Symmetrie erhält als die Symmetrie C_4^h ; es ist klar, daß dies nur die Symmetrie D_4^h sein kann, und daß μ eines der Symmetrieelemente besitzen muß, die in der Gruppe D_4^h enthalten sind, aber in der Gruppe C_4^h noch fehlen. Das ist entweder eine horizontale zweizählige Achse oder eine horizontale Symmetrieebene oder ein Symmetriezentrum.

Ob und wann dies eintritt, zeigen die Achsenfiguren und die definierenden Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$. Die mit $\mathfrak{C}_{4v}^5$ aufgebaute Struktur Σ kann durch die Eigensymmetrie von μ nur einer solchen Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ zugehörig werden, die $\mathfrak{C}_{4v}^5$ als Untergruppe enthält, und das sind nach § 11 nur die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^2$ und $\mathfrak{D}_{4h}^8$. Sie entstehen aus $\mathfrak{D}_4^1$ und $\mathfrak{D}_4^2$, und deren Achsenfiguren lassen die kritischen Lagen leicht erkennen.

Sei μ zunächst mit einer zweizähligen Achse begabt, so muß diese Achse eine der Lagen haben, die in den Figuren 210 und 211 ersichtlich sind; jede solche Lage ist für einen Baustein der Symmetrie C_2 eine kritische und erteilt der mit $\mathfrak{C}_{4v}^5$ abgeleiteten Struktur Σ die Übersymmetrie D_4^h . Hat μ eine horizontale Symmetrieebene, so muß sie senkrecht zur Achsenschaar von $\mathfrak{C}_{4v}^5$ verlaufen; da die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^8$ keine horizontalen Symmetrieebenen besitzt, so genügt dem nur die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^2$, und die Symmetrieebene muß daher die Ebene ν sein. Ist μ endlich mit einem Symmetriezentrum behaftet, so gibt es zwei verschiedene kritische Lagen. Es fällt entweder in den Punkt F_m einer Achse, dann geht die Struktur Σ in die Struktur von $\mathfrak{D}_{4h}^2$ über, oder es fällt in den Punkt M_m , dann geht sie in eine zu $\mathfrak{D}_{4h}^8$ gehörige Struktur über.

Ein zweites Beispiel sei die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$; es mag aber genügen, auf die Hauptpunkte hinzuweisen. Die aus $\mathfrak{B}_d^2$ entstehende Struktur kann als Übersymmetrie ebenfalls nur die Symmetrie D_4^h erwerben; es kann eintreten, wenn der Baustein μ eine vertikale vierzählige Achse oder eine horizontale Achse oder eine horizontale Symmetrieebene oder ein Symmetriezentrum besitzt. Wir nehmen insbesondere eine horizontale Achse an; sie muß den Winkel der zwei anderen Achsen von $\mathfrak{B}_d^2$ halbieren. Die erste Frage ist wiederum die, welches die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ sind, die die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$ als Untergruppe enthalten; wir entnehmen sie der Tabelle auf S. 427; es sind die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^2$, $\mathfrak{D}_{4h}^4$, $\mathfrak{D}_{4h}^9$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$. Haben wir so die in Betracht kommenden Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ bestimmt, so ergibt sich das weitere, wie vorher. Wir vergleichen zunächst die Achsenfiguren von $\mathfrak{B}_d^2$ mit der Achsenfigur der in $\mathfrak{D}_{4h}^2$ auftretenden Untergruppe $\mathfrak{D}_4^1$ und erkennen, wie eine zweizählige Achse

von μ liegen muß, um der Struktur diese Achse als Eigensymmetrie zu erteilen usw. usw. Wir werden dann ebenso mit der Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^4$ verfahren, die ebenfalls aus $\mathfrak{D}_4^1$ als Untergruppe erzeugt ist. Hier ist aber zu beachten, daß unserer Tabelle gemäß die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$ für $\mathfrak{D}_{4h}^4$ eine Gruppe $\mathfrak{B}_d^2(c)$ ist; die zweizähligen Achsen der Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^4$, die als Achsen von μ eine Übersymmetrie herbeiführen, *sind daher in diesem Fall diejenigen, die die Achsen c schneiden*. In derselben Weise verfahren wir mit $\mathfrak{D}_{4h}^9$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$ und mit der Achsenfigur der Gruppe $\mathfrak{D}_4^5$, und zwar ist für $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$ die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$ wieder als Gruppe $\mathfrak{B}_d^2(c)$ in Betracht zu ziehen.

Ein Punkt bedarf noch der Erwähnung. Wie wir S. 426 sahen, treten in jeder Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{B}_d$ auf; die eine entsteht aus der Gruppe $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, die die Achsen der Richtungen u_α und u_β enthält, die andere aus einer Gruppe $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ mit den Achsen der Richtungen u_δ und u_ϵ . Die vorstehende Untersuchung hat nur die Achsen der Richtung u_α oder u_β als Achsen der Gruppe $\mathfrak{B}_d$ ins Auge gefaßt; man wird nun daran gehen wollen, für die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$ auch noch die Achsen der Richtung u_δ und u_ϵ in Betracht zu ziehen. *Dies ist aber nicht nötig*; unter den aus $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ entspringenden Gruppen $\mathfrak{B}_d$ tritt $\mathfrak{B}_d^2$ nicht auf. Wie unsere Tabellen (S. 427 ff.) zeigen, zerfallen nämlich die Gruppen $\mathfrak{B}_d$ in zwei Klassen; die einen erzeugt man nur aus den Gruppen $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, die andern nur aus den Gruppen $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$. Insbesondere treten als Gruppen $\mathfrak{B}_{\delta\epsilon}$ nur $\mathfrak{B}^6$ und $\mathfrak{B}^7$ auf, während die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$ aus der Gruppe $\mathfrak{B}^1$ abgeleitet ist.

Kap. XVII. Die Raumgruppen vom hexagonalen Typus

§ 1. Vorbemerkungen. Dem hexagonalen Typus gehören die Gruppen

$$D_6^h, D_6, C_6^h, C_6^v, C_6, D_3^h, C_3^h$$

an. Sie alle bedingen das Gitter I_h ; auch die Gruppen C_3^h und D_3^h . Diesen beiden Gruppen kommt nämlich eine zur Hauptachsenrichtung senkrechte Symmetrieebene σ_h zu, und diese

ist dem Gitter Γ_{rh} nicht eigen¹⁾. Im Gitter Γ_h treten Translationen, die einen Teil von $2\tau_z$ als Komponente enthalten, nicht auf; es ist also ein Gitter vom Charakter Γ_m . Dies hat eine wesentliche Vereinfachung der Verhältnisse zur Folge.

Als primitive Translationen haben wir nur

$$2\tau_\lambda, 2\tau_\mu, 2\tau_\nu, 2\tau_s; 2\tau_\lambda + 2\tau_\mu + 2\tau_\nu = 0$$

in Betracht zu ziehen.

Gemäß Kap. IX, § 7 kommen dem Gitter Γ_h sechszählige, dreizählige und zweizählige Achsen zu; ihr Fußpunktenetz ist in Fig. 86 (S. 186) enthalten. Das Netz ist ein gleichseitiges. Die sechszähligen Achsen gehen durch die Ecken der gleichseitigen Dreiecke, die dreizähligen durch die Flächenmitten, die zweizähligen durch die Seitenmitten. Das Fußpunktenetz der sechszähligen Achsen ist also *mit dem in der Ebene γ enthaltenen Punktnetz des Gitters identisch*; die Entfernung zweier nächsten sechszähligen Achsen ist eine primitive Translation, so daß es *keine halbe Translation des Gitters gibt, die die Schaar der sechszähligen Achsen in sich überführt*. Davon haben wir alsbald Gebrauch zu machen.

Die horizontalen Drehungsachsen des Gitters fallen in der Ebene γ in die Seiten und Höhen der Netzdreiecke (Fig. 175, 175a, S. 350); in den vertikalen Ebenen folgen sie im Abstand τ_z . Die horizontalen spiegelnden Ebenen sind alle von gleicher Art und folgen ebenfalls im Abstand τ_z , für die vertikalen gelten die Sätze von Kap. XV, § 4.

§ 2. Die Gruppen der Symmetrie C_3^h . Die Gruppen $\mathfrak{C}_{3h}$ sind isomorph zur Gruppe

$$C_3^h = \{C_3, \mathfrak{C}_h'\},$$

sie entstehen also aus den Gruppen $\mathfrak{C}_3$ mittels einer Operation $\mathfrak{C}_h$ oder $\mathfrak{C}_h(\tau)$. Jedoch kann nur die Gruppe $\mathfrak{C}_3^1$ zur Erzeugung von Gruppen $\mathfrak{C}_{3h}$ verwendet werden. Die Gruppen $\mathfrak{C}_3^2$ und $\mathfrak{C}_3^3$ scheiden aus, weil sie nur Schraubenachsen von einerlei Windungssinn besitzen, und $\mathfrak{C}_3^4$ scheidet aus, weil sie das Gitter Γ_{rh} enthält.

¹⁾ Darauf stützt sich auch die Zugehörigkeit der Gruppen C_3^h und D_3^h zum hexagonalen Kristallsystem.

Die erzeugende Operation $\mathfrak{S}_h(\tau)$ muß eine Deckoperation für das Fußpunktenetz der Gruppe $\mathfrak{U}_3^1$ sein. Wie wir in Kap. XV, S. 352 sahen, sind aber die Seiten des von den dreizähligen Achsen gebildeten Netzes keine halben Translationen des Gitters, und daher ist eine halbe horizontale Translation τ , die das Netz in sich überführt, nicht vorhanden. Es bleibt daher nur $\mathfrak{S}_h$ selbst als erzeugende Operation übrig. Wir gewinnen so nur die eine Gruppe

$$\mathfrak{U}_{3h}^1 = \{\mathfrak{U}_3^1, \mathfrak{S}_h\}.$$

Die spiegelnden Ebenen folgen im Abstand τ_z aufeinander und sind sämtlich reine Symmetrieebenen. Die Achsenfigur wird durch Figur 176 (S. 351) dargestellt, wenn als Symmetrieebene die Ebene durch den Punkt F genommen wird.

1. *Es gibt nur eine Gruppe der Symmetrie $\mathfrak{C}_3^h$; ihr Gitter ist Γ_h .*

§ 3. Die Gruppen der Symmetrie $\mathfrak{D}_3^h$. Die Gruppe $\mathfrak{D}_3^h$ besitzt das Bildungsgesetz

$$\mathfrak{D}_3^h = \{\mathfrak{D}_3, \mathfrak{S}_h'\};$$

die ihr isomorphen Gruppen entstehen aus einer Gruppe $\mathfrak{D}_3$ mittels der Operation $\mathfrak{S}_h$ oder $\mathfrak{S}_h(\tau)$. Nun stimmen die Hauptachsen einer jeden Gruppe $\mathfrak{D}_3$ mit denen einer gewissen Gruppe $\mathfrak{U}_3$ überein, die erzeugende Operation $\mathfrak{S}_h$ oder $\mathfrak{S}_h(\tau)$ muß also auch die Achsen dieser Gruppe $\mathfrak{U}_3$ in sich überführen; nach dem vorigen Paragraphen kommt daher nur $\mathfrak{S}_h$ als erzeugende Operation in Frage. Außerdem auch nur die Gruppen $\mathfrak{D}_3^1$ und $\mathfrak{D}_3^2$; sie sind die einzigen, die $\mathfrak{U}_3^1$ als Untergruppe enthalten (Kap. XV, § 5).

Es ist nur noch zu prüfen, welche Lage die Ebene σ_h zu den Achsenfiguren 181 und 182 der Gruppen $\mathfrak{D}_3^1$ und $\mathfrak{D}_3^2$ haben kann. Sie kann für beide Gruppen sowohl in die Grundebene γ fallen, wie in die Mittelebene ν . Alle horizontalen spiegelnden Ebenen sind reine Symmetrieebenen und folgen im Abstand τ_z . Nun enthält die Punktgruppe $\mathfrak{D}_3^h$ auch drei vertikale Symmetrieebenen; wir haben also bei den Gruppen $\mathfrak{D}_{3h}$ drei Schaaren isomorpher Ebenen σ_v , die durch die zweizähligen

Umwendungsachsen der Ebene γ bedingt sind und je eine Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}$ bilden. Ist σ_h die erzeugende Operation, so stellen sich die Gruppen $\mathfrak{C}_{3v}^1$ und $\mathfrak{C}_{3v}^2$ ein; ist aber ν die erzeugende Symmetrieebene, so bedingt sie mit jeder Umwendungsachse der Ebene γ eine Operation $\mathfrak{S}_v(\tau_z)$, und es stellen sich daher $\mathfrak{C}_{3v}^3$ und $\mathfrak{C}_{3v}^4$ als Untergruppen ein (Fig. 219 und 220)¹⁾. Wir erhalten so die Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{3h}^1 &= \{ \mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{S}_h; \Gamma_h \}; \mathfrak{C}_{3v}^1, & \mathfrak{D}_{3h}^3 &= \{ \mathfrak{D}_3^3, \mathfrak{S}_h; \Gamma_h \}; \mathfrak{C}_{3v}^3 \\ \mathfrak{D}_{3h}^2 &= \{ \mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{S}_\nu; \Gamma_h \}; \mathfrak{C}_{3v}^2, & \mathfrak{D}_{3h}^4 &= \{ \mathfrak{D}_3^3, \mathfrak{S}_\nu; \Gamma_h \}; \mathfrak{C}_{3v}^4. \end{aligned}$$

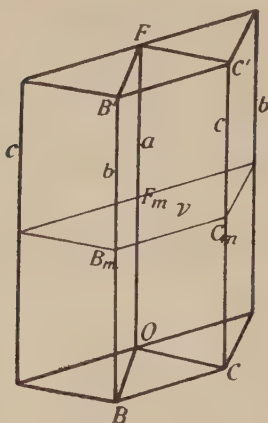


Fig. 219

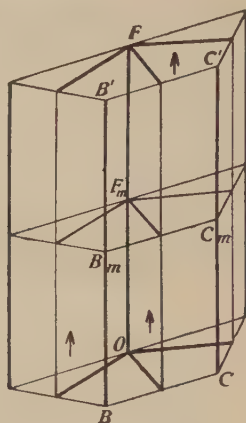


Fig. 220

2. Es gibt vier Gruppen der Symmetrie $\mathfrak{D}_{3h}$; ihr Gitter ist Γ_h .

§ 4. Die Gruppen der Symmetrie $\mathfrak{C}_6$. Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_6$ haben wir gemäß Kap. XII, § 4 zu bilden. Die zyklische Gruppe $\mathfrak{C}_6$ besteht aus den sechs Drehungen

$$1, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'^2, \dots, \mathfrak{A}'^5; \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'(\pi/3),$$

¹⁾ Die Figur 219 ohne die Ebene ν entspricht der Gruppe $\mathfrak{D}_{3h}^1$, die Ebenen γ und γ' und alle drei vertikalen Ebenen sind Symmetrieebenen. Die Achsenfigur von $\mathfrak{D}_{3h}^2$ entsteht daraus, indem ν statt γ und γ' als horizontale Symmetrieebene eintritt, und für jede der drei vertikalen Ebenen die Operation $\mathfrak{S}_v(\tau_z)$. Die Figur 220 entspricht der Gruppe $\mathfrak{D}_{3h}^4$. Durch Tilgen der Translation τ_z ergibt sich daraus die Figur für die Gruppe $\mathfrak{D}_{3h}^3$. Die Geraden der Ebene ν sind keine Achsen.

demgemäß besteht jede Raumgruppe $\mathfrak{G}_6$ aus den Operationen

$$1) \quad \Gamma_\tau, \{\mathfrak{A}\Gamma_\tau\}, \{\mathfrak{A}^2\Gamma_\tau\}, \dots \{\mathfrak{A}^5\Gamma_\tau\},$$

wo Γ_τ die Gruppe Γ_h ist. Die Operation $\mathfrak{A}$ hat die Form $\mathfrak{A}(\pi/3, t)$, und es kann t (Kap. XII, § 2) einen der sechs Werte

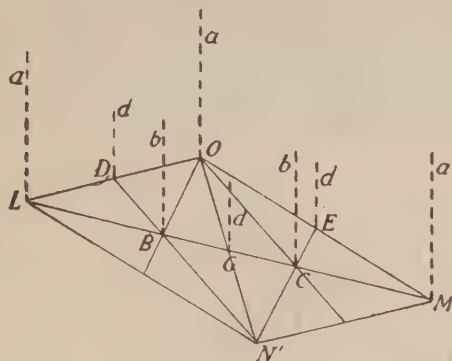


Fig. 221

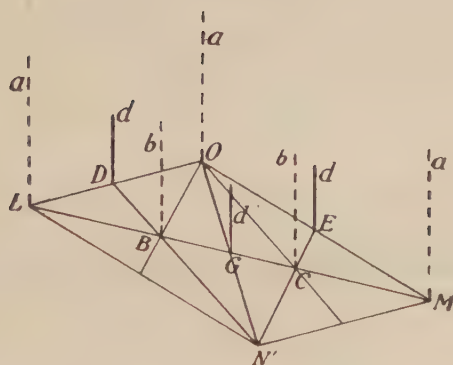


Fig. 222

$$2) \quad 0, \frac{1}{3}\tau_z, \frac{2}{3}\tau_z, \tau_z, \frac{4}{3}\tau_z, \frac{5}{3}\tau_z$$

haben. Wir erhalten so die sechs Gruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_6^1 &= \{\mathfrak{A}(\pi/3); \Gamma_h\}, \\ \mathfrak{G}_6^2 &= \{\mathfrak{A}(\pi/3, \frac{1}{3}\tau_z); \Gamma_h\}, \quad \mathfrak{G}_6^3 = \{\mathfrak{A}(\pi/3, \frac{5}{3}\tau_z); \Gamma_h\}, \\ \mathfrak{G}_6^4 &= \{\mathfrak{A}(\pi/3, \frac{2}{3}\tau_z); \Gamma_h\}, \quad \mathfrak{G}_6^5 = \{\mathfrak{A}(\pi/3, \frac{4}{3}\tau_z); \Gamma_h\}, \\ \mathfrak{G}_6^6 &= \{\mathfrak{A}(\pi/3, \tau_z); \Gamma_h\}. \end{aligned}$$

Das Fußpunktenetz aller dieser Gruppen stimmt nach § 1 und Kap. XII, § 4 mit dem des hexagonalen Gitters I'_h überein. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_6^1$ sind alle Achsen Drehungsachsen, bei $\mathfrak{C}_6^2$ und $\mathfrak{C}_6^3$ sind sämtliche Achsen Schraubenachsen; bei $\mathfrak{C}_6^4$ und $\mathfrak{C}_6^5$ sind es alle bis auf die zweizähligen, und bei $\mathfrak{C}_6^6$ sind es alle bis auf die dreizähligen (Fig. 221, 222, 223). Die Gruppen $\mathfrak{C}_6^2$ und $\mathfrak{C}_6^3$, ebenso $\mathfrak{C}_6^4$ und $\mathfrak{C}_6^5$ sind Gruppen von *entgegengesetztem* Windungssinn. Keine von ihnen eignet sich für die Erzeugung von Gruppen zweiter Art.

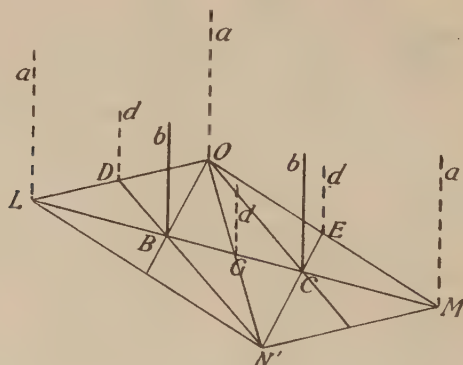


Fig. 223

3. Es gibt sechs Gruppen der Symmetrie $\mathfrak{C}_6$; ihr Gitter ist I'_h .

§ 5. Die Gruppen der Symmetrie $\mathfrak{C}_6^v$. Gemäß dem Bildungsgesetz

$$\mathfrak{C}_6^v = \{ \mathfrak{C}_6, \mathfrak{S}_v' \}$$

entstehen die Gruppen $\mathfrak{C}_{6v}$ durch Multiplikation einer Gruppe $\mathfrak{C}_6$ mit einer Operation $\mathfrak{S}_v(\tau)$; nur die Gruppen $\mathfrak{C}_6^1$ und $\mathfrak{C}_6^6$ kommen, wie wir eben sahen, in Betracht.

Die Gruppe $\mathfrak{C}_6^v$ besitzt sechs durch die Hauptachse gehende Symmetrieebenen σ_v ; analog treten bei jeder Gruppe $\mathfrak{C}_{6v}$ sechs isomorphe Schaaren spiegelnder Ebenen auf. Nach Kap. XIV, § 1, 5 bestimmen wir sie mittels der zweizähligen Achsen des Fußpunktenetzes der Gruppen $\mathfrak{C}_6$. Nun sahen wir in § 1, daß

dieses Netz keine halbe horizontale Translation τ als Deckoperation zuläßt; es kommen also nur die beiden Werte

$$3) \quad \tau = 0 \text{ und } \tau = \tau_z$$

in Betracht, und jede spiegelnde Ebene schneidet die Ebene γ in einer Umwundungsachse des Netzes. Jede Ebene σ_v geht daher durch eine Seite oder eine Höhe eines Netzdreiecks. In Kap. XV, § 4 entsprachen diesen beiden Ebenenarten zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{G}_{3v}$; hier treten beide Ebenenarten in jeder

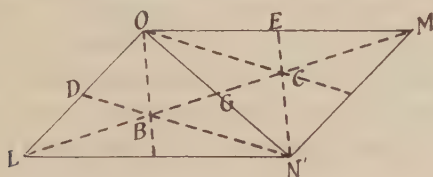


Fig. 224

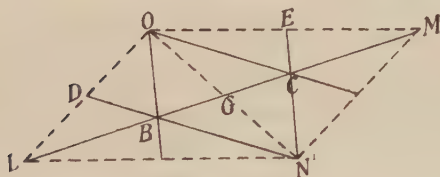


Fig. 225

Gruppe zugleich auf. Ist $\mathfrak{S}_s$ die Spiegelung an einer Seite und $\mathfrak{S}_a$ die an einer Höhe des Fußpunktenetzes, so lassen sich die aus $\mathfrak{G}_6^1$ und $\mathfrak{G}_6^6$ entstehenden Gruppen in die Form setzen

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{6v}^1 &= \{ \mathfrak{G}_6^1, \mathfrak{S}_s; I_h \} = \{ \mathfrak{G}_6^1, \mathfrak{S}_a; I_h \} \\ \mathfrak{G}_{6v}^2 &= \{ \mathfrak{G}_6^1, \mathfrak{S}_s(\tau_z); I_h \} = \{ \mathfrak{G}_6^1, \mathfrak{S}_a(\tau_z); I_h \} \\ \mathfrak{G}_{6v}^3 &= \{ \mathfrak{G}_6^6, \mathfrak{S}_s; I_h \} = \{ \mathfrak{G}_6^6, \mathfrak{S}_a(\tau_z); I_h \} \\ \mathfrak{G}_{6v}^4 &= \{ \mathfrak{G}_6^6, \mathfrak{S}_s(\tau_z); I_h \} = \{ \mathfrak{G}_6^6, \mathfrak{S}_a; I_h \}.\end{aligned}$$

In der Gruppe $\mathfrak{G}_6^1$ bedingt nämlich die Drehungsachse a , daß $\mathfrak{S}_s$ und $\mathfrak{S}_a$, ebenso $\mathfrak{S}_s(\tau_z)$ und $\mathfrak{S}_a(\tau_z)$ zugleich auftreten; in der Gruppe $\mathfrak{G}_6^6$ ist a eine Schraubenachse, und so müssen $\mathfrak{S}_s$ und $\mathfrak{S}_a(\tau_z)$ und ebenso $\mathfrak{S}_s(\tau_z)$ und $\mathfrak{S}_a$ nebeneinander vorkommen. Für die Achsenfiguren mag es genügen, die Schnittfigur der

spiegelnden Ebenen mit der Grundebene γ anzugeben. Jede Gerade von Figur 221 ist Schnittlinie einer spiegelnden Ebene; durch O gehen sechs, durch B und C je drei, durch D, E, G je zwei. Bei den Gruppen $\mathbb{C}_{6v}^1$ und $\mathbb{C}_{6v}^2$ sind alle spiegelnden Ebenen von gleicher Art; ihre Achsenfiguren sind daher durch Figur 221 hinreichend gekennzeichnet. Die Figuren der Gruppen $\mathbb{C}_{6v}^3$ und $\mathbb{C}_{6v}^4$ sind in Figur 224 und 225 enthalten, und zwar mit der Maßgabe, daß die gestrichelten Geraden die Schnittlinien mit den Ebenen $\mathbb{S}_v(\tau_z)$ darstellen sollen, die andern die Schnittlinien mit den Symmetrieebenen¹⁾. Von den sechs Ebenen durch O ²⁾ sind also je drei abwechselnd Symmetrieebenen und Ebenen $\mathbb{S}_v(\tau_z)$; durch B und C gehen je drei Ebenen gleicher Art, durch D, E, G je zwei Ebenen verschiedener Art.

4. Es gibt vier Gruppen der Symmetrie C_6^v ; ihr Gitter ist Γ_h .

§ 6. Die Gruppen der Symmetrie C_6^h . Das Bildungsgesetz der Gruppen C_6^h lautet

$$C_6^h = \{C_6, \mathbb{S}_h'\} = \{C_6, \mathfrak{I}'\}.$$

Wir erzeugen die Gruppen $\mathbb{C}_{6h}$ mittels einer Operation $\mathbb{S}_h(\tau)$ an einer horizontalen Ebene und schließen, gemäß § 5, daß nur $\mathbb{S}_h$ selbst als erzeugende Operation benutzt werden kann. Da nur $\mathbb{C}_6^1$ und $\mathbb{C}_6^6$ in Frage kommen, so erhalten wir auch nur zwei Gruppen. Sie lassen sich in die Form setzen

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{6h}^1 &= \{\mathbb{C}_6^1, \mathbb{S}_h; \Gamma_h\} = \{\mathbb{C}_6, \mathfrak{I}\} \\ \mathbb{C}_{6h}^2 &= \{\mathbb{C}_6^6, \mathbb{S}_h; \Gamma_h\} = \{\mathbb{C}_6, \mathfrak{I}_f\}.\end{aligned}$$

Für die Gruppe $\mathbb{C}_{6h}^1$ ist $\mathfrak{I}$ die Inversion gegen den Punkt O , der Schnittpunkt von a und σ_h ist. Für die Gruppe $\mathbb{C}_6^6$ ist die Achse a als zweizählige Achse eine Schraubenachse; deshalb bedingt die Spiegelung $\mathbb{S}_h$, wie in Kap. XIII, § 6, den Punkt F_m als Symmetriezentrum. Die Symmetrieebenen folgen bei jeder der beiden Gruppen im Abstand τ_z . Von Achsenfiguren

¹⁾ Man beachte, daß OL und OM die Seiten des Fußpunktetznetzes sind.

²⁾ Man muß die Figuren durch eine Gerade ergänzt denken, die parallel zu LM durch O geht; die vertikalen Achsen sind aus Figur 223 zu entnehmen.

kann abgesehen werden. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_{6h}^1$ fallen die Symmetriezentra in die Symmetrieebenen, bei der Gruppe $\mathfrak{C}_{6h}^2$ liegen sie im mittleren Abstand zwischen je zwei benachbarten Symmetrieebenen. Ihre Lage in jeder horizontalen Ebene ist die gleiche, wie beim gleichseitigen Netz.

5. Es gibt zwei Gruppen der Symmetrie $\mathfrak{C}_6^h$; ihr Gitter ist Γ_h .

§ 7. Die Gruppen der Symmetrie D_6 . Die Gruppe D_6 ist durch die Gleichung

$$D_6 = \{C_6, U\}$$

gegeben; die Raumgruppen $\mathfrak{D}_6$ entstehen also aus den Gruppen $\mathfrak{C}_6$ mittels einer Operation $U(\tau)$. Lage und Art dieser Operation $U(\tau)$ folgt für alle Gruppen $\mathfrak{C}_6$ (Kap. XIV, § 1, 5) aus den erzeugenden Operationen $\mathfrak{S}_v(\tau)$ der Gruppen $\mathfrak{C}_{6v}$. Nun haben wir in § 5 nur $\mathfrak{S}_s$ und $\mathfrak{S}_s(\tau_z)$ als erzeugende Operationen verwendet; demgemäß können wir für die Gruppen $\mathfrak{D}_6$ stets U_s als erzeugende Operation wählen. Ihre Achse fällt in eine Seite des gleichseitigen Netzes von Γ_h .

Wir erhalten so die sechs Gruppen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_6^1 &= \{\mathfrak{C}_6^1, U_s; \Gamma_h\} \\ \mathfrak{D}_6^2 &= \{\mathfrak{C}_6^2, U_s; \Gamma_h\}, \quad \mathfrak{D}_6^3 = \{\mathfrak{C}_6^3, U_s; \Gamma_h\} \\ \mathfrak{D}_6^4 &= \{\mathfrak{C}_6^4, U_s; \Gamma_h\}, \quad \mathfrak{D}_6^5 = \{\mathfrak{C}_6^5, U_s; \Gamma_h\} \\ \mathfrak{D}_6^6 &= \{\mathfrak{C}_6^6, U_s; \Gamma_h\}.\end{aligned}$$

Die Gruppen $\mathfrak{D}_6^2$ und $\mathfrak{D}_6^3$, ebenso $\mathfrak{D}_6^4$ und $\mathfrak{D}_6^5$ sind von entgegengesetztem Windungssinn.

Die Punktgruppe D_6 enthält sechs zweizählige Achsen; demgemäß treten bei jeder Gruppe $\mathfrak{D}_6$ sechs isomorphe Schaaen auf, parallel den Seiten und Höhen der Netzdreiecke. Ihre Anordnung hängt für jede einzelne Richtung nur vom Gitter Γ_h ab und ist daher die gleiche, wie bei den Gruppen $\mathfrak{D}_3^1$ bis $\mathfrak{D}_3^6$ von Kap. XV, § 5. In den vertikalen Ebenen sind alle Achsen gleichartig und folgen im Abstand τ_z ; in den horizontalen Ebenen

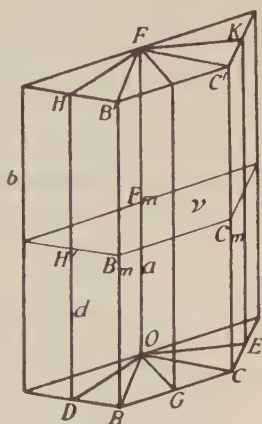


Fig. 226

wechseln für jede Richtung Drehungsachsen und Schraubenachsen in der Weise ab, wie es die Figuren 175 und 175a (S. 350) zeigen. Wie sich die Achsen *verschiedener* Richtung auf die einzelnen horizontalen Achsenebenen verteilen, bildet eine Eigenart jeder einzelnen Gruppe. Die sie enthaltenden Ebenen gehen durch die Punkte

4) $O, O_1, O_2, O_3 (= F_m), O_4, O_5, O_6 (= F),$

die im Abstand $\frac{1}{6} \tau_z$ aufeinanderfolgen. In welcher Weise sich dies für jede einzelne Gruppe regelt, hängt von den gleichen Sätzen ab, wie bei den Gruppen vom rhomboedrischen und tetragonalen Typus; es genügt deshalb, wenn wir hier im wesentlichen nur die Resultate angeben.

Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_6^1$ gehen durch den Punkt O der sechszähligen Drehungsachse a sechs Nebenachsen, genau wie bei der Punktgruppe D_6 ; je zwei benachbarte bilden einen Winkel von 30° . Aus ihnen ergeben sich alle andern Achsen der Ebene γ in der Weise, wie es Figur 226 zeigt; doch sind nur die Umwendungsachsen gezeichnet, die Schraubenachsen verlaufen zwischen ihnen in mittleren Abständen¹⁾. Die Achsenebenen folgen gleichartig im Abstand τ_z .

Bei den Gruppen $\mathfrak{D}_6^2$ und $\mathfrak{D}_6^3$ sind sämtliche vertikalen Achsen Schraubenachsen; längs jeder sechszähligen Achse folgen die Achsen u nach Satz 3 von Kap. IV wendeltreppenartig in der Weise im Abstand $\frac{1}{6} \tau_z$, daß je zwei benachbarte den Winkel 30° bestimmen. Jede horizontale Achsenebene enthält nur Achsen je einer Richtung. Die Achsen der Gruppe $\mathfrak{D}_6^1$ verteilen sich also hier auf sechs Ebenen. Längs der dreizähligen und zweizähligen Achsen b und d folgen sich die Nebenachsen in den Abständen $\frac{1}{3} \tau_z$ und $\frac{1}{2} \tau_z$ (Fig. 227)²⁾.

Bei den Gruppen $\mathfrak{D}_6^4$ und $\mathfrak{D}_6^5$ liegen in jeder Ebene Achsen u von zwei zueinander senkrechten Richtungen. Die sechszählige Achse a ist nämlich als zweizählige Achse eine

¹⁾ Um das gestaltliche Bild zu stärken, haben die Figuren 227, 228, 229 die doppelte Grundfläche der Figur 226 erhalten.

²⁾ Von den sechs verschiedenen Achsenebenen enthält die Figur vier; ihre Höhe beträgt $\frac{1}{2} \tau_z$.

Drehungsachse und bedingt daher durch O eine zu $u_s (= u)$ senkrechte Drehungsachse $u_d (= u_1)$. Da die Achsen d zweizählige Drehungsachsen sind, gehen auch durch die Punkte D, E_4, G_2 zwei-zueinander senkrechte Drehungsachsen u . Längs a folgen die Achsen wendeltreppenartig im Abstand $\frac{1}{3}\tau_z$ und sind um 30° gegeneinander gedreht. Je zwei horizontale Achsenebenen haben den Abstand $\frac{1}{3}\tau_z$ (Fig. 228)¹⁾.

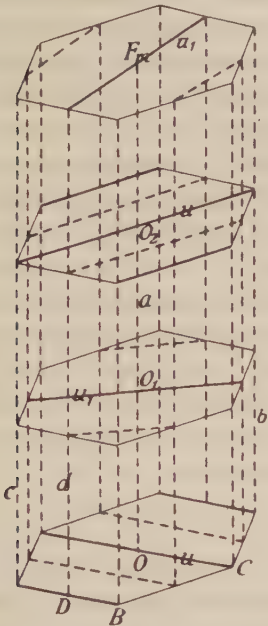


Fig. 227

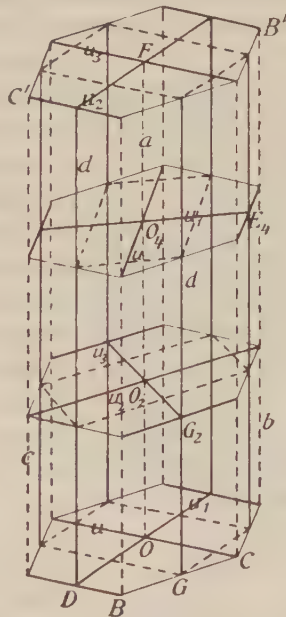


Fig. 228

Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_6^6$ endlich sind die sechszähligen Achsen als dreizählige Achsen Drehungsachsen; daher gehen durch O drei zweizählige Achsen u , wie bei der Gruppe D_3 . Auch die dreizähligen Achsen b sind Drehungsachsen und werden daher ebenfalls von je drei zweizähligen Achsen u geschnitten. Jede horizontale Achsenebene enthält also Achsen von je drei Richtungen. Die Ebenen folgen im Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$ aufeinander; die

¹⁾ Der positive Drehungssinn von Figur 228 ist der Uhrzeigersinn.

Achsen u , die a in zwei aufeinanderfolgenden Ebenen schneiden, sind gegeneinander wiederum um 30° gedreht (Fig. 229).

6. Es gibt sechs Gruppen der Symmetrie D_6 ; ihr Gitter ist Γ_h .

§ 8. Die Gruppen der Symmetrie D_6^h . Die Gruppe

$$D_6^h = \{D_6, \mathfrak{S}_h'\} = \{D_6, \mathfrak{S}'\}$$

geht aus D_6 mittels der Spiegelung $\mathfrak{S}_h'$ oder mittels einer Inversion hervor; wir werden die isomorphen Gruppen $\mathfrak{D}_{6h}$ mittels einer zu $\mathfrak{S}_h'$ isomorphen Operation erzeugen. Nur die Gruppen $\mathfrak{D}_6^1$ und $\mathfrak{D}_6^6$ sind dazu geeignet. Da ihre dreizähligen Achsen sämtlich Drehungsachsen sind, so muß die erzeugende Operation mit ihnen je eine Gruppe $\mathfrak{D}_{3h}$ bestimmen. Daraus folgt (§ 3) sofort zweierlei: Erstens, daß die erzeugende Operation eine reine Spiegelung ist, und zweitens, daß sie nur in die Ebene γ oder aber in die ihr parallele durch F_m gehende Ebene ν fallen kann; es kommen also nur die Spiegelungen

5) $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_\nu$

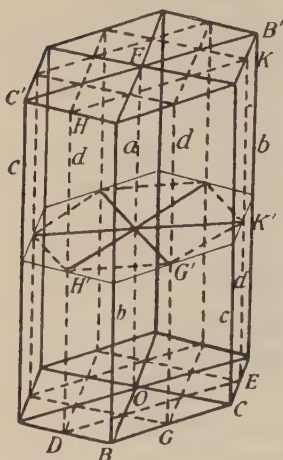


Fig. 229

in Betracht. Der Abstand zweier nächsten Spiegelungsebenen hat für beide

Gruppen den Wert τ_z .

Die Symmetriezentra bestimmen sich nach den Sätzen von Kap. XIII, § 6. Bei $\mathfrak{D}_6^1$ ist a eine zweizählige Drehungsachse, daher bedingen die erzeugenden Spiegelungen $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_\nu$ die Punkte O und F_m als Symmetriezentra. Bei $\mathfrak{D}_6^6$ ist a eine zweizählige Schraubenachse, und daher bedingt die Spiegelung $\mathfrak{S}_h$ hier den Punkt F_m als Symmetriezentrum, und die Spiegelung $\mathfrak{S}_\nu$ den Punkt O .

Die Punktgruppe D_6^h enthält auch sechs vertikale Symmetrieebenen σ_v' ; bedingt durch die horizontale Symmetrieebene σ_h' und die in ihr enthaltenen zweizähligen Achsen u' . Analog ent-

hält jede Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}$ sechs Schaaren paralleler spiegelnder Ebenen. Sie bilden in ihr eine Gruppe $\mathfrak{C}_{6v}$, die durch die horizontale Symmetrieebene und die zweizähligen Nebenachsen der Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}$ bestimmt ist. Für die Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^1$ ist es die Gruppe $\mathfrak{C}_{6v}^1$; die durch O gehenden sechs Achsen u von Fig. 226 bedingen mit σ_h sechs vertikale Ebenen σ_v durch a . Die Achsen-ebenen sind zugleich die horizontalen Symmetrieebenen. Für die Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^2$ ist es die Gruppe $\mathfrak{C}_{6v}^2$; die sechs Achsen u der Ebene γ bedingen mit der Ebene ν sechs Operationen $\mathfrak{S}_v(\tau_z)$ an den gleichen sechs Ebenen σ_v durch a ; die horizontalen Symmetrieebenen verlaufen also im mittleren Abstand zwischen den Achsenebenen. Für die Gruppen $\mathfrak{D}_{6h}^3$ und $\mathfrak{D}_{6h}^4$ treten analog die Gruppen $\mathfrak{C}_{6v}^3$ und $\mathfrak{C}_{6v}^4$ auf. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_6^6$ gehen nämlich durch O drei zweizählige Drehungsachsen, die in die Höhen der Netzdreiecke fallen, ebenso gehen durch F_m drei solche Achsen, die in die Seiten fallen¹⁾. Sie bedingen mit $\mathfrak{S}_h$ drei Symmetrieebenen σ_d und drei Operationen $\mathfrak{S}_s(\tau_z)$, und dem entspricht die Gruppe $\mathfrak{C}_{6v}^4$. Umgekehrt bedingen sie mit $\mathfrak{S}_\nu$ drei Operationen $\mathfrak{S}_d(\tau_z)$ und drei Spiegelungen $\mathfrak{S}_s$ und dem entspricht die Gruppe $\mathfrak{C}_{6v}^3$.

Ein Bild der Achsenfiguren für $\mathfrak{D}_{6h}^3$ und $\mathfrak{D}_{6h}^4$ erhält man so, daß man die Figuren 219 und 220 der Gruppen $\mathfrak{D}_{3h}$ zu Hilfe nimmt. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^3$ bilden die dreizähligen Drehungsachsen mit der Ebene σ_h eine Gruppe $\mathfrak{D}_{3h}^1$, und bei der Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^4$ bilden diese Achsen mit der Ebene ν eine Gruppe $\mathfrak{D}_{3h}^3$; im ersten Fall liegen die vertikalen Symmetrieebenen so, wie es der Figur 219 entspricht, im zweiten, so wie es die Figur 220 zeigt²⁾. Damit sind die sämtlichen reinen Symmetrieebenen gekennzeichnet.

Wir erhalten so die Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{6h}^1 &= \{ \mathfrak{D}_6^1, \mathfrak{S}_h; \Gamma_h \} = \{ \mathfrak{D}_6^1, \mathfrak{I} \}; \mathfrak{C}_{6v}^1 \\ \mathfrak{D}_{6h}^2 &= \{ \mathfrak{D}_6^1, \mathfrak{S}_\nu; \Gamma_h \} = \{ \mathfrak{D}_6^1, \mathfrak{I}_f \}; \mathfrak{C}_{6v}^2 \\ \mathfrak{D}_{6h}^3 &= \{ \mathfrak{D}_6^6, \mathfrak{S}_h; \Gamma_h \} = \{ \mathfrak{D}_6^6, \mathfrak{I}_f \}; \mathfrak{C}_{6v}^3 \\ \mathfrak{D}_{6h}^4 &= \{ \mathfrak{D}_6^6, \mathfrak{S}_\nu; \Gamma_h \} = \{ \mathfrak{D}_6^6, \mathfrak{I} \}; \mathfrak{C}_{6v}^4.\end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. S. 448, Anm. 1.

²⁾ Mit Tilgung der Pfeile.

7. Es gibt vier Gruppen der Symmetrie D_6^h ; ihr Gitter ist Γ_h .

§ 9. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte. In Kap. VII fällt die Ebene σ_v mit der yz -Ebene zusammen und die Achse u fällt in die x -Achse. Dementsprechend ist das Koordinatensystem auch hier zu wählen. Die Ebene σ_v fällt also in die Ebene β .

Die Gruppen $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^1$ und $\mathfrak{D}_{3h}^3$ sind von Zusatzwerten frei. Für die Gruppen $\mathfrak{D}_{3h}^2$ und $\mathfrak{D}_{3h}^4$ ist $\mathfrak{S}_v$ die erzeugende Operation. Sie bedingt den Zusatzwert τ_z und so finden wir die Werte:

$$\mathfrak{D}_{3h}^2 \text{ und } \mathfrak{D}_{3h}^4: \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_z & \tau_z & \tau_z & \tau_z & \tau_z & \tau_z. \end{array}$$

Die Gruppe $\mathfrak{C}_6^1$ ist von Zusatzwerten frei; für die übrigen, die sich in üblicher Weise erledigen, findet sich

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{C}_6^2: & 0 & \frac{1}{3}\tau_z, \quad \frac{2}{3}\tau_z, \quad \tau_z, \quad \frac{4}{3}\tau_z, \quad \frac{5}{3}\tau_z \\ \mathfrak{C}_6^3: & 0 & \frac{5}{3}\tau_z, \quad \frac{4}{3}\tau_z, \quad \tau_z, \quad \frac{2}{3}\tau_z, \quad \frac{1}{3}\tau_z \\ \mathfrak{C}_6^4: & 0 & \frac{2}{3}\tau_z, \quad \frac{1}{3}\tau_z, \quad 0, \quad \frac{2}{3}\tau_z, \quad \frac{4}{3}\tau_z \\ \mathfrak{C}_6^5: & 0 & \frac{4}{3}\tau_z, \quad \frac{2}{3}\tau_z, \quad 0, \quad \frac{1}{3}\tau_z, \quad \frac{5}{3}\tau_z \\ \mathfrak{C}_6^6: & 0 & \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z. \end{array}$$

Von den Gruppen $\mathfrak{C}_{6v}$ ist $\mathfrak{C}_{6v}^1$ von Zusatzwerten frei. Die erzeugende Operation $\mathfrak{S}_v$ fällt in die yz -Ebene; auf die Translation τ_z wirkt sie so, daß sie sie ungeändert läßt. Dies liefert die Formeln

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{C}_{6v}^2: & 0 & 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\ & \tau_z & \tau_z, \quad \tau_z, \quad \tau_z, \quad \tau_z, \quad \tau_z \\ \mathfrak{C}_{6v}^3: & 0 & \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z \\ & 0 & \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z \\ \mathfrak{C}_{6v}^4: & 0 & \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z \\ & \tau_z & 0, \quad \tau_z, \quad 0, \quad \tau_z, \quad 0. \end{array}$$

Bei den Gruppen $\mathfrak{C}_{6h}$ ist wieder $\mathfrak{C}_{6h}^1$ von Zusatzwerten frei; die Spiegelung $\mathfrak{S}_h$ führt τ_z in $-\tau_z$ über, also (in reduzierter Form) in sich; daher folgt für $\mathfrak{C}_{6h}^2$

$$\mathfrak{C}_{6h}^2: \begin{array}{cccccc} 0 & \tau_z & 0 & \tau_z & 0 & \tau_z \\ 0 & \tau_z & 0 & \tau_z & 0 & \tau_z. \end{array}$$

Die Umwendungsachse der Gruppen $\mathfrak{D}_6$ fällt in die x -Achse; ihre Wirkung auf die Translation τ des Koordinatentripels $(xyz) + \tau$ ist wieder dieselbe, wie auf (xyz) selbst. Sie läßt daher τ_z in $-\tau_z$ übergehen. Die Gruppe $\mathfrak{D}_6^1$ ist ohne Zusatzwerte; für die andern Gruppen folgt:

$\mathfrak{D}_6^2:$	0	$\frac{1}{3}\tau_x$	$\frac{2}{3}\tau_x$	τ_x	$\frac{4}{3}\tau_x$	$\frac{5}{3}\tau_x$
	0	$\frac{5}{3}\tau_x$	$\frac{4}{3}\tau_x$	τ_x	$\frac{2}{3}\tau_x$	$\frac{1}{3}\tau_x$
$\mathfrak{D}_6^3:$	0	$\frac{5}{3}\tau_x$	$\frac{4}{3}\tau_x$	τ_x	$\frac{2}{3}\tau_x$	$\frac{1}{3}\tau_x$
	0	$\frac{1}{3}\tau_x$	$\frac{2}{3}\tau_x$	τ_x	$\frac{4}{3}\tau_x$	$\frac{5}{3}\tau_x$
$\mathfrak{D}_6^4:$	0	$\frac{2}{3}\tau_x$	$\frac{4}{3}\tau_x$	0	$\frac{2}{3}\tau_x$	$\frac{4}{3}\tau_x$
	0	$\frac{4}{3}\tau_x$	$\frac{2}{3}\tau_x$	0	$\frac{4}{3}\tau_x$	$\frac{2}{3}\tau_x$
$\mathfrak{D}_6^5:$	0	$\frac{4}{3}\tau_x$	$\frac{2}{3}\tau_x$	0	$\frac{4}{3}\tau_x$	$\frac{2}{3}\tau_x$
	0	$\frac{2}{3}\tau_x$	$\frac{4}{3}\tau_x$	0	$\frac{2}{3}\tau_x$	$\frac{4}{3}\tau_x$
$\mathfrak{D}_6^6:$	0	τ_x	0	τ_x	0	τ_x
	0	τ_x	0	τ_x	0	τ_x

Von den Gruppen $\mathfrak{D}_{6h}$ ist $\mathfrak{D}_{6h}^1$ ohne alle Zusatzwerte, bei den übrigen Gruppen mag es wieder genügen, die Zusatzwerte für die Reihen III und IV von Kap. VII, § 6 anzugeben; für die ersten beiden Reihen sind sie aus den vorstehenden Formeln für $\mathfrak{D}_6^1$ und $\mathfrak{D}_6^6$ zu entnehmen.

Die erzeugenden Operationen sind $\mathfrak{S}_h$ und $\mathfrak{S}_v$; die erste verwandelt jeden schon vorhandenen Zusatzwert τ in $-\tau$, die zweite genügt der Gleichung $\mathfrak{S}_v = \mathfrak{S}_h \cdot \mathfrak{T}_z$ und bedingt daher noch τ_z als Zusatzwert. So ergibt sich die Tabelle

$\mathfrak{D}_{6h}^2:$	τ_x	τ_x	τ_x	τ_x	τ_x	τ_x
	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z	τ_z
$\mathfrak{D}_{6h}^3:$	0	τ_x	0	τ_x	0	τ_x
	0	τ_x	0	τ_x	0	τ_x
$\mathfrak{D}_{6h}^4:$	τ_x	0	τ_x	0	τ_x	0
	τ_x	0	τ_x	0	τ_x	0

Die Gruppen $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^3$, $\mathfrak{C}_6$, $\mathfrak{C}_{6v}^1$, $\mathfrak{C}_{6h}^1$, $\mathfrak{D}_6^1$, $\mathfrak{D}_{6h}^1$ entsprechen den Bravais'schen Strukturen; die Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^1$ stellt die Gesamtsymmetrie des Gitters Γ_h dar. Die Gruppen $\mathfrak{D}_{3h}^1$ und $\mathfrak{D}_{3h}^3$ unterscheiden sich durch die verschiedene Lage der Punktgruppe D_{3h} zu den Achsen des Gitters Γ_h .

§ 10. Die Eigensymmetrie der Bausteine. Bei den Tabellen für die den Gruppen eigentümliche *Eigensymmetrie der Bausteine* μ sehen wir wie üblich davon ab, daß μ in eine Drehungsachse, eine Symmetrieebene oder ein Symmetriezentrum fällt; doch ist zu beachten, daß eine sechszählige Schraubenachse zugleich eine zweizählige oder dreizählige Drehungsachse sein kann. Die Übersicht gestaltet sich hier wesentlich einfacher, als bei den andern Gruppen. Die Punkte der Ebenen γ' und ν , die über den Punkten B und C der Ebene γ liegen, haben in den Achsenfiguren die Bezeichnung B' , C' , B_m , C_m erhalten. Die Punkte D , E , G , H , K , M haben dieselbe Bedeutung wie sonst, ebenso auch H' , K' , G' .

In den Gruppen $\mathfrak{D}_{6h}^2$, $\mathfrak{D}_{6h}^3$, $\mathfrak{D}_{6h}^4$ treten auch Punkte der Eigensymmetrie C_2^h auf. Für $\mathfrak{D}_{6h}^2$ sind es die in der Ebene ν liegenden Punkte H' , K' , G' . Für $\mathfrak{D}_{6h}^3$ ist jede vertikale Ebene, die durch eine zweizählige Achse u von γ geht, eine Symmetrieebene; es liegen daher auch H' , K' , G' in je einer solchen Ebene und erhalten wiederum die Symmetrie C_2^h . Die definierende Gleichung von $\mathfrak{D}_{6h}^4$ zeigt, daß ein Symmetriezentrum in O fällt; es fällt also auch in D , E , G ein solches, und ebenso ist es für F , H , K , M . Daher sind D , E , G , H , K , M Punkte der Symmetrie C_2^h . Die übrigen Eigensymmetrien sind aus der Figur unmittelbar abzulesen; insbesondere tritt in $\mathfrak{D}_{6h}^3$ am Punkt F_m die Gruppe D_3^d auf, und ebenso bei $\mathfrak{D}_{6h}^4$ in den Punkten O und F .

Die Frage der Gleichwertigkeit bedarf nur für die horizontalen Nebenachsen einer Erwähnung. In der Gruppe $\mathfrak{D}_6^1$ sind die Achsen von γ mit denen von γ' nicht gleichwertig, für $\mathfrak{D}_6^4$ sind sie in der Weise gleichwertig, wie es die Figur 228 zeigt; also für die Ebenen durch O und O_4 und die Ebenen durch O_2 und F . In jeder einzelnen Ebene sind nur solche Achsen gleichwertig, die einen Winkel von 60° einschließen, also enthält $\mathfrak{D}_6^1$ in γ und γ' je zwei Schaaren ungleichwertiger Achsen, ebenso $\mathfrak{D}_6^4$ in jeder Ebene. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_6^6$ sind die Achsen jeder Horizontalebene gleichwertig, die Achsen von ν und γ ungleichwertig. Die Änderungen, die für die Gruppen $\mathfrak{D}_{6h}$ eintreten, sind aus den erzeugenden Spiegelungen ersichtlich.

Tabelle A. Die Gruppen $\mathfrak{C}_{3h}$ und $\mathfrak{D}_{3h}$

Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{C}_{3h}^1$	C_3^h	O, B, C, F, B', C'	$\mathfrak{D}_{3h}^3$	C_2^v C_3^v D_3^h	alle u in γ und γ' a O, F
$\mathfrak{D}_{3h}^1$	C_2^v C_3^v D_3^h	alle u in γ und γ' a, b, c O, B, C, F, B', C'	$\mathfrak{D}_{3h}^4$	C_3^h D_3	F_m, B_m, C_m $O = F'$
$\mathfrak{D}_{3h}^2$	C_3^h D_3	F_m, B_m, C_m $O = F, B = B', C = C'$			

Tabelle B. Gruppen $\mathfrak{C}_{6v}$, $\mathfrak{C}_{6h}$, $\mathfrak{D}_6$, $\mathfrak{D}_{6h}$

Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{C}_{6v}^1$	C_2^v C_3^v C_6^v	d $b = c^1)$ a	$\mathfrak{D}_{6h}^1$	V^h D_3^h C_6^v D_6^h	$D = E = G, H = K = M$ $B = C, B' = C'$ a O, F
$\mathfrak{C}_{6v}^8$	C_8^v	a	$\mathfrak{D}_{6h}^3$	C_2^h V C_3^h D_3 C_6^h D_6	$H' = K' = G'$ $D = E = G = H = K = M$ $B_m = C_m$ $B = C = B' = C'$ F_m $O = F$
$\mathfrak{C}_{6v}^4$	C_2^v	$a, b = c^1)$			
$\mathfrak{C}_{6h}^1$	C_2^h C_3^h C_6^h	$D = E = G, H = K = M$ $B = C, B' = C'$ O, F	$\mathfrak{D}_{6h}^3$	C_2^h C_2^v C_3^v D_3^d D_3^h	$H' = K' = G'$ alle u in γ und γ' $a, b = c$ F_m $O = F, B = C', B' = C$
$\mathfrak{C}_{6h}^2$	C_3^h	$O, F, B = C, B' = C'$	$\mathfrak{D}_{6h}^4$	C_2^h C_2^v C_3^v D_3 D_3^d C_3^h D_3^h	$D = E = G = H$ $= K = M$ alle u in γ a $B = C = B' = C'$ $O = F$ $B_m = C_m$ F_m
$\mathfrak{D}_6^1$	V D_3 D_6	$D = E = G, H = K = M$ $B = C, B' = C'$ O, F			
$\mathfrak{D}_6^4$	V	$O = O_4, O_2 = F$ $D = E_4 = G_2^2)$			
$\mathfrak{D}_6^6$	D_3	$O = F, F_m$ $B = C', C = B'$			
$\mathfrak{D}_{6h}^1$	C_2^v C_3^v	$d, \text{ alle } u \text{ in } \gamma \text{ und } \gamma'$ $b = c^1)$			

¹⁾ In Figur 219, 220, 226 sind die dreizähligen Achsen b und c nicht unterschieden.

²⁾ Die Schraubung $\mathfrak{A}$ bringt D in den Punkt, der Gegenpunkt von E_4 für O_4 ist; mit ihm ist E_4 gleichwertig. Ähnlich folgt die Gleichwertigkeit von D und G_2 .

Tabelle C. Hexagonaler Typus¹⁾

Gruppe G_{μ}	Zählig- keit	Gruppen Γ	Punktlagen
C_3^h	4	$\mathbb{C}_{6h}^1$ $\mathbb{D}_{6h}^2, \mathbb{D}_{6h}^3$ $\mathbb{D}_{6h}^4$	D, E, G, H, K, M H', K', G' D, E, G, H, K, M
C_2^v	4	$\mathbb{D}_{3h}^1, \mathbb{D}_{3h}^3$	alle u in γ und γ'
		$\mathbb{C}_{6v}^1$	d
		$\mathbb{D}_{6h}^1$ $\mathbb{D}_{6h}^3$ $\mathbb{D}_{6h}^4$	d , alle u in γ und γ' alle u in γ und γ' alle u in ν
V	4	$\mathbb{D}_6^1$ $\mathbb{D}_6^4$	D, E, G, H, K, M $O, O_2, O_4, F, D, E_4, G_2^3$
		$\mathbb{D}_{6h}^2$	D, E, G, H, K, M
V^h	4	$\mathbb{D}_{6h}^1$	D, E, G, H, K, M
C_3^v	6	$\mathbb{D}_{3h}^1$ $\mathbb{D}_{3h}^3$	a, b, c a
		$\mathbb{C}_{6v}^1$ $\mathbb{C}_{6v}^3$ $\mathbb{C}_{6v}^4$	b, c a a, b, c
		$\mathbb{D}_{6h}^1$ $\mathbb{D}_{6h}^3$ $\mathbb{D}_{6h}^4$	b, c a, b, c a
D_3	6	$\mathbb{D}_{3h}^2$ $\mathbb{D}_{3h}^4$ $\mathbb{D}_6^1, \mathbb{D}_{6h}^2, \mathbb{D}_{6h}^4$ $\mathbb{D}_6^6$	O, F, B, C, B', C' O, F B, C, B', C' O, F, F_m, B, C, B', C'
D_3^d	12	$\mathbb{D}_{6h}^3$ $\mathbb{D}_{6h}^4$	F_m O, F

¹⁾ Das Gitter ist nicht aufgeführt, da es für alle Gruppen Γ^h st.

²⁾ Vgl. die Anm. 2, S. 457.

Gruppe G_μ	Zählig- keit	Gruppen Γ	Punktlagen
C_2^h	6	$\mathbb{C}_{3h}^1$	O, F, B, C, B', C'
		$\mathbb{D}_{3h}^3, \mathbb{D}_{3h}^4$ $\mathbb{C}_{6h}^1$ $\mathbb{C}_{6h}^2$	F_m, B_m, C_m B, C, B', C' O, F, B, C, B', C'
		$\mathbb{D}_{6h}^3, \mathbb{D}_{6h}^4$	B_m, C_m
D_2^h	12	$\mathbb{D}_{3h}^1$ $\mathbb{D}_{3h}^3$ $\mathbb{D}_{6h}^1$ $\mathbb{D}_{6h}^3$ $\mathbb{D}_{6h}^4$	O, F, B, C, B', C' O, F B, C, B', C' O, F, B, C, B', C' F_m
C_6^v	12	$\mathbb{C}_{6v}^1$ $\mathbb{D}_{6h}^1$	a a
C_6^h	12	$\mathbb{C}_{6h}^1$ $\mathbb{D}_{6h}^2$	O, F F_m
D_6	12	$\mathbb{D}_6^1$ $\mathbb{D}_{6h}^2$	O, F O, F
D_6^h	24	$\mathbb{D}_{6h}^1$	O, F

Das Eintreten einer *möglichen Übersymmetrie* soll nur in der Weise behandelt werden, daß wir das in Kap. XV, § 8 behandelte Beispiel auf Grund unserer Tabellen fortsetzen. Wir wollen zu einer mit der Gruppe $\mathbb{C}_3^1$ erzeugten Struktur Σ einen solchen Baustein μ verwenden, daß sich für die Struktur eine Gruppe des hexagonalen Systems einstellt. Das ist angängig, da in $\mathbb{C}_3^1$ das Gitter Γ_h enthalten ist. Soll zunächst bewirkt werden, daß die Struktur Σ die Symmetrie der Gruppe $\mathbb{C}_{3h}^1$ erhält, so muß μ eine horizontale Symmetrieebene besitzen; diese Ebene übernimmt dann die Rolle der Ebene γ für die Gruppe $\mathbb{C}_{3h}^1$. Besitzt μ die Symmetrie C_2^h , so wird sich eine Struktur der Gesamtsymmetrie C_6^h ergeben können. Nach der Tabelle C ist es z. B. der Fall, wenn die Ausgangslage von μ in D

oder E fällt, und die so gebildete Struktur Σ wird der Gruppe $\mathfrak{C}_{6h}^1$ entsprechen. Besitzt μ die Symmetrie C_6^h und fällt überdies in den Punkt O , so wird die Gesamtsymmetrie nach der Tabelle C ebenfalls die von $\mathfrak{C}_{6h}^1$ sein. Möge jetzt μ die Symmetrie V besitzen, so zeigt die Tabelle C, daß die Struktur Σ die Gesamtsymmetrie D_6 annehmen kann; fällt μ in die Punkte D oder E , so wird sich eine Struktur der Gruppe $\mathfrak{D}_6^1$ einstellen, und wenn μ in O oder E_4 oder G_2 fällt, eine Struktur, die der Gruppe $\mathfrak{D}_6^4$ entspricht. In dieser Weise kann man fortfahren und kann der mittels $\mathfrak{C}_3^1$ erhaltenen Anordnung Σ sogar die Symmetrie D_6^h aufprägen. Offenbar hat man in jedem Fall die folgenden zwei Bedingungen zu erfüllen. Erstens muß die Eigensymmetrie von μ in einer solchen Gruppe G_μ ihren Ausdruck finden, daß G_μ und C_3 zusammen alle Symmetrieelemente von D_h^6 darstellen; das ist z. B. der Fall, wenn wir dem Baustein μ die Eigensymmetrie V^h aufprägen. Zweitens muß er an eine Stelle gesetzt werden, die für eine Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}$ eine Stelle mit der Eigensymmetrie V^h ist. Das ist nach der Tabelle C möglich, da D und E für $\mathfrak{D}_{6h}^1$ solche Punktlagen abgeben. Geschieht dies, so entsteht eine Struktur der Symmetrie D_6^h , und zwar eine, die auch aus $\mathfrak{D}_{6h}^1$ entsteht. Die Gesamtsymmetrie D_6^h der Anordnung Σ spaltet sich in üblicher Weise in die zwei Teile C_3 und V^h , so daß V^h durch die Eigensymmetrie von μ und C_3 durch die Anordnung der Bausteine realisiert ist; die Operationen von V^h lassen μ zunächst ungeändert und die dann noch auszuführenden Operationen der Gruppe $\mathfrak{C}_3^1$ sind es, die die Struktur Σ entstehen lassen.

Da das hexagonale Gitter Γ_h auch bei den Gruppen vom rhomboedrischen Typus auftritt, so soll zum Schluß auf eine daraus fließende Folge hingewiesen werden. Wir haben in Kap. XV zwei Bravais'sche Gruppen gefunden, denen die Symmetrie D_3^d zukommt, nämlich $\mathfrak{D}_{3d}^1$ und $\mathfrak{D}_{3d}^5$; beide entstehen, wenn ein Baustein μ der Eigensymmetrie D_3^d den Translationen eines Gitters unterworfen wird, und zwar geht $\mathfrak{D}_{3d}^1$ durch die Translationen des Gitters Γ_h hervor und $\mathfrak{D}_{3d}^5$ durch die von Γ_{rh} . Dabei stellt D_3^d zugleich die höchste Symmetrie dar, die eine Struktur mit dem Gitter Γ_{rh} annehmen kann; für das Gitter Γ_h

ist dies nicht der Fall, aber doch hat die mittels Γ_h aus μ erzeugte Struktur nur die Symmetrie D_3^d , sie entspricht ja der Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^1$. Dabei ist festzuhalten, daß μ in beiden Fällen ein Baustein der Symmetrie D_3^d war.

Es gibt aber auch Gruppen der hexagonalen Symmetrie D_6^h mit Punktlagen der Eigensymmetrie D_3^d . Wie die Tabelle C zeigt, sind es die Gruppen $\mathfrak{D}_{6h}^3$ und $\mathfrak{D}_{6h}^4$, und es sind F_m und O die zugehörigen Punktlagen. Werde also ein Baustein μ der Eigensymmetrie D_3^d in F_m eingesetzt und den Operationen der Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^3$ unterworfen. Dann führen ihn alle Operationen von D_3^d zunächst in sich über; eine weitere Lage μ_1 kann aus ihm nur durch die Spiegelung gegen die Ebene γ entstehen. Diese zwei Bausteine μ und μ_1 bilden dann in der Stammfigur des Gitters die Ausgangslagen, aus denen alle übrigen, gemäß den Darlegungen von Kap. XII, § 11 hervorgehen. Die Gesamtsymmetrie der so erzeugten Struktur spaltet sich also in der Weise in die zwei Bestandteile D_3^d und S_1 , daß D_3^d in der Symmetrie des Bausteins und allein S_1 in der Anordnung zum Ausdruck kommt. Den rhomboedrischen Gruppen fehlen dagegen die horizontalen Symmetrieebenen. In dieser Weise tritt der Gegensatz zwischen den rhomboedrischen und hexagonalen Gruppen mit der Eigensymmetrie D_3^d zutage.

Kap. XVIII. Die Raumgruppen vom kubischen Typus

§ 1. Vorbemerkungen. Beim kubischen Typus treten drei verschiedene Gitter auf, Γ_c , Γ_c' , Γ_c'' mit den Translationen

$$\Gamma_c : 2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z,$$

$$\Gamma_c' : 2\tau_g, 2\tau_h, 2\tau_k, 2\tau_s$$

$$\Gamma_c'' : 2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z, 2\tau_d (= \tau_x + \tau_y + \tau_z).$$

Die Gitter Γ_c' und Γ_c'' erscheinen als Sonderfälle desselben quadratischen Gitters Γ_q' ; gerade mit Rücksicht hierauf haben wir das Gitter Γ_q' auch als ein flächenzentriertes Gitter Γ_q'' aufgefaßt.

Die Symmetriegruppen vom kubischen Typus sind

- 1) $\dots O^h, O, T^h, T^h, T.$

Der Weg, den wir in Kap. V für ihre Erzeugung einschlugen, ging von der Vierergruppe V aus. Ihre drei Achsen u' , v' , w' werden für die kubischen Gruppen gleichwertig; dasselbe gilt also auch von den Achsenschaaren $\{u\}$, $\{v\}$, $\{w\}$ der Gruppen $\mathfrak{B}$. Wir erhalten daher Gruppen des kubischen Typus nur aus solchen Gruppen $\mathfrak{B}$, bei denen diese drei Achsenschaaren gleichmäßig im Raume angeordnet sind; das sind nur die Gruppen

$$2) \quad \mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^4, \mathfrak{B}^7, \mathfrak{B}^8, \mathfrak{B}^9.$$

Jede der fünf Punktgruppen 1) enthält (Fig. 22, S. 58) die vier dreizähligen Achsen d , d_1 , d_2 , d_3 ; sie entsprechen den vier Würfeldiagonalen. In den ihnen isomorphen Raumgruppen treten daher vier Schaaren dreizähliger Achsen $\{d\}$, $\{d_1\}$, $\{d_2\}$, $\{d_3\}$ auf; sie liegen symmetrisch zu den drei stets vorhandenen Translationen $2\tau_x$, $2\tau_y$, $2\tau_z$. Diese drei Translationen haben zu jeder der vier dreizähligen Achsen d , d_1 , d_2 , d_3 die gleiche Lage, wie die Translationen $2\tau_l$, $2\tau_m$, $2\tau_n$ des rhomboedrischen Gitters zur Translation $2\tau_z$. Nun ist die Projektion von $2\tau_x$, $2\tau_y$, $2\tau_z$ auf die Diagonale d (ebenso d_1 , d_2 , d_3) *keine* Translation eines der drei kubischen Gitter, und dies bewirkt, daß jedem dieser drei Gitter für jede Richtung d der Charakter des rhomboedrischen Gitters Γ_{rh} zukommt. Die dreizähligen Achsenschaaren $\{d\}$, $\{d_1\}$, $\{d_2\}$, $\{d_3\}$ bilden daher je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$; denn $\mathfrak{C}_3^4$ ist die einzige Gruppe $\mathfrak{C}_3$ mit dem Gitter Γ_{rh} (S. 352). Daraus folgt, daß *unter den dreizähligen Achsen jeder Richtung erstens Drehungsachsen auftreten, und zweitens auch Schraubenachsen von beiderlei Windungssinn.*

Die Achsenfiguren der kubischen Gruppen können nicht mehr ausführlich gezeichnet werden; insbesondere ist von der Einzeichnung der Schraubenachsen meist abgesehen worden. Als Ersatz müssen die Achsenfiguren dienen, die den Untergruppen der kubischen Gruppen entsprechen; in erster Linie werden sich die tetragonalen und die rhombischen Untergruppen als wichtig erweisen. Die Stammfigur II_0 der kubischen Gruppen, die ein Würfel ist, werden wir durch W bezeichnen, ihren Oktanten durch w ; er entspricht dem bisher benutzten Oktanten p . Die Punkte, die in ihm bei den früheren Gruppen in Betracht

kamen, dehnen sich bei den kubischen Gruppen zyklisch über ihn aus; die wichtigsten zeigen die Figuren 230 und 231.

§ 2. Die Gruppen der Symmetrie T . Für die Gruppe T besteht die Erzeugungsgleichung

$$T = \{V, \mathfrak{D}'\}; \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'^{(2\pi/3)},$$

die Raumgruppen $\mathfrak{T}$ gehen daher aus den Gruppen $\mathfrak{B}$ mittels einer zu $\mathfrak{D}'$ isomorphen Operation $\mathfrak{D}$ hervor. Den vier gleichberechtigten dreizähligen Achsen d, d_1, d_2, d_3 der Gruppe T entsprechen in jeder Gruppe $\mathfrak{T}$ vier isomorphe gleichberechtigte Achsenschaaren $\{d\}, \{d_1\}, \{d_2\}, \{d_3\}$. Nun sahen wir in § 1 weiter, daß die dreizähligen Achsen für jede Richtung eine

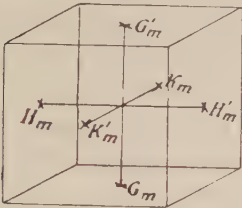


Fig. 230

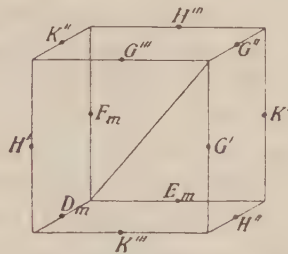


Fig. 231

Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ bilden; also eine Gruppe, in der auch Drehungsachsen auftreten. Wir können daher als erzeugende Operation $\mathfrak{D}$ stets eine Drehung benutzen, und zwar von irgendeiner der vier vorgenannten Schaaren. Diese dreizählige Achse muß außerdem eine Deckoperation für die einzelnen Gruppen $\mathfrak{B}$ sein, sie muß also ihre drei zweizähligen Achsenschaaren $\{u\}, \{v\}, \{w\}$ ineinander überführen. Dies wird für jede in § 1 genannte Gruppe $\mathfrak{B}$ der Fall sein, wenn die dreizählige Achse in eine der vier Diagonalen ihrer Achsenfigur hineinfällt, gleichgültig in welche; wir werden immer die von O ausgehende wählen. Wir erhalten daher aus jeder der fünf in § 1 genannten Gruppen $\mathfrak{B}$ je eine Gruppe $\mathfrak{T}$; es sind die Gruppen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^1 &= \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{D}; \Gamma_c\}, & \mathfrak{T}^2 &= \{\mathfrak{B}^1, \mathfrak{D}; \Gamma_c'\}, \\ \mathfrak{T}^3 &= \{\mathfrak{B}^8, \mathfrak{D}; \Gamma_c'''\}, & \mathfrak{T}^5 &= \{\mathfrak{B}^9, \mathfrak{D}; \Gamma_c'''\}, \\ \mathfrak{T}^4 &= \{\mathfrak{B}^4, \mathfrak{D}; \Gamma_c\}. \end{aligned}$$

1. *Es gibt fünf Gruppen der Symmetrie T ; zwei mit dem Gitter Γ_c , zwei mit Γ_c'' und eine mit Γ_c' .*

Die Anordnung der dreizähligen Achsen bedarf für die einzelnen Gruppen getrennter Untersuchung; sie schließt an den Gitterwürfel W selbst an¹⁾. Bei der Gruppe $\mathfrak{T}^1$ ist Γ_c das Gitter; dem Tripel $2\tau_l, 2\tau_m, 2\tau_n$ des rhomboedrischen Gitters Γ_{rh} entsprechen also hier die drei Translationen $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$, und an die Stelle des Dreiecks $L_1M_1N_1$ von Fig. 92 (S. 192) tritt das Dreieck ABC . Durch die Mitte dieses Dreiecks geht die Achse d , von weiteren zu d parallelen Drehungsachsen wird es aber nicht getroffen, nur noch von den Schraubenachsen, die (Kap. IX, S. 92) durch die Teilpunkte der Seiten AB, AC, BC gehen. *Den Würfel W durchdringt also nur die eine Drehungsachse d der betrachteten Schaar.* Im Punkt O bedingt die Achse d mit den Achsen u, v, w je eine Gruppe T und damit auch eine Achse d_1, d_2, d_3 . Das gleiche gilt für jede andere Ecke des Würfels und für die Mitte M ; wie es Figur 22 zeigt. Ebenso ist es bei der Gruppe $\mathfrak{T}^3$. Ihr Gitter ist Γ_c'' , die in ihm außer $2\tau_x, 2\tau_y, 2\tau_z$ noch vorhandene Translation $2\tau_d = OM$ führt keine neuen Achsen ein. Sie fordert nur, daß auch M ein Punkt ist, durch den alle Achsen einer Gruppe T gehen — was aber schon von selbst erfüllt ist. *Bei beiden Gruppen gehen also durch jede Ecke und durch die Mitte des Würfels W alle Achsen einer Gruppe T .*

Die Gruppe $\mathfrak{T}^2$ besitzt das flächenzentrierte Gitter Γ_c' , es sind also auch OG, OH, OK Translationen, und dies bewirkt, daß auch durch die Punkte G, H, K alle Achsen einer Gruppe T hindurchgehen. Hier legen wir deshalb zweckmäßig nur den Oktanten w , also den Würfel der Figur 96 (S. 199) mit den Kanten OD, OE, OF der Betrachtung zugrunde. Für ihn gilt dann, was wir soeben für W selbst ableiteten; außer seinen Ecken ist auch seine Mitte M_m Schnittpunkt von drei zweizähligen Achsen u, v, w . Es wird also auch dieser Würfel von vier dreizähligen Achsen durchsetzt, und das gleiche gilt für jeden andern Oktanten von W^2). Alle Punkte O bis M , sowie M_m sind also Punkte der Symmetrie T .

¹⁾ Vgl. Fig. 94, S. 196.

²⁾ Man überzeugt sich davon auch durch folgende einfache Rech-

Wesentlich anders ist es bei den Gruppen $\mathfrak{T}^4$ und $\mathfrak{T}^5$, die aus den Gruppen $\mathfrak{B}^4$ und $\mathfrak{B}^9$ entstehen. *Keine zwei ihrer dreizähligen Drehungsachsen können einander schneiden.* Zwei sich schneidende dreizählige Achsen treten nämlich nur in den Punktgruppen T und O auf und bedingen daher, wie es bei T und O der Fall ist, drei durch ihren Schnittpunkt gehende zueinander senkrechte zweizählige Achsen. Solche Achsen sind bei den Gruppen $\mathfrak{B}^4$ und $\mathfrak{B}^9$ nicht vorhanden (Fig. 143, 145). Von den Gittern I_c' und I_c'' , die diesen Gruppen entsprechen, haben wir aber oben gezeigt, daß ihnen für jeden Oktanten w

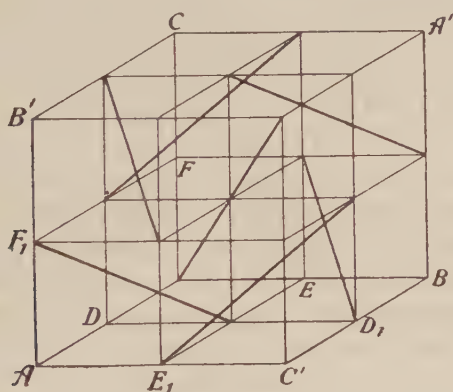


Fig. 232

je eine dreizählige Drehungsachse zukommt; und so folgt, daß bei den Gruppen $\mathfrak{B}^4$ und $\mathfrak{B}^9$ sämtliche den Würfel W durchdringende Achsen d windschief zueinander liegen (Fig. 232). Man findet sie auf Grund davon, daß die dreizähligen Drehungsachsen d, d_1, d_2, d_3 der Punktgruppe T durch die Umwendungen um ihre zweizähligen Achsen ineinander übergehen; das analoge muß daher auch bei den Gruppen $\mathfrak{T}^4$ und $\mathfrak{T}^5$ der Fall sein. Wenn man also die Lagen bestimmt, in die die erzeugende Achse d durch die zu $\mathfrak{B}^4$ und $\mathfrak{B}^9$ gehörigen zwei-

nung. In den Würfel W treten insgesamt 32 dreizählige Drehungsachsen ein; je eine an jeder Ecke, und je vier auf jeder Flächenmitte. Das sind zusammen 32, und auf jeden Oktanten kommen daher vier.

zähligen Achsen gelangt, so stellen diese Geraden die gesuchten Diagonalen dar. In dieser Weise ist die Figur 232 gewonnen worden. Den Würfel W durchzieht die Achse d als Diagonale OO' ; wie die Figur zeigt, wird auch jede Flächenmitte von einer Achse getroffen. Es gilt aber auch von jeder Kantenmitte. Nur für die Kanten, die durch O und O' gehen, ist es in der Figur nicht ersichtlich. Erteilt man aber der Achse, die durch D_1 geht, eine Translation $-2\tau_y$, so geht sie durch D , erteilt man den Achsen, die durch E_1 und F_1 gehen, eine Translation $-2\tau_x$, so gehen sie durch E und F , und so ist die Behauptung für die drei durch O gehenden Kanten bereits erwiesen. Ebenso folgt sie für die drei Kanten durch O' .

§ 3. Die Gruppen der Symmetrie T^h . Die Gruppe T^h besitzt das Bildungsgesetz

$$T^h = \{T, \mathfrak{S}_h'\} = \{T, \mathfrak{S}\};$$

wir können also die isomorphen Gruppen $\mathfrak{T}_h$ mittels einer Inversion als erzeugender Operation ableiten. *Sie hat zwei evidenten Bedingungen zu genügen.* In jeder Gruppe $\mathfrak{T}$ ist eine Gruppe $\mathfrak{B}$ und nach § 1 auch eine Gruppe $\mathfrak{C}_4^3$ enthalten, die den zu d parallelen dreizähligen Achsen entspricht; die Inversion muß daher eine Deckoperation sowohl für die Achsen der Gruppe $\mathfrak{B}$, wie auch für die Achsen der Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ sein. Die zweite Bedingung bedeutet, daß sie mit der Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ eine Gruppe $\mathfrak{C}_{3i}^2$ erzeugt. Es gibt aber *nur eine* solche Gruppe, nämlich $\mathfrak{C}_{3i}^2$ (S. 354); ihr Inversionszentrum fällt in eine Drehungsachse, und so kann die erzeugende Inversion bei jeder Gruppe $\mathfrak{T}$ *in die Achse d gelegt werden.*

Mit der in der Gruppe $\mathfrak{T}$ enthaltenen Untergruppe $\mathfrak{B}$ bestimmt die erzeugende Inversion eine gewisse Gruppe $\mathfrak{B}_h$, die wir in die definierenden Gleichungen aufnehmen. Deren Achsenfiguren sind hinreichend, um auch ein Bild der Achsenfiguren für die Gruppen $\mathfrak{T}_h$ zu liefern; *es genügt, in die in Kap. XIV enthaltene Achsenfigur der Gruppe $\mathfrak{B}_h$ die dreizählige Achse der Gruppe $\mathfrak{T}$ einzutragen*, und die Figur eventuell zyklisch zu ergänzen.

Die Gruppe $\mathfrak{T}^1$ enthält die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ als Untergruppe; bei ihr sind *zwei* diesen Bedingungen genügende Lagen für die

Inversion möglich; sie kann sowohl in den Punkt O , wie in Punkt M_m der Achsenfigur von $\mathfrak{B}^1$ fallen (Fig. 140, S. 317). Es können also $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_m$ erzeugende Inversionen sein. Da OM_m keine halbe Translation ist, so sind die beiden so erzeugten Gruppen voneinander verschieden. Die Inversion $\mathfrak{I}$ bedingt mit der Gruppe $\mathfrak{B}^1$ die Gruppe $\mathfrak{B}_h^1$, die Inversion $\mathfrak{I}_m$ erzeugt aus $\mathfrak{B}^1$ die Gruppe $\mathfrak{B}_h^2$, und so erhalten wir die beiden Gruppen

$$\mathfrak{I}_h^1 = \{\mathfrak{I}^1, \mathfrak{I}; I_c^1\}; \mathfrak{B}_h^1 \text{ und } \mathfrak{I}_h^2 = \{\mathfrak{I}^1, \mathfrak{I}_m; I_c^1\}; \mathfrak{B}_h^2.$$

Die Gruppe $\mathfrak{B}_h^1$ enthält die drei Ebenen α, β, γ als Symmetrieebenen; es werden daher O und M Punkte der Eigensymmetrie T^h . Dagegen bedingt die Inversion $\mathfrak{I}_m$ nur die Eigensymmetrie C_3^i im Punkte M_m und kann sonst die Eigensymmetrieen der Gruppe $\mathfrak{I}^1$ nicht steigern. Der Punkt M_m ist das einzige Symmetriezentrum im Würfel w .

Die Gruppe $\mathfrak{I}^2$ enthält die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ als Untergruppe mit den Achsenfiguren 144 b und 80 a. Sie gestattet (S. 332) ebenfalls die Punkte O und M_m als Symmetriezentra, außerdem aber noch die Punkte M_m' und M_m'' . Sowohl die Inversionen an O und M_m , wie auch die an M_m' und M_m'' liefern nach Kap. XIV, § 12 die gleiche Gruppe. Dasselbe gilt für die Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$, der die erzeugende Achse d angehört, und daher bleibt es auch für die Gruppe $\mathfrak{I}^2$ selbst bestehen. Es ergeben sich daher aus $\mathfrak{I}^2$ nur zwei verschiedene Gruppen. Die Gruppen $\mathfrak{B}_h$, die bei ihnen auftreten, sind (S. 332) $\mathfrak{B}_h^{23}$ und $\mathfrak{B}_h^{24}$, und wir erhalten so die Gruppen

$$\mathfrak{I}_h^3 = \{\mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}; I_c'\}; \mathfrak{B}_h^{23} \text{ und } \mathfrak{I}_h^4 = \{\mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_m'; I_c'\}; \mathfrak{B}_h^{24}.$$

Bei der Gruppe $\mathfrak{I}_h^3$ sind wiederum, wie bei $\mathfrak{B}_h^{23}$, die Ebenen α, β, γ Symmetrieebenen; in $\mathfrak{I}_h^4$ sind reine Symmetrieebenen, wie die Achsenfigur 168 zeigt, nicht enthalten. Für die Lage der Symmetriezentra gilt, was für die beiden Gruppen $\mathfrak{B}_h^{23}$ und $\mathfrak{B}_h^{24}$ a. a. O. abgeleitet wurde. Es liegen also bei der Gruppe $\mathfrak{I}_h^4$ außer M_m' selbst nur noch drei weitere Symmetriezentra im Würfel w , nämlich die Mitten der drei Teiloktanten von w , die an den Oktanten von Fig. 168 angrenzen, dagegen ist der Punkt M_m'' der Strecke M_mM kein Symmetriezentrum.

Bei der Gruppe $\mathfrak{I}_h^3$ stellt sich im Punkt O die Eigensymmetrie T^h ein, jedoch nicht im Punkt M_m ; ihm kommt nur die Symmetrie T zu, die schon bei $\mathfrak{I}^2$ selbst auftritt. Bei der Gruppe $\mathfrak{I}_h^4$ erscheint im Punkt M_m' die Eigensymmetrie C_3^i , nicht jedoch im Punkt M_m'' . Nur die Mitten der vier eben genannten Teiloktanten, in die der Oktant w zerfällt, sind Symmetriezentra, also die, die wir gemäß Figur 218 (S. 433) durch M_m', M_m'', N_m', N_m'' bezeichneten.

Aus den Gruppen $\mathfrak{I}^3, \mathfrak{I}^4, \mathfrak{I}^5$ entsteht nur je eine Gruppe $\mathfrak{I}_h$. Die mit $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_m$ erzeugbaren Gruppen $\mathfrak{B}_h$ sind nach Kap. XIV, § 10 und § 12 für $\mathfrak{B}^8, \mathfrak{B}^4, \mathfrak{B}^9$ identisch und müssen es also auch hier sein. Bei den Gruppen $\mathfrak{B}^8$ und $\mathfrak{B}^9$ beruhte die Identität darauf, daß sie das Gitter Γ_v'''' enthalten, und daß daher $OM_m = \tau_d$ eine halbe Translation ist; umgekehrt ist daher bei den aus $\mathfrak{I}^3$ und $\mathfrak{I}^5$ entstehenden Gruppen sowohl O , wie auch M_m ein Symmetriezentrum. Die zugehörige Untergruppe $\mathfrak{B}_h$ ist für $\mathfrak{B}^8$ die Gruppe $\mathfrak{B}_h^{25}$, für $\mathfrak{B}^9$ ist es $\mathfrak{B}_h^{27}$. Bei der Gruppe $\mathfrak{B}^4$ beruhte die Identität darauf, daß die Punkte O und M_m gleiche Lage zur Achsengesamtheit besitzen, und dies überträgt sich ebenso auf die Gruppe $\mathfrak{I}^4$. Wir dürfen daher in allen Fällen den Punkt O als erzeugendes Symmetriezentrum wählen. Die aus $\mathfrak{B}^4$ sich ergebende Gruppe $\mathfrak{B}_h$ ist $\mathfrak{B}_h^{15}$, und wir erhalten so die Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_h^5 &= \{\mathfrak{I}_3, \mathfrak{I}; \Gamma_c''\}; \mathfrak{B}_h^{25} \\ \mathfrak{I}_h^6 &= \{\mathfrak{I}_4, \mathfrak{I}; \Gamma_c\}; \mathfrak{B}_h^{15}, \quad \mathfrak{I}_h^7 = \{\mathfrak{I}_5, \mathfrak{I}; \Gamma_c''\}; \mathfrak{B}_h^{27}.\end{aligned}$$

Bei der Gruppe $\mathfrak{I}_h^5$ sind α, β, γ Symmetrieebenen und alle Punkte O bis M Symmetriezentra; ebenso auch der Punkt M_m . Es sind also O und M Punkte der Symmetrie T^h , M_m aber ein Punkt der Symmetrie C_3^i . Bei $\mathfrak{I}_h^6$ und $\mathfrak{I}_h^7$ bedingt das erzeugende Symmetriezentrum nur Punkte der Symmetrie C_3^i , und zwar bei $\mathfrak{I}_h^6$ nur in O und M , bei $\mathfrak{I}_h^7$ auch in M_m .

2. Es gibt sieben Gruppen der Symmetrie T^h ; drei mit dem Gitter Γ_c , zwei mit Γ_c' und zwei mit Γ_c'' .

§ 4. Die Gruppen der Symmetrie T^a . Die Punktgruppe

$$T^a = \{T, \mathfrak{S}_a'\}$$

entsteht aus T mittels der Operation $\mathfrak{S}_d'$; ihre Ebene ist die Diagonalebene δ des Würfels, die den Winkel der positiven x - und y -Achse halbiert und zwei dreizählige Achsen der Tetraedergruppe enthält. Sie erzeugt mit der in T enthaltenen Gruppe V eine Gruppe V^d (S. 87) und mit der zur Diagonale d gehörigen Untergruppe C_3 eine Gruppe C_3^v . Die zu $\mathfrak{S}_d'$ isomorphe Operation $\mathfrak{S}_d(\tau)$, mit der die Gruppen $\mathfrak{T}_d$ zu bilden sind, hat daher wieder *zwei* Bedingungen zu genügen. Sie muß mit der in $\mathfrak{T}$ vorhandenen Gruppe $\mathfrak{B}$ eine Gruppe $\mathfrak{B}_d$ erzeugen — gewisse zweizählige Drehungsachsen der Gruppen $\mathfrak{T}$ werden so bei den Gruppen $\mathfrak{T}_d$ vierzählige Achsen zweiter Art — und mit der in $\mathfrak{T}$ vorhandenen Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ eine Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}$. Die Gruppen $\mathfrak{C}_{3v}$ ließen sich so ableiten, daß die erzeugende Ebene durch eine dreizählige Drehungsachse ging (S. 357); das gleiche trifft daher auch hier zu. Wir können also die Ebene der erzeugenden Operation $\mathfrak{S}_d(\tau)$ *stets durch die Achse d selbst legen*. Als erzeugende Ebene der Gruppe $\mathfrak{B}_d$ steht sie außerdem auf der Grundebene γ senkrecht, und damit ist sie die Diagonalebene δ des Würfels und enthält noch eine zweite dreizählige Achse d_1 . Nun ergaben sich aus der Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{C}_{3v}$, nämlich $\mathfrak{C}_{3v}^5$ und $\mathfrak{C}_{3v}^6$, den Operationen $\mathfrak{S}_d$ und $\mathfrak{S}_d(\tau_z)$ entsprechend. Die analogen Operationen können also auch hier als erzeugende Operationen auftreten. Wir wollen sie sowohl durch

3) $\mathfrak{S}_d$ und $\mathfrak{S}_d(\tau)$, wie durch $\mathfrak{S}_\delta$ und $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$

bezeichnen, und zwar entspricht τ der in Kap. XVI, § 7 auftretenden Translation τ_z und ist stets die *halbe in die Achse d fallende primitive Translation* des bezüglichen Gitters. Die Symmetrieebene, die senkrecht zur Ebene δ durch die vertikale Mittellinie des Würfels W oder w geht und ebenfalls zwei dreizählige Achsen d_2 und d_3 enthält, ist in den Figuren durch δ_1 bezeichnet worden.

Gruppen $\mathfrak{B}_d$ entstehen gemäß Kap. XVI, § 7 nicht aus $\mathfrak{B}^4$, wohl aber aus $\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^7, \mathfrak{B}^8, \mathfrak{B}^9$, es können daher Gruppen $\mathfrak{T}_d$ nur aus $\mathfrak{T}^1, \mathfrak{T}^2, \mathfrak{T}^3, \mathfrak{T}^5$ gebildet werden.

Benutzen wir zunächst $\mathfrak{S}_\delta$ als erzeugende Operation, so ist $\mathfrak{C}_{3v}^5$ die zugehörige Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}$ (Kap. XV, § 4). Aus den

in $\mathfrak{I}^1$, $\mathfrak{I}^2$, $\mathfrak{I}^3$ vorhandenen Gruppen $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^7$, $\mathfrak{B}^8$ ergeben sich (S. 393 ff) mit $\mathfrak{S}_\delta$ die Gruppen $\mathfrak{B}_a^1$, $\mathfrak{B}_a^9$, $\mathfrak{B}_a^{11}$, dagegen läßt sich aus der Gruppe $\mathfrak{B}^9$, die in $\mathfrak{I}^5$ als Untergruppe auftritt, eine Gruppe $\mathfrak{B}_a$ mittels $\mathfrak{S}_\delta$ selbst nicht ableiten. Wir erhalten also mit $\mathfrak{S}_\delta$ nur drei Gruppen $\mathfrak{I}_a$; nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_a^1 &= \{\mathfrak{I}^1, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_c\}; \mathfrak{B}_a^1; \mathfrak{C}_{3v}^5 \\ \mathfrak{I}_a^2 &= \{\mathfrak{I}^2, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_c'\}; \mathfrak{B}_a^9; \mathfrak{C}_{3v}^5 \\ \mathfrak{I}_a^3 &= \{\mathfrak{I}^3, \mathfrak{S}_\delta; \Gamma_c''\}; \mathfrak{B}_a^{11}; \mathfrak{C}_{3v}^5.\end{aligned}$$

Die Eigenart der Achsenfiguren ist durch die Figuren 233 und 234, sowie durch die Untergruppen $\mathfrak{B}_a$ und $\mathfrak{C}_{3v}$ kenntlich gemacht; Figur 233 entspricht der Gruppe $\mathfrak{I}_a^1$ und $\mathfrak{I}_a^3$ und Figur 234

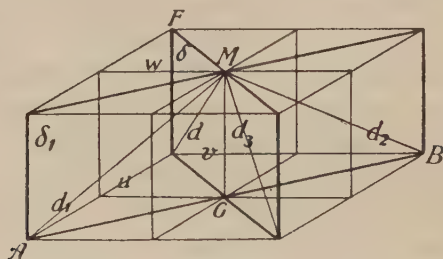


Fig. 233

der Gruppe $\mathfrak{I}_a^2$. In jeder Gruppe $\mathfrak{I}_a$ treten drei solcher Untergruppen auf, jeder der drei Richtungen τ_x , τ_y , τ_z entspricht je eine¹⁾.

Wir haben nun $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$ als erzeugende Operation zu verwenden. Zunächst sei bemerkt, daß sich aus $\mathfrak{C}_3^4$ mittels $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$ die Gruppe $\mathfrak{C}_{3v}^6$ einstellt. Weiter ist zu untersuchen, welche der hier in Betracht kommenden Gruppen $\mathfrak{B}$ die erzeugende Operation $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$ zulassen. Die Gruppen $\mathfrak{I}^1$ und $\mathfrak{I}^2$ besitzen Γ_c und Γ_c' als Gitter; bei ihnen hat τ den Wert $2\tau_d = \tau_x + \tau_y + \tau_z$, und in der Tat ist die so bestimmte Operation $\mathfrak{S}_\delta(\tau)$ eine Deckoperation für die in $\mathfrak{I}^1$ und $\mathfrak{I}^2$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^7$; sie bestimmen mit ihnen nach Kap. XVI,

¹⁾ Die Ebenen δ und δ_1 enthalten je zwei der vier Diagonalen d , d_1 , d_2 , d_3 .

§ 7 die Gruppen $\mathfrak{B}_d^2$ und $\mathfrak{B}_d^{10\ 1)}$. Die Gruppen $\mathfrak{T}^3$ und $\mathfrak{T}^5$ besitzen beide das Gitter Γ_c'' ; bei ihnen ist daher bereits τ_d eine halbe Translation. Die so definierte Operation $\mathfrak{S}_d(\tau)$ bildet jedoch keine Deckoperation für die in $\mathfrak{T}^3$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{B}^8$ (S. 321), wohl aber für die Gruppe $\mathfrak{B}^9$; sie bildet mit ihr die Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$. Wir gelangen so zu den drei Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_d^4 &= \{\mathfrak{T}^1, \mathfrak{S}_d(\tau); \Gamma_c\} \quad \tau = 2\tau_d; \mathfrak{B}_d^2; \mathfrak{C}_{3v}^6 \\ \mathfrak{T}_d^5 &= \{\mathfrak{T}^2, \mathfrak{S}_d(\tau); \Gamma_c'\} \quad \tau = 2\tau_d; \mathfrak{B}_d^{10}; \mathfrak{C}_{3v}^6 \\ \mathfrak{T}_d^6 &= \{\mathfrak{T}^5, \mathfrak{S}_d(\tau); \Gamma_c''\} \quad \tau = \tau_d; \mathfrak{B}_d^{12}; \mathfrak{C}_{3v}^6.\end{aligned}$$

Eine besondere Achsenfigur ist nur für die Gruppe $\mathfrak{T}_d^6$ gezeichnet worden (Fig. 235), um die in ihr auftretenden vier-

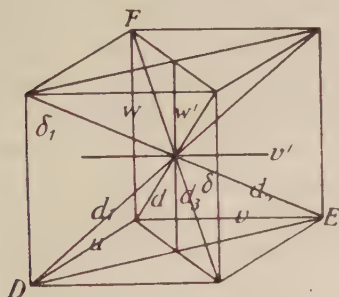


Fig. 234

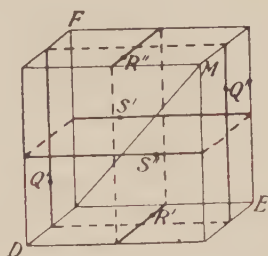


Fig. 235

zähligen Achsen zweiter Art, sowie die auf ihnen vorhandenen festen Punkte kenntlich zu machen (vgl. S. 489); für die Gruppen $\mathfrak{T}_d^4$ und $\mathfrak{T}_d^5$ läßt sich die Lage dieser Punkte unmittelbar aus der Tabelle B von S. 424 entnehmen.

3. *Es gibt sechs Gruppen der Symmetrie T^d ; je zwei mit den Gittern Γ_c , Γ_c' , Γ_c'' .*

§ 5. **Vorbemerkungen über die Gruppen der Symmetrie O .** Die Oktaedergruppe O entsteht aus der Tetraedergruppe T gemäß einer Gleichung (Kap. V, § 8)

$$O = \{T, U'\};$$

1) In der Gleichung für $\mathfrak{B}_d^2$ tritt $\mathfrak{S}_d(\tau_x - \tau_y + \tau_z)$ auf, was aber mit $\mathfrak{S}_d(\tau_x + \tau_y + \tau_z)$ gleichwertig ist. In $\mathfrak{B}_d^{10}$ tritt $\mathfrak{S}_d(\tau_s)$ auf; da aber $\tau_x + \tau_y$ eine Translation für die Gruppe $\mathfrak{T}_2$ ist, so ist auch für sie $\mathfrak{S}_d(\tau_s)$ mit $\mathfrak{S}_d(\tau_x + \tau_y + \tau_s)$ gleichwertig.

die Achse u' war (S. 103) so gewählt, daß sie die Winkel des zweiten und vierten Quadranten halbiert, und damit auf der dreizähligen Achse d senkrecht steht. Wie in Kap. V gezeigt ist, führt die Umwendung U' die Tetraedergruppe T in sich über und zwar so, daß sie auch die zu ihr senkrechte Achse d in sich überführt und mit ihr eine Gruppe D_3 erzeugt; außerdem führt sie auch die in T enthaltene Vierergruppe V in sich über und bestimmt mit ihr eine Gruppe D_4 . Die isomorphen Bedingungen, die sich für die erzeugende Operation $U(\tau)$ der Gruppen $\mathfrak{D}$ einstellen, sind daher die beiden folgenden. Sie muß erstens eine Deckoperation für die zu d parallele Achsenschaar der Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ sein und mit ihr eine Gruppe $\mathfrak{D}_3$ erzeugen, zweitens auch eine Deckoperation für die in der Gruppe $\mathfrak{T}$ vorhandene Gruppe $\mathfrak{B}$ und mit ihr eine Gruppe $\mathfrak{D}_4$ erzeugen. Aus der Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$ ließ sich in Kap. XV, § 5 nur die eine Gruppe $\mathfrak{D}_3^7$ ableiten; wir erkennen so bereits, daß jede in den Gruppen $\mathfrak{D}$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{D}_3$ eine Gruppe $\mathfrak{D}_3^7$ ist. Nun war die erzeugende Operation dieser Gruppen $\mathfrak{D}_3^7$ eine Umwendung, die die Drehungsachse a schneidet, demgemäß können wir als erzeugende Operation $U(\tau)$ hier eine Umwendung benutzen, die die Achse d schneidet. Es sind nur noch die Punkte zu bestimmen, die Schnittpunkte der erzeugenden Achse u mit der Achse d der Gruppen $\mathfrak{T}$ sein können; sie hängen von der in ihnen enthaltenen Gruppe $\mathfrak{B}$, sowie von der Art des Gitters ab. Vier solche Punkte kommen in Frage, nämlich O , M_m , M_m' , M_m'' ; die durch sie gehenden Achsen und die zugehörigen Umwendungen sollen durch

$$4) \quad u, u_m, u_m', u_m'', U, U_m, U_m', U_m''$$

bezeichnet werden. Geht eine dieser erzeugenden Achsen u durch einen solchen Punkt der Achse d , in dem sich drei senkrechte Achsen einer Gruppe $\mathfrak{B}$ schneiden, wie es bei $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^7$, $\mathfrak{B}^8$ der Fall ist, so stellt sich für diesen Punkt die Eigensymmetrie der Punktgruppe O ein und es treten in ihm sechs solche gleichberechtigte Achsen u auf, wie es Fig. 22a (S. 58) zeigt. Geht aber die Achse u durch einen Punkt von d , durch den sonst keine weitere Achse läuft, so stellen sich nur drei solche Achsen u

ein und bilden mit d die Eigensymmetrie der Gruppe D_3 für diesen Punkt; wir werden dem z. B. bei der Gruppe $\mathfrak{D}^2$ begegnen (Fig. 237).

Wir erwähnten schon, daß die erzeugende Operation u aus der in der Gruppe $\mathfrak{T}$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{B}$ eine Gruppe $\mathfrak{D}_4$ entstehen läßt; diese ist von besonderer Wichtigkeit. *Ihre Achsenfigur bestimmt zugleich die Achsenfigur der Gruppe $\mathfrak{D}$, ebenso sind durch ihre Eigensymmetrien die Eigensymmetrien der Gruppe $\mathfrak{D}$ bestimmt*; entweder nämlich erhöhen sie sich in der Gruppe $\mathfrak{D}$, wie es die zu $\mathfrak{D}_4$ hinzutretende dreizählige Achse mit sich bringt, oder aber sie dehnen sich zyklisch über die Achsenfigur aus. Wir nehmen daher die Untergruppen $\mathfrak{D}_4$ in die definierenden Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{D}$ auf. Sie ergeben sich in sehr einfacher Weise aus den definierenden Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{D}_4$. Diese Gleichungen enthalten die in den Gruppen $\mathfrak{D}_4$ vorhandenen Gruppen $\mathfrak{B}$; *wir werden mit ihnen umgekehrt von der Gruppe $\mathfrak{B}$, aus der wir die Gruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{D}$ entstehen lassen, unmittelbar auf die gesuchten Gruppen $\mathfrak{D}_4$ zurück-schließen*. Übrigens treten in jeder Gruppe $\mathfrak{D}$ drei gleichwertige Gruppen $\mathfrak{D}_4$ auf, den drei Richtungen τ_x, τ_y, τ_z entsprechend.

Für die Zeichnung der Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{D}$ legen wir die Figuren der Gruppen $\mathfrak{T}$ und die erzeugende Operation u zugrunde; außerdem soll ein Teil der Achsen der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ in sie eingezeichnet werden. Insbesondere sollen die Figuren erkennen lassen, in welcher Weise die Achsen u, v, w der Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{T}$ vierzählig werden und in die Achsen a, b, c der Gruppen $\mathfrak{D}_4$ übergehen. Die Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{D}$ erhalten daher wieder die Bezeichnung a, b, c der Gruppen $\mathfrak{D}_4$. Die Punkte, deren Eigensymmetrie später vorwiegend in Betracht kommt, sind die von Figur 230 und 231 (S. 463).

§ 6. Die Gruppen der Symmetrie $\mathbf{O}$. Bei der Gruppe $\mathfrak{T}^1$ mit der Untergruppe $\mathfrak{B}^1$ stellt die Achse u nur dann eine Deckoperation dar, wenn sie durch die Punkte O oder M_m der Achsenfigur 140 (S. 317) geht, also die Achse u oder u_m ist.

Da OM_m keine halbe Translation von $\mathfrak{T}^1$ ist, so sind die so erzeugbaren Gruppen verschieden; es sind die Gruppen

$$\mathfrak{D}^1 = \{\mathfrak{T}^1, u; I_c\}; \mathfrak{D}_4^1, \quad \mathfrak{D}^2 = \{\mathfrak{T}^1, u_m; I_c'\}; \mathfrak{D}_4^5.$$

Die hier auftretenden Gruppen $\mathfrak{D}_4^1$ und $\mathfrak{D}_4^5$ ergeben sich folgendermaßen. In der Gruppe $\mathfrak{T}^1$ tritt $\mathfrak{B}^1$ als Untergruppe auf, die in $\mathfrak{D}^1$ und $\mathfrak{D}^2$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{D}_4$ können daher nur solche Gruppen $\mathfrak{D}_4$ sein, deren definierende Gleichungen die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ enthalten. Das sind (S. 402) die Gruppen $\mathfrak{D}_4^1$ und $\mathfrak{D}_4^5$. Ihre Achsenfiguren 210 und 212a zeigen, daß in $\mathfrak{D}_4^1$ eine Umwendung vorhanden ist, die mit ll gleichwertig ist, und in $\mathfrak{D}_4^5$ wieder eine mit ll_m gleichwertige; damit sind $\mathfrak{D}_4^1$ und $\mathfrak{D}_4^5$ als die Gruppen nachgewiesen, die in $\mathfrak{D}^1$ und $\mathfrak{D}^2$ vorhanden sind (Fig. 236 und 237)¹⁾.

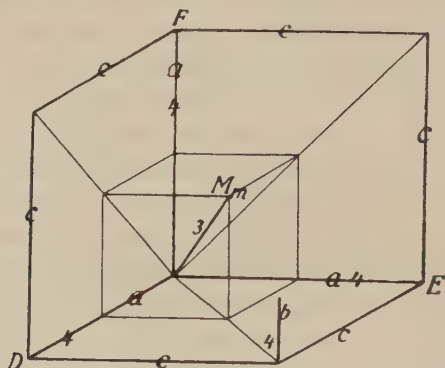


Fig. 236

Die Schlüsse, die sich in § 3 für die Gruppe $\mathfrak{T}^2$ und ihre erzeugenden Inversionen ergaben, übertragen sich unmittelbar auf die erzeugenden Umwendungen. Die erzeugende Umwendungsachse kann sowohl durch O wie durch M_m gehen, ebenso durch die Mitten M_m' und M_m'' von OM_m und M_mM ; auch hier folgt aber, daß die Achsen u und u_m , ebenso u_m' und u_m'' dieselbe Gruppe liefern. Wir erhalten also insgesamt nur zwei verschiedene Gruppen; wir erzeugen sie mit der Achse u durch O und mit der Achse u_m' durch M_m' . Sie sind

$$\mathfrak{D}^8 = \{\mathfrak{T}^2, ll; F_c'\}; \mathfrak{D}_4^9, \quad \mathfrak{D}^4 = \{\mathfrak{T}^2, ll_m'; F_c'\}; \mathfrak{D}_4^{10}.$$

¹⁾ Die vollen Achsenfiguren sind nicht darstellbar; sie würden sich ergeben, wenn man in die Gruppe $\mathfrak{B}^1$ die Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{D}_4^1$ und $\mathfrak{D}_4^5$ einträgt und sie dann noch zyklisch wiederholt.

Die in diesen Gleichungen enthaltenen Gruppen $\mathfrak{D}_4$ ergeben sich folgendermaßen. In die Gruppe $\mathfrak{T}^2$ geht $\mathfrak{B}^7$ als Untergruppe ein; diese Gruppe erscheint in Kap. XVI, § 10 nur bei $\mathfrak{D}_4^9$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$ als Untergruppe, es müssen daher $\mathfrak{D}_4^9$

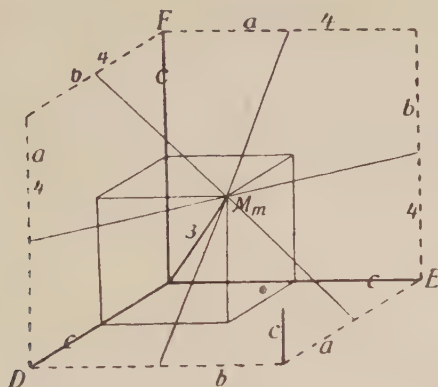


Fig. 237

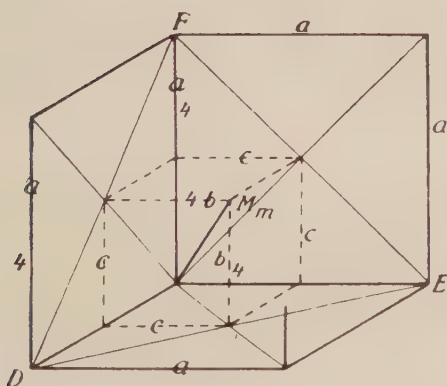


Fig. 238

oder $\mathfrak{D}_4^{10}$ in den Gleichungen für $\mathfrak{D}^3$ und $\mathfrak{D}^4$ auftreten, Die Gruppe $\mathfrak{B}^7$ spielt bei den Gruppen $\mathfrak{D}_4^9$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$ die Rolle der Gruppe $\mathfrak{B}_{de}$, wir haben daher die Figuren 216a und 217 zum Vergleich heranzuziehen; also diejenigen, in denen Γ'_q als flächenzentriert erscheint, wie es auch dem flächenzentrierten Gitter Γ'_c

von $\mathfrak{I}_2$ entspricht. Wir erkennen wieder leicht, daß eine Achse u , wie sie in $\mathfrak{D}^3$ auftritt, in Figur 216a vorhanden ist, und eine Achse u_m' , wie sie in $\mathfrak{D}^4$ erscheint, in der Figur 217; genau, wie es den Achsenfiguren 238 und 239 entspricht.

Was wir in § 3 über die Symmetriezentra ableiteten, überträgt sich auf die Achsen. Bei $\mathfrak{D}^3$ geht durch den Punkt M_m keine zweizählige Achse, sondern erst durch M ; ebensowenig geht bei der Gruppe $\mathfrak{D}^4$ eine zweizählige Achse durch M_m'' (Fig. 238 und 239). Bei ihr enthalten nur vier der kleineren Oktanten w' , in die der Würfel w zerfällt, eine Achse u_m , und zwar die-

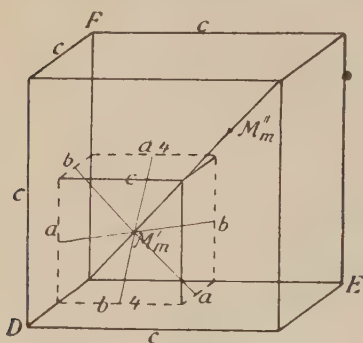


Fig. 239

selben, die ein Symmetriezentrum der Gruppe $\mathfrak{I}_h^4$ enthalten; es sind (§ 3) diejenigen, die mit w' eine Kante gemein haben, die übrigen vier bleiben leer (Fig. 238).

Die Gruppe $\mathfrak{I}^3$ enthält die Gruppe $\mathfrak{B}^8$ und das Gitter Γ_c'' , daher ist OM_m eine halbe Translation und die mit u und u_m erzeugten Gruppen sind identisch; wir erhalten nur die eine Gruppe.

$$\mathfrak{D}^5 = \{\mathfrak{I}^3, u; \Gamma_c'\} = \{\mathfrak{I}^3, u_m\}; \mathfrak{D}_4^9.$$

Es geht also sowohl durch O , wie durch M_m eine zweizählige Achse. Da in $\mathfrak{I}^3$ die Gruppe $\mathfrak{B}^8$ enthalten ist, so kann die Gruppe $\mathfrak{D}_4$ nach Kap. XVI, § 10 nur $\mathfrak{D}_4^9$ sein (Fig. 240).

Bei den Gruppen $\mathfrak{I}^4$ und $\mathfrak{I}^5$ kann die erzeugende Operation u weder durch O noch durch M_m gehen; sie stellt in dieser Lage keine Deckbewegung für die Achsen der in $\mathfrak{I}^4$ und $\mathfrak{I}^5$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{B}^4$ und $\mathfrak{B}^9$ dar (Fig. 143 und 145). Wohl aber erhält sie den Charakter einer Deckoperation, wenn sie durch M_m' gelegt wird. In der Tat führt sie in dieser Lage die Achsen w einer jeden der beiden Achsenfiguren in sich über, während die Achsen u und v sich gegenseitig vertauschen. Bei der Gruppe $\mathfrak{I}^4$ wird (Fig. 241) der Oktant w nur von

einer solchen Achse durchsetzt, bei der Gruppe $\mathfrak{T}^5$ sind es zwei; bedingt durch die in $\mathfrak{T}^5$ enthaltene Translation $2\tau_a$. Die zweite Achse geht durch M_m'' (Fig. 242).

Die Untergruppen $\mathfrak{D}_4$ bestimmen sich folgendermaßen. Die Gruppe $\mathfrak{B}^4$ ist nach S. 402 nur in $\mathfrak{D}_4^4$ und $\mathfrak{D}_4^8$ als Untergruppe enthalten. Diese beiden Gruppen unterscheiden sich aber nur durch den Windungssinn ihrer Schraubenachsen; die beiden ihnen entsprechenden Gruppen $\mathfrak{D}$ existieren also zugleich und sind ebenfalls Gruppen von entgegengesetztem Windungssinn. Um aber der zweiten Gruppe diesen Windungssinn aufzuprägen,

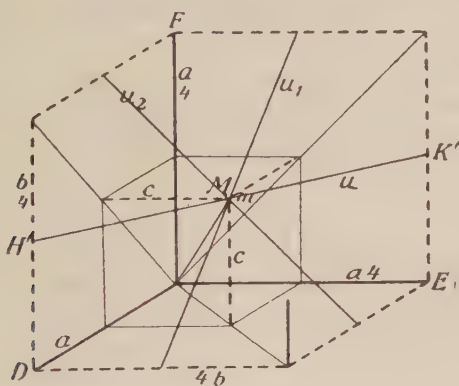


Fig. 240

ist bei ihr die erzeugende Achse durch den Punkt M_m'' zu legen. So ergeben sich die beiden Gruppen

$$\mathfrak{D}^6 = \{\mathfrak{T}^4, u_m'; \Gamma_c\}; \mathfrak{D}_4^4, \quad \mathfrak{D}^7 = \{\mathfrak{T}^4, u_m''; \Gamma_c\}; \mathfrak{D}_4^8.$$

Die Gruppe $\mathfrak{T}^5$ entspringt aus der Gruppe $\mathfrak{B}^9$; daher stellt sich nach S. 407 notwendig die Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ als Untergruppe ein. Wir gelangen so zur Gruppe

$$\mathfrak{D}^8 = \{\mathfrak{T}^5, u_m'; \Gamma_c''\} = \{\mathfrak{T}^5, u_m''\}; \mathfrak{D}_4^{10}.$$

Da der Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ entgegengesetzte Schraubenachsen angehören, so gilt dies auch von $\mathfrak{D}^{81}$.

¹⁾ Die Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ tritt in den beiden kubischen Gruppen $\mathfrak{D}^4$ und $\mathfrak{D}^8$ in wesentlich verschiedener Bedeutung auf, in $\mathfrak{D}^4$ bezogen auf ein flächenzentriertes Gitter, in $\mathfrak{D}^8$ auf ein körperzentriertes. Dies wird besonders durchsichtig, wenn wir die beiden Gruppen durch Einfügung

Gemäß der Eigenart der Gruppen $\mathfrak{D}_4^4$, $\mathfrak{D}_4^8$, $\mathfrak{D}_4^{10}$ sind in den drei Gruppen $\mathfrak{D}^6$, $\mathfrak{D}^7$, $\mathfrak{D}^8$ vierzählige Schraubenachsen enthalten, die auch als zweizählige Achsen Schraubenachsen sind; welche Achsen der Gruppen $\mathfrak{B}^4$ und $\mathfrak{B}^9$ vierzählig werden, geht aus den Figuren der genannten Gruppen $\mathfrak{D}_4$ hervor. Die Figur 214 von $\mathfrak{D}_4^4$ zeigt, daß es diejenigen Achsen w der Gruppe $\mathfrak{B}^4$ sind, die *nicht* von der erzeugenden Achse u geschnitten werden, und dies überträgt sich zyklisch auf die andern Achsenschaaren von $\mathfrak{B}^4$. Jeder Oktant w enthält bei den Gruppen $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$ nur eine *einzig* Achse u derselben Richtung (Fig. 241). Bei der Gruppe $\mathfrak{D}^8$ werden zwei Teiloktanten

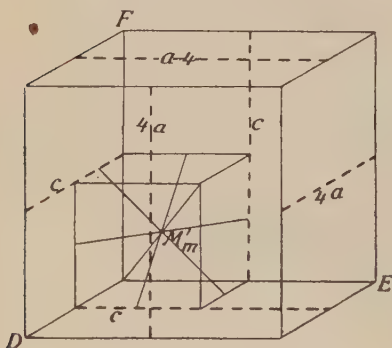


Fig. 241

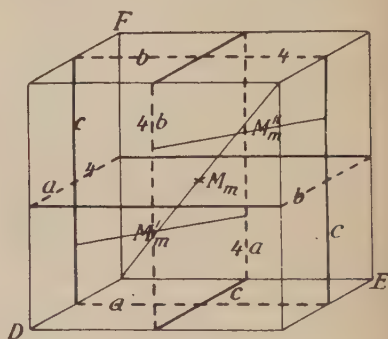


Fig. 242

von w von Achsen u derselben Richtung durchzogen, sie gehen durch die Punkte M_m' und M_m'' (Fig. 242 und 243¹⁾). Hier sind

der dreizähligen Achsen in die Achsenschaar von $\mathfrak{D}_4^{10}$ entstehen lassen. Wird die Achse in die Achsenfigur 217 als Diagonale OM eingefügt, so entsteht die Gruppe $\mathfrak{D}^4$, wird sie in Figur 217a als Diagonale OM eingefügt, so entsteht die Gruppe $\mathfrak{D}^8$. Im ersten Fall ergeben sich dreizählige Achsen, die sich schneiden, im zweiten Fall nur windschiefe. Die Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ besitzt also auf *zwei verschiedene* Arten eine dreizählige Symmetrie; sie steht insofern einzig da. Daß eine Achsenfigur eine und dieselbe Operation, z. B. die Inversion, auf mehrere Weisen zuläßt, kommt übrigens auch sonst vor.

¹⁾ Die eine Figur zeigt die Lage der erzeugenden Achsen u in den Teiloktanten von w , die andere die Einordnung der drei Achsen verschiedener Richtung in die Achsenfigur von $\mathfrak{B}^9$ für den Oktanten w' . Die obere Fläche von w ist in Figur 243 nicht gezeichnet.

es, wie die Figuren von $\mathfrak{B}^9$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$ zeigen, die Schraubenachsen von $\mathfrak{B}^9$, die in die vierzähligen Achsen a und b der Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ übergehen; die durch M_m' gehende Achse u trifft außer der Achse c eine Achse a , die durch M_m'' gehende außer c eine Achse b (Fig. 242).

4. Es gibt acht Raumgruppen der Symmetrie O : vier mit dem Gitter Γ_c und je zwei mit Γ_c' und Γ_c'' .

§ 7. Die Gruppen der Symmetrie O^h . Die Gruppe O^h erfüllt das Bildungsgesetz

$$O^h = \{O, \mathfrak{S}_h'\} = \{O, \mathfrak{S}'\};$$

die Raumgruppen $\mathfrak{D}_h$ können daher mit einer Inversion $\mathfrak{S}$ erzeugt werden. Zwei Bedingungen muß sie genügen. Wir entnehmen sie den Eigenschaften der Punktgruppe O . Die Inversion, die aus O die Gruppe O^h entstehen läßt, führt sowohl ihre Untergruppe T in sich über, wie auch die Gruppe D_3 , die aus der Achse d und den drei zu ihr senkrechten Achsen u besteht; gehen diese

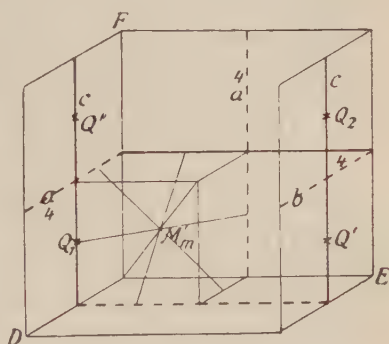


Fig. 243

Achsen in sich über, so tun es alle. Die isomorphen Bedingungen für die Gruppen $\mathfrak{D}$ lauten, daß die erzeugende Inversion eine *Deckoperation* erstens für die Gruppe $\mathfrak{T}$ ist, aus der die Gruppe $\mathfrak{D}$ erzeugt wurde, und mit ihr also eine Gruppe $\mathfrak{T}_h$ erzeugt, und zweitens auch für die zur Punktgruppe D_3 isomorphe Untergruppe von $\mathfrak{D}$, und das ist in allen Fällen die Gruppe $\mathfrak{D}_3$. Jede Lage des Symmetriezentrums, die diesen beiden Bedingungen genügt, führt zu einer Gruppe $\mathfrak{D}_h$. Mit der in der Gruppe $\mathfrak{D}$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{D}_4$ bestimmt das Symmetriezentrum eine Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}$; welche es ist, ergibt sich unmittelbar aus Kap. XVII, § 11. Sie läßt in der gleichen Weise die Eigensymmetrien der Gruppen $\mathfrak{D}_h$ erkennen, wie es die Gruppen $\mathfrak{D}_4$ für die Gruppen $\mathfrak{D}$ leisten. Ebenso bestimmt

die erzeugende Inversion mit der in den Gruppen $\mathfrak{D}$ enthaltenen Untergruppe $\mathfrak{D}_3^7$ eine Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ oder $\mathfrak{D}_{3d}^6$; sie lehrt wiederum die auf der Achse d vorhandenen Punkte mit Eigensymmetrie. Diese beiden Gruppen werden wir daher in die definierenden Gleichungen aufnehmen.

Die Gruppe $\mathfrak{D}^1$ (Fig. 236) enthält $\mathfrak{T}^1$ als Untergruppe; diese gestattet zwei Lagen des erzeugenden Symmetriezentrums, nämlich O und M_m ; beide sind es auch für die in $\mathfrak{D}^1$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{D}_3^7$. Die Inversion $\mathfrak{I}$ läßt aus $\mathfrak{T}^1$ die Gruppe $\mathfrak{T}_h^1$ entstehen, die in α, β, γ Symmetrieebenen besitzt. Durch die Inversion $\mathfrak{I}_m$ entsteht aus $\mathfrak{T}^1$ die Gruppe $\mathfrak{T}_h^2$, in der reine Symmetrieebenen nicht auftreten. Aus der Gruppe $\mathfrak{D}_4^1$ gehen (S. 411) durch $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_m$ die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^1$ und $\mathfrak{D}_{4h}^4$ hervor. Wir erhalten so die beiden Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_h^1 &= \{\mathfrak{D}^1, \mathfrak{I}; \Gamma_c\} = \{\mathfrak{D}^1, \mathfrak{C}_h\}; \mathfrak{D}_{4h}^1; \mathfrak{D}_{3d}^5 \\ \mathfrak{D}_h^2 &= \{\mathfrak{D}^1, \mathfrak{I}_m; \Gamma_c\}; \mathfrak{D}_{4h}^4; \mathfrak{D}_{3d}^6.\end{aligned}$$

Die Gruppe $\mathfrak{D}^2$ (Fig. 237) enthält ebenfalls $\mathfrak{T}^1$ als Untergruppe; auch für sie sind $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_m$ zulässige Inversionen. Sie bedingen mit $\mathfrak{T}^1$ wieder die beiden Gruppen $\mathfrak{T}_h^1$ und $\mathfrak{T}_h^2$. Da die erzeugende Umwendungsachse von $\mathfrak{D}^2$ durch M_m geht, so stellen sich, wenn $\mathfrak{I}$ die erzeugende Inversion ist, im Punkt O nur die Symmetrieelemente von $\mathfrak{T}_h^1$ ein, insbesondere also α, β, γ als Symmetrieebenen. Ist $\mathfrak{I}_m$ die erzeugende Inversion, so daß aus $\mathfrak{T}^1$ die Gruppe $\mathfrak{T}_h^2$ entsteht, so treten in O keine Symmetrieebenen auf. Dagegen erzeugt das Symmetriezentrum M_m mit u_m und der Achse d die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$. Damit kommen der mit $\mathfrak{I}_m$ erzeugten Gruppe die Diagonalebenen des Würfels als Symmetrieebenen zu. Aus der Gruppe $\mathfrak{D}_4^5$, die in $\mathfrak{D}^2$ als Untergruppe enthalten ist, lassen die Inversionen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_m$ (S. 413) die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^9$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$ hervorgehen, und zwar haben wir, dem Bau der Gruppe $\mathfrak{D}^2$ entsprechend, die Figur 212a in Betracht zu ziehen. Wir erhalten so die beiden Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_h^3 &= \{\mathfrak{D}^2, \mathfrak{I}; \Gamma_c\} = \{\mathfrak{D}^2, \mathfrak{C}_h\}; \mathfrak{D}_{4h}^9; \mathfrak{D}_{3d}^6 \\ \mathfrak{D}_h^4 &= \{\mathfrak{D}^2, \mathfrak{I}_m; \Gamma_c\} = \{\mathfrak{D}^2, \mathfrak{C}_d\}; \mathfrak{D}_{4h}^{12}; \mathfrak{D}_{3d}^5.\end{aligned}$$

Die Gruppen $\mathfrak{D}^3$ und $\mathfrak{D}^4$ bedürfen wieder einer eingehenden Erörterung. Beide enthalten die Untergruppe $\mathfrak{T}^2$. Bei

der Gruppe $\mathfrak{T}^2$ erkannten wir in § 3 an sich vier mögliche Lagen des erzeugenden Symmetriezentrums; einerseits O und M und andererseits M_m' und M_m'' . Je zwei von ihnen erzeugten *dieselbe* Gruppe $\mathfrak{T}_h$; die ersten beiden $\mathfrak{T}_h^3$ und die letzten beiden $\mathfrak{T}_h^4$. Hier ist es anders. *Die beiden Punkte eines jeden Punktpaares haben nämlich inzwischen ihre geometrische Gleichwertigkeit für die Achsenfigur eingebüßt*, wie es auch schon bei den Gruppen $\mathfrak{D}_4$ der Fall war, und deshalb sind die beiden Gruppen, die sich mit den Inversionen an den beiden Punkten eines jeden Punktpaares erzeugen lassen, wieder verschieden. Bei $\mathfrak{D}^3$ (Fig. 238) geht eine Achse u *nur* durch O , aber *nicht* durch M_m und bei $\mathfrak{D}^4$ *nur* durch M_m' und *nicht* durch M_m'' . Daher liefert uns jeder dieser vier Punkte als Inversionszentrum je eine besondere Gruppe. Ist O das erzeugende Zentrum, so stellen sich in O die Symmetrieebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ein; ist es M_m , so werden die durch M_m gehenden Mittelebenen λ, μ, ν zu Symmetrieebenen. Aus der in $\mathfrak{D}^3$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{D}_4^9$ ergeben sich $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$ als die Gruppen, die den erzeugenden Inversionen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_m$ entsprechen. Wir erhalten so, wenn $\mathfrak{S}_\nu$ die Spiegelung an der Ebene ν ist, die beiden Gruppen

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_h^5 &= \{\mathfrak{D}^3, \mathfrak{I}; \Gamma_c'\} = \{\mathfrak{D}^3, \mathfrak{S}_h\}; \mathfrak{D}_{4h}^{17}; \mathfrak{D}_{3d}^5 \\ \mathfrak{D}_h^6 &= \{\mathfrak{D}^3, \mathfrak{I}_m; \Gamma_c'\} = \{\mathfrak{D}^3, \mathfrak{S}_\nu\}; \mathfrak{D}_{4h}^{18}; \mathfrak{D}_{3d}^6\end{aligned}$$

und zwar haben wir für die Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$ das Gitter als flächenzentriert vorauszusetzen, also an die Figur 216a von $\mathfrak{D}_4^9$ anzuknüpfen.

Für die aus $\mathfrak{D}^4$ (Fig. 239) entstehenden Gruppen gilt folgendes. Sei zunächst M_m' das erzeugende Symmetriezentrum. Da der Punkt M_m' für $\mathfrak{D}^4$ die Symmetrie D_3 besitzt, so bildet sich in M_m' die Eigensymmetrie D_{3d} aus; es stellen sich also die drei Diagonalebene durch die Achse d als Symmetrieebenen ein. In Übereinstimmung mit den Resultaten von § 3 (S. 468) enthalten nur vier der acht Teiloktanten des Würfels w ein Symmetriezentrum und damit einen Punkt D_{3d} ; in den übrigen vier Oktanten hat der Mittelpunkt nur die Eigensymmetrie C_3^v . Aus der in $\mathfrak{D}^4$ enthaltenen Untergruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ läßt

die Inversion $\mathfrak{S}_m'$ die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$ hervorgehen; aus $\mathfrak{D}_3^7$ läßt sie $\mathfrak{D}_{3d}^5$ entstehen, und so erhalten wir die Gruppe

$$\mathfrak{D}_h^7 = \{\mathfrak{D}_4, \mathfrak{S}_m'; \Gamma_c'\} = \{\mathfrak{D}_4, \mathfrak{S}_d\}; \mathfrak{D}_{4h}^{19}; \mathfrak{D}_{3d}^5.$$

Ist zweitens M_m'' das erzeugende Symmetriezentrum, so bedingt es in M_m'' nur die Symmetrie der Gruppe C_3^i ; dem Punkt M_m' bleibt die Eigensymmetrie D_3 , die er bei $\mathfrak{D}^4$ selbst hat. Symmetrieebenen werden durch dieses Symmetriezentrum nicht veranlaßt. Aus $\mathfrak{D}_4^{10}$ geht durch die Inversion $\mathfrak{S}_m''$ die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ hervor; aus $\mathfrak{D}_3^7$ die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^6$. Die so bestimmte Gruppe ist daher

$$\mathfrak{D}_h^8 = \{\mathfrak{D}^4, \mathfrak{S}_m''; \Gamma_c'\}; \mathfrak{D}_{4h}^{20}; \mathfrak{D}_{3d}^6.$$

Die Symmetriezentra liegen bei dieser Gruppe in denjenigen vier Teiloktanten von w , die *keine* zweizählige Achse enthalten, bei $\mathfrak{D}_h^7$ dagegen werden die vier Teiloktanten, die ein Symmetriezentrum enthalten, auch von den Achsen u erfüllt.

Die Gruppe $\mathfrak{D}^5$ (Fig. 240) enthält die Untergruppe $\mathfrak{T}^3$, aus ihr haben wir eine Gruppe $\mathfrak{T}_h$ nur mittels der Inversion $\mathfrak{J}$ gebildet; diese Inversion fällt auch für die in $\mathfrak{D}^5$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{D}_3^7$ in ihren Punkt O (S. 363) und läßt aus ihr die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ entstehen. Die Flächen α , β , γ und alle Diagonalebene des Würfels W sind daher Symmetrieebenen. Da in $\mathfrak{D}^3$ das Gitter Γ_c'' eingeht, also $2\tau_a$ eine Translation ist, fällt ein Symmetriezentrum auch in M_m . Aus der in $\mathfrak{D}^5$ enthaltenen Untergruppe $\mathfrak{D}_4^9$ ergibt sich mittels $\mathfrak{J}$ die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$, und so erhalten wir die Gruppe

$$\mathfrak{D}_h^9 = \{\mathfrak{D}^5, \mathfrak{J}; \Gamma_c''\} = \{\mathfrak{D}^5, \mathfrak{S}_h\}; \mathfrak{D}_{4h}^{17}, \mathfrak{D}_{3d}^5.$$

Die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ kommt mit der Figur 216 in Betracht, die dem körperzentrierten Gitter Γ_q' entspricht. In M_m bedingt die Inversion mit der in $\mathfrak{D}^5$ schon vorhandenen Eigensymmetrie D_3 die Symmetrie D_{3d} .

Aus den Gruppen $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$, die von enantiomorpher Art sind, lassen sich Gruppen $\mathfrak{D}_h$ nicht ableiten, wohl aber ist es für $\mathfrak{D}^8$ der Fall; in $\mathfrak{D}^8$ treten entgegengesetzte Schraubenachsen auf. Für die in der Gruppe $\mathfrak{D}^8$ (Fig. 242) enthaltene Untergruppe $\mathfrak{T}^5$ stellt ebenfalls die Inversion $\mathfrak{J}$ die erzeugende In-

version dar; da in $\mathfrak{D}^8$ das Gitter Γ_c'' eingeht, ist sie wiederum mit der Inversion gegen M_m gleichwertig. Sie ist aber auch eine Deckoperation für die in $\mathfrak{D}^8$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{D}_3^7$. In $\mathfrak{D}^8$ treten nämlich die zweizähligen Achsen u_m' und u_m'' zugleich auf, und daher ist M_m ein Symmetriezentrum für die Gruppe $\mathfrak{D}_3^7$ und erzeugt aus ihr die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^6$; es bedingt nach Tabelle B von S. 368 für den Punkt M_m , also auch für O nur die Symmetrie C_3^i . Mit der in $\mathfrak{D}^8$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ bestimmt die erzeugende Inversion die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$. Als Achsenfigur kommt hier Figur 217a in Betracht, die dem körperzentrierten Gitter Γ_q' entspricht. Ihrem Punkt M_m entspricht der Punkt M_m'' von Fig. 217 und daher ist $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ die Untergruppe. Wir erhalten so die Gruppe

$$\mathfrak{D}_h^{10} = \{\mathfrak{D}^8, \mathfrak{I}; \Gamma_c''\}; \mathfrak{D}_{4h}^{20}; \mathfrak{D}_{3d}^6.$$

Es gibt zehn Gruppen der Symmetrie O_h ; vier mit dem Gitter Γ_c , vier mit Γ_c' und zwei mit Γ_c'' .

§ 8. Die Koordinaten der gleichwertigen Punkte¹⁾. Die Drehung $\mathfrak{D}^{(2\pi/3)}$ bewirkt für die Koordinaten (Kap. VII, § 7) den Übergang von x, y, z in z, x, y ; in derselben Weise wirkt sie auf die in den Tripeln $(xyz) + \tau$ auftretende Translation τ . Aus τ_x, τ_y, τ_z entstehen daher durch die Drehungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^2$ die Werte

$$\tau_z, \tau_x, \tau_y \text{ und } \tau_y, \tau_z, \tau_x;$$

in entsprechender Weise ändern sich auch die drei Translationen $2\tau_g, 2\tau_h, 2\tau_k$; sie gehen durch die Drehungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^2$ in

$$2\tau_h, 2\tau_k, 2\tau_g \text{ und } 2\tau_k, 2\tau_g, 2\tau_h$$

über.

Da in $\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^7, \mathfrak{B}^8$ keine Zusatztranslationen auftreten, sind auch in den aus ihnen erzeugten Gruppen $\mathfrak{T}^1, \mathfrak{T}^2, \mathfrak{T}^3$ keine enthalten; für die Gruppen $\mathfrak{T}^4$ und $\mathfrak{T}^5$ ergeben sich (S. 338) die Werte:

¹⁾ Zu beachten ist, daß in Kap. VII, § 7 die zweite Zeile stets der Drehung $\mathfrak{D}^2$ entspricht und die dritte der Drehung $\mathfrak{D}$: *was hier beibehalten werden mußte.*

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{I}^4: & 0 & 2\tau_h & 2\tau_g & 2\tau_k \\ & 0 & 2\tau_g & 2\tau_k & 2\tau_h \\ & 0 & 2\tau_k & 2\tau_h & 2\tau_g \end{array} \quad \mathfrak{I}^5: \begin{array}{cccc} 0 & \tau_y & \tau_z & \tau_x \\ 0 & \tau_z & \tau_x & \tau_y \\ 0 & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{array}$$

Die Gruppen $\mathfrak{I}_h$ sind sämtlich mit einer Inversion gebildet; sie verwandelt jede bereits vorhandene Zusatztranslation in die entgegengesetzte. Für die Inversionen $\mathfrak{I}_m$ und $\mathfrak{I}_m'$ bestehen weiter die Gleichungen

$$\mathfrak{I}_m = \mathfrak{I} \cdot \{2\tau_d\}, \quad \mathfrak{I}_m' = \mathfrak{I} \cdot \{\tau_d\};$$

für sie stellen sich daher die Zusatzwerte $2\tau_d$ und τ_d ein. Die Gruppen $\mathfrak{I}_h^1$, $\mathfrak{I}_h^3$, $\mathfrak{I}_h^5$ sind von Zusatztranslationen frei. Für die übrigen Gruppen ergeben sich die folgenden Zusatzwerte:

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{I}_h^2: & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ \mathfrak{I}_h^4: & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_d & \tau_d & \tau_d & \tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_d & \tau_d & \tau_d & \tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_d & \tau_d & \tau_d & \tau_d \\ \mathfrak{I}_h^6: & 0 & 2\tau_h & 2\tau_g & 2\tau_k & 0 & 2\tau_h & 2\tau_g & 2\tau_k \\ & 0 & 2\tau_g & 2\tau_k & 2\tau_h & 0 & 2\tau_g & 2\tau_k & 2\tau_h \\ & 0 & 2\tau_k & 2\tau_h & 2\tau_g & 0 & 2\tau_k & 2\tau_h & 2\tau_g \\ \mathfrak{I}_h^7: & 0 & \tau_y & \tau_z & \tau_x & 0 & \tau_y & \tau_z & \tau_x \\ & 0 & \tau_z & \tau_x & \tau_y & 0 & \tau_z & \tau_x & \tau_y \\ & 0 & \tau_x & \tau_y & \tau_z & 0 & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{array}$$

Bei den Gruppen $\mathfrak{I}_d$ können sich Zusatztranslationen nur für $\mathfrak{I}_d^4$, $\mathfrak{I}_d^5$, $\mathfrak{I}_d^6$ einstellen. Die Operation $\mathfrak{S}_d$ bewirkt, gemäß Kap. VII, § 1, bei den vorhandenen Translationen den Übergang von

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z \text{ in } \tau_y, \tau_x, \tau_z;$$

ist $\mathfrak{S}_d(\tau)$ die erzeugende Operation, so liefert sie noch τ als neuen Zusatzwert. Also folgt:

$$\mathfrak{I}_d^4 \text{ und } \mathfrak{I}_d^5: \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \end{array}$$

Für die Zusatzwerte von $\mathfrak{T}_d^6$ ist davon auszugehen, daß τ_x in $\tau_y + \tau_d$ übergeht, was wieder mit $-\tau_y + \tau_d$ äquivalent ist. Aber es ist

$$-\tau_y + \tau_d = \frac{1}{2}\tau_x - \frac{1}{2}\tau_y + \frac{1}{2}\tau_x = \tau_d'' \text{ usw.}$$

und so folgt

$$\begin{array}{cccccccc} \mathfrak{T}_d^6: & 0 & \tau_y & \tau_x & \tau_x & \tau_d & \tau_d' & \tau_d''' & \tau_d'' \\ & 0 & \tau_x & \tau_x & \tau_y & \tau_d & \tau_d''' & \tau_d'' & \tau_d' \\ & 0 & \tau_x & \tau_y & \tau_x & \tau_d & \tau_d'' & \tau_d' & \tau_d'''. \end{array}$$

Bei den Gruppen $\mathfrak{D}$ sind $\mathfrak{D}^1$, $\mathfrak{D}^3$, $\mathfrak{D}^5$ von Translationen frei; sie entstehen aus den von Translationen freien Gruppen $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$ mittels Umwendung $\mathfrak{U}$ um die in der xy -Ebene liegende Achse. Für die übrigen Gruppen ergeben sich die Zusatztranslationen auf Grund davon, daß die erzeugende Umwendung (S. 95) den Übergang von

$$\tau_x, \tau_y, \tau_x \text{ in } -\tau_y, -\tau_x, -\tau_x$$

herbeiführt. Ferner bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{U}_m = \mathfrak{U} \cdot \{2\tau_d\}, \mathfrak{U}_m' = \mathfrak{U} \cdot \{\tau_d\}, \mathfrak{U}_m'' = \mathfrak{U} \cdot \{3\tau_d\},$$

woraus sich die neuen Zusatztranslationen leicht entnehmen lassen. Wir gelangen zunächst für $\mathfrak{D}^2$ und $\mathfrak{D}^4$ zu den Koordinatenwerten:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathfrak{D}^2: & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d & 2\tau_d \\ \mathfrak{D}^4: & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_d & \tau_d & \tau_d & \tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_d & \tau_d & \tau_d & \tau_d \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_d & \tau_d & \tau_d & \tau_d. \end{array}$$

Die Ermittlung der Werte für die übrigen Gruppen beruht darauf, daß durch $\mathfrak{U}$ selbst

$$2\tau_g, 2\tau_h, 2\tau_k \text{ in } -2\tau_g, -2\tau_k, -2\tau_h$$

übergeht. Aus $2\tau_g, 2\tau_h, 2\tau_k$ entstehen daher mittels $\mathfrak{U}_m' = \mathfrak{U}\tau_d$ die Werte

$$-2\tau_g + \tau_d, -2\tau_k + \tau_d, -2\tau_h + \tau_d.$$

Nun ist aber

$$-2\tau_g + \tau_d = -(\tau_x + \tau_y) + \frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y + \tau_z) = -\tau_d''',$$

was mit $3\tau_d'''$ äquivalent ist, und analog ist

$$-2\tau_h + \tau_d = -\tau_d'', \quad -2\tau_k + \tau_d = -\tau_d'.$$

Ganz ähnlich findet man für die Umwendung U_m'' , der der Zusatzwert $3\tau_d$ entspricht, daß die Ausdrücke

$$-2\tau_g + 3\tau_d, \quad -2\tau_h + 3\tau_d, \quad -2\tau_k + 3\tau_d$$

mit τ_d''' , τ_d'' , τ_d' äquivalent sind. Endlich berechnen sich die Zusatzwerte für $\mathfrak{D}^8$ ebenso wie für $\mathfrak{D}^6$, und wir finden so die Tripel:

$\mathfrak{D}^6$:	0	$2\tau_h$	$2\tau_g$	$2\tau_k$	τ_d	$3\tau_d'$	$3\tau_d''$	$3\tau_d'''$
	0	$2\tau_g$	$2\tau_k$	$2\tau_h$	τ_d	$3\tau_d'''$	$3\tau_d''$	$3\tau_d'$
	0	$2\tau_k$	$2\tau_h$	$2\tau_g$	τ_d	$3\tau_d''$	$3\tau_d'$	$3\tau_d'''$
$\mathfrak{D}^7$:	0	$2\tau_h$	$2\tau_g$	$2\tau_k$	$3\tau_d$	τ_d'	τ_d''	τ_d'''
	0	$2\tau_g$	$2\tau_k$	$2\tau_h$	$3\tau_d$	τ_d'''	τ_d''	τ_d'
	0	$2\tau_k$	$2\tau_h$	$2\tau_g$	$3\tau_d$	τ_d''	τ_d'	τ_d'''
$\mathfrak{D}^8$:	0	τ_y	τ_z	τ_x	τ_d	τ_d'	τ_d''	τ_d'''
	0	τ_z	τ_x	τ_y	τ_d	τ_d'''	τ_d''	τ_d'
	0	τ_x	τ_y	τ_z	τ_d	τ_d''	τ_d'	τ_d'''

Von den Gruppen O_h sind $\mathfrak{D}_h^1$, $\mathfrak{D}_h^5$ und $\mathfrak{D}_h^9$ von Zusatztranslationen frei. Die erzeugende Inversion verwandelt jede bei einer Gruppe $\mathfrak{D}$ schon vorhandene Translation in die entgegengesetzte; außerdem sind wieder die Gleichungen

$$\mathfrak{I}_m = \mathfrak{I} \cdot \{2\tau_d\}, \quad \mathfrak{I}_m' = \mathfrak{I} \cdot \{\tau_d\}, \quad \mathfrak{I}_m'' = \mathfrak{I} \cdot \{3\tau_d\}$$

zu beachten. Wir beschränken uns aber, wie in Kap. XVI, auf die Angabe der Zusatzwerte, die den Tripeln der Reihen III und IV in Kap. VII entsprechen; die Zusatzwerte für die Reihen I und II sind in der vorstehenden Tabelle für die Gruppen $\mathfrak{D}$ enthalten. Dies liefert die folgenden Werte:

$\mathfrak{D}_h^2$:	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_h^3$:	0	0	0	0	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	0	0	0	0	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	0	0	0	0	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$

$\mathfrak{D}_h^4$:	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	0	0	0	0
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	0	0	0	0
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	0	0	0	0
$\mathfrak{D}_h^6$:	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_h^7$:	τ_d	τ_d	τ_d	τ_d	0	0	0	0
	τ_d	τ_d	τ_d	τ_d	0	0	0	0
	τ_d	τ_d	τ_d	τ_d	0	0	0	0
$\mathfrak{D}_h^8$:	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$3\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$	$2\tau_d$
$\mathfrak{D}_h^{10}$:	0	τ_y	τ_s	τ_x	τ_d	τ_d'	τ_d'''	τ_d''
	0	τ_s	τ_x	τ_y	τ_d	τ_d'''	τ_d''	τ_d'
	0	τ_x	τ_y	τ_s	τ_d	τ_d''	τ_d'	τ_d'''

Die Gruppen $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$, $\mathfrak{T}_h^1$, $\mathfrak{T}_h^3$, $\mathfrak{T}_h^5$, $\mathfrak{T}_d^1$, $\mathfrak{T}_d^2$, $\mathfrak{T}_d^3$, $\mathfrak{D}^1$, $\mathfrak{D}^3$, $\mathfrak{D}^5$, $\mathfrak{D}_h^1$, $\mathfrak{D}_h^5$, $\mathfrak{D}_h^9$ entsprechen den Bravais'schen Strukturen. Die Gruppen $\mathfrak{D}_h^1$, $\mathfrak{D}_h^5$, $\mathfrak{D}_h^9$ stellen die Gesamtsymmetrie der kubischen Gitter Γ_c , Γ_c' , Γ_c'' dar.

§ 9. Die Eigensymmetrie der Bausteine. Für die Gruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_h$ sind die Eigensymmetrieeen im Vorstehenden im wesentlichen angegeben worden, eine Ergänzung hat nur für die Gruppen $\mathfrak{T}_h$ einzutreten, deren dreizählige Achsen den Würfel W windschief durchziehen, es sind die Gruppen $\mathfrak{T}_h^6$ und $\mathfrak{T}_h^7$. Ihr Oktant w wird nur von einer Achse d durchzogen, aber doch geht, wie in § 2 gezeigt ist, durch jede Ecke des Oktanten eine solche Achse, er wird von ihr sozusagen nur gestreift. Von diesen Achsenpunkten sind O , G , H , K und ebenso D , E , F , M gleichwertig. Dies wird durch die Schraubenachsen, die in der Achsenfigur 235 in die drei Ebenen α , β , γ fallen, unmittelbar bedingt. Alle diese Punkte sind daher Punkte C_3 für $\mathfrak{T}_h^6$ und $\mathfrak{T}_h^7$; für $\mathfrak{T}_h^6$ zerfallen sie in die obigen zwei gleichwertigen Punktgruppen, für $\mathfrak{T}_h^7$ sind sie sämtlich untereinander gleichwertig.

Um die Eigensymmetrien der übrigen Gruppen zu finden, werden wir die Art, in der wir in § 3 bei den Gruppen $\mathcal{T}_h$ verfahren, auf sie übertragen.

Einerseits erhöhte sich die Eigensymmetrie einer Stelle, falls die dreizählige Achse der kubischen Gruppe oder der Träger einer erzeugenden Operation durch sie hindurchging, andererseits dehnten sich die bei den Gruppen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_h$ schon vorhandenen Eigensymmetrien zyklisch weiter aus. In dieser Weise legen wir zunächst die Eigensymmetrien der Gruppen $\mathcal{T}_a$ dar; in Anknüpfung an die in ihnen gemäß § 4 vorhandenen Gruppen $\mathcal{B}_a$ (Kap. XVI, § 7).

Die Gruppe $\mathcal{T}_a^1$ enthält die Untergruppe $\mathcal{B}_a^1$. Für sie sind O, F, G, M Punkte der Symmetrie $\mathcal{B}_a$. Die hinzutretende dreizählige Achse der kubischen Symmetrie bewirkt, daß die Punkte O und M die Symmetrie T^a annehmen, sie macht überdies D, E, F gleichwertig, und bewirkt so, daß auch D, E, H, K die Symmetrie V^a erwerben. Die Gruppe $\mathcal{T}_a^2$ besitzt die Untergruppe $\mathcal{B}_a^9$. Für sie sind alle Punkte O bis M , sowie auch M_m , Punkte der Symmetrie V^a ; sie werden für $\mathcal{T}_a^2$ (Fig. 234), da bei ihr durch jede Ecke des Oktanten w eine dreizählige Achse geht, sämtlich zu Punkten T^a . In der Gruppe $\mathcal{T}_a^3$ endlich ist $\mathcal{B}_a^{11}$ als Untergruppe enthalten; sie zeigt zunächst die gleichen Eigensymmetrien wie $\mathcal{B}_a^1$. Sie übertragen sich auf $\mathcal{T}_a^3$ wieder so, daß O und M Punkte der Symmetrie T^a werden, aber D, E, F, G, H, K Punkte der Symmetrie V^a . In $\mathcal{B}_a^{11}$ sind aber auch Punkte der Symmetrie S_4 enthalten, nämlich H' und K' , ihnen entsprechen bei $\mathcal{T}_a^3$ (Fig. 231) die Mitten $H', K', H'', K'', H''', K'''$ der sechs Kanten von w , die nicht durch O oder M gehen.

Den Gruppen $\mathcal{B}_a^2, \mathcal{B}_a^{10}, \mathcal{B}_a^{12}$, die in den drei Gruppen $\mathcal{T}_a^4, \mathcal{T}_a^5, \mathcal{T}_a^6$ auftreten, kommen nur Punkte der Symmetrie S_4 zu; sie stellen sich auch für die eben genannten Gruppen $\mathcal{T}_a$ ein. In $\mathcal{B}_a^2$ sind es die Punkte F_m und G' ; für $\mathcal{T}_a^4$ ergeben sich daraus insgesamt die Punkte D_m, E_m, F_m und G', G'', G''' von Fig. 230 als Punkte S_4 . In $\mathcal{B}_a^{10}$ sind es die Punkte $F_m, G', H', K', G_m, G_m'$; die ihnen in $\mathcal{T}_a^5$ zunächst nur im Teilkanten von Fig. 144b (S. 320) entsprechenden Punkte sind

die Punkte $D_m, E_m, F_m, G_m, H_m, K_m$, und zwar sind außer u, v, w auch die durch M_m gehenden Achsen $u' v' w'$ vierzählige Achsen; für den Oktanten w selbst sind alle Flächenmitten und alle Kantenmitten Punkte der Symmetrie S_4 . In $\mathfrak{B}_d^{12}$ endlich sind es die Punkte Q', Q'' ; zu ihnen treten bei $\mathfrak{I}_d^6$ zyklisch noch die Punkte R', R'' und S', S'' hinzu; sie bilden mit der Achsenfigur von $\mathfrak{B}^9$ (S. 321) die Achsenfigur 235 (S. 471).

Sowohl den Gruppen $\mathfrak{I}_h$, wie auch den Gruppen $\mathfrak{I}_d$, kommen Punktlagen der Symmetrie C_2^v zu; für sie besteht die allgemeine Eigenschaft, daß ihre Ebenen bei den Gruppen $\mathfrak{I}_h$ in die Seitenflächen und bei den Gruppen $\mathfrak{I}_d$ in die Diagonalebenen des Würfels fallen.

Für die Gleichwertigkeit der Punktlagen sind zunächst die Verhältnisse der rhombischen Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_h$ sowie auch der Gruppen $\mathfrak{B}_d$ maßgebend; zu ihnen tritt in allen Fällen als bestimmendes Moment die dreizählige Achse. Bei der Gruppe $\mathfrak{I}_h^7$ macht das Symmetriezentrum M_m alle Ecken von w gleichwertig.

Die dreizähligen Achsen selbst bedürfen einer näheren Erörterung. Bei der Punktgruppe T sind alle vier dreizähligen Achsen gleichwertig; sie gehen aus einer von ihnen durch die Umwendungen $U', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'$ hervor. Daher sind die vier Schaaeren $\{d\}, \{d_1\}, \{d_2\}, \{d_3\}$ der Gruppen $\mathfrak{I}$ ebenfalls gleichwertig. Nun bildet jede Schaar eine Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$, und für diese Gruppe sind wieder alle in ihr enthaltenen Drehungsachsen gleichwertig, daher sind auch alle Drehungsachsen d, d_1, d_2, d_3 einer Gruppe $\mathfrak{I}$ untereinander gleichwertig. Nun besteht jede Achse der Gruppe T aus zwei Hälften. Ist die Achse *einseitig*, so sind beide Hälften ungleichwertig, ist sie *zweiseitig*, so sind die Hälften gleichwertig. Das erste ist bei den Gruppen T und T^a der Fall, das zweite bei der Gruppe T^h (S. 70 und 90). Analog ist es also bei den Gruppen $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_h, \mathfrak{I}_d$.

Da den Tabellen für die Gruppen $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_h, \mathfrak{I}_d$ wesentlich die Achsenfiguren der Gruppen $\mathfrak{B}$ zugrunde liegen, beziehen sich auch die Bezeichnungen u, v, w usw. auf diese Figuren.

Tabelle A. Gruppen $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}_h$, $\mathfrak{I}_d$

Gruppen Γ	Gruppe $G\mu$	Punktlagen	Gruppen Γ	Gruppe $G\mu$	Punktlagen
$\mathfrak{I}^1$	V	$D = E = F,$ $G = H = K$	$\mathfrak{I}_h^6$	C_3^i	$O = G = H = K$ $D = E = F = M$
	T	O, M	$\mathfrak{I}_h^7$	C_3^i	$O = D = E = F = G = H$ $= K = M, M_m$
$\mathfrak{I}^2$	T	$O = G = H = K,$ $D = E = F = M, M_m$	$\mathfrak{I}_d^1$	C_2^v	$u = v = w, u_3 = v_3 = w_3$
$\mathfrak{I}^3$	V	$D = E = F = G = H = K$		C_3^v	$d = d_1 = d_2 = d_3^1)$
	T	$O = M$		V^d	$D = E = F, G = H = K$
$\mathfrak{I}_h^1$	C_2^v	$u = v = w$ $u_1 = v_1 = w_1$ $u_2 = v_2 = w_2$ $u_3 = v_3 = w_3$ $D = E = F$ $G = H = K$ O, M	$\mathfrak{I}_d^2$	C_2^v	$u = v = w, u' = v' = w'$
	V^h			C_3^v	$d = d_1 = d_2 = d_3^1)$
	T^h		$\mathfrak{I}_d^3$	T^d	$O = G = H = K,$ $D = E = F = M, M_m$
$\mathfrak{I}_h^2$	V	$D = E = F = G = H = K$		C_2^v	$u = v = w$
	C_3^i	M_m		C_3^v	$d = d_1 = d_2 = d_3^1)$
	T	$O = M$		S_4	$H' = K' = H'' = K''$ $= H''' = K'''$
$\mathfrak{I}_h^3$	C_2^h	$G_m = G_m' = H_m = H_m'$ $= K_m = K_m'$ $u = v = w$ M_m $O = G = H = K$ $D = E = F = M$	$\mathfrak{I}_d^4$	V^d	$D = E = F = G = H = K$ $O = M$
	C_2^v			T^d	
	T		$\mathfrak{I}_d^5$	V	$D = E = F = G = H = K$ $D_m = E_m = F_m$ $G' = G'' = G'''$ $O = M$
	T^h			S_4	
$\mathfrak{I}_h^4$	C_3^i	$M_m' = N'' = M''' = N''''$ $O = G = H = K = M_m$ $D = E = F = M$	$\mathfrak{I}_d^6$	T	$D_m = E_m = F_m = G'$ $= G'' = G''' =$ $H' = K' = H'' = K''$ $= H''' = K'''^2)$ $G_m = G_m' = H_m = H_m'$ $= K_m = K_m'$ $O = D = E = F = G = H$ $= K = M, M_m$
	T			S_4	$Q' = Q'' = R' = R''$ $= S' = S''$
$\mathfrak{I}_h^5$	C_2^v	$u = v = w$ $u_1 = v_1 = w_1$			
	V^h	$D = E = F = G = H = K$	$\mathfrak{I}_d^7$	T	
	C_3^i	M_m		S_4	
	T^h	$O = M$			

¹⁾ Die Achsen sind einseitig. ²⁾ Die Schraubenachse, die F_m und H' verbindet, macht beide Punkte gleichwertig.

Um die Eigensymmetrien der Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_h$ zu gewinnen, können wir zunächst an ihre Untergruppen $\mathfrak{T}$ anknüpfen, außerdem auch an die in ihnen enthaltenen Gruppen $\mathfrak{D}_4$ und $\mathfrak{D}_{4h}$, und haben zu erwägen, welche Änderungen die hinzutretende dreizählige Achse bei diesen Gruppen bewirkt. Die Wirkung ist die in § 5 genannte; die Eigensymmetrien können sich durch die Achse entweder zu einer kubischen Symmetrie steigern oder sie dehnen sich auf die zyklisch gleichwertigen Punkte aus. Die Grundlage dafür bildet die Tabelle C von S. 434.

Die Gleichwertigkeit der Punktlagen bedarf nur für die Nebenachsen diagonalen Richtung einer Erörterung. Bei der Punktgruppe O sind alle sechs diagonalen Nebenachsen gleichwertig, dies überträgt sich also auch auf die sechs in den Raumgruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_h$ auftretenden Achsenschaaren, die je eine Gruppe $\mathfrak{C}_2$ oder $\mathfrak{C}_2''$ bilden. Innerhalb jeder einzelnen dieser Gruppen besteht dieselbe Gleichwertigkeit, wie für die Gruppen $\mathfrak{D}_4$ und $\mathfrak{D}_{4h}$; sie kann durch Hinzutreten der dreizähligen Achsen nicht geändert werden.

Alle diagonalen zweizähligen Achsen sind zweiseitig, ebenso auch die dreizähligen Achsen.

1) Die Gruppen $\mathfrak{D}^1$ und $\mathfrak{D}^2$. Beide Gruppen enthalten die Untergruppe $\mathfrak{T}^1$. Die Gruppe $\mathfrak{D}^1$ enthält außerdem die Untergruppe $\mathfrak{D}_4^1$ und die erzeugende Umwendung U . Nach der Tabelle C haben O , F , G , M für die Gruppe $\mathfrak{D}_4^1$ die Symmetrie D_4 . Die dreizählige Achse d macht O und M für die Gruppe $\mathfrak{D}^1$ zu Punkten der Symmetrie O , sie macht F mit D und E gleichwertig, und es kommt daher allen Punkten D , E , F , G , H , K die Symmetrie D_4 zu (Fig. 236). Für die Untergruppe $\mathfrak{D}_4^5$ von $\mathfrak{D}^2$ ist, wie wir in § 6 erwähnten, die Figur 212a zu benutzen; in ihr treten nur Punkte der Symmetrie V auf, und zwar O bis M und H' und K' . Wie bei der Gruppe $\mathfrak{T}^1$ verwandelt der kubische Typus O und M in Punkte der Symmetrie T , während allen andern Punkten die Symmetrie V verbleibt; zu H' und K' treten noch die Kantenmitten H'' , K'' und H''' , K''' hinzu. Endlich bedingen die drei Achsen u im Punkte M_m die Gruppe D_8 (Fig. 237).

2) In der aus $\mathfrak{T}^2$ entstehenden Gruppe $\mathfrak{D}^3$ (Fig. 238) ist $\mathfrak{D}_4^9$ als Untergruppe enthalten; in Übereinstimmung mit $\mathfrak{D}^3$ haben wir für die Achsenfigur von $\mathfrak{D}_4^9$ das flächenzentrierte Gitter, also Fig. 216 a zugrunde zu legen. In dieser Auffassung hat $\mathfrak{D}_4^9$ in O bis M Punkte der Symmetrie D_4 , sie werden für $\mathfrak{D}_3$ sämtlich zu Punkten der Symmetrie O . Die Gruppe $\mathfrak{D}_4^9$ besitzt außerdem in M_m , G_m und G_m' Punkte der Symmetrie V . Von ihnen nimmt M_m , wie bei der Gruppe $\mathfrak{T}^2$, die Symmetrie T an, dagegen bleibt die Symmetrie von G_m und G_m' unverändert, dehnt sich aber auf H_m , H_m' , K_m , K_m' aus. Auch für die Untergruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ von $\mathfrak{D}^4$ ist die dem flächenzentrierten Gitter entsprechende Figur 217 zugrunde zu legen. In ihr sind M_m und alle Punkte O bis M Punkte der Symmetrie V , sie gehen wie bei $\mathfrak{T}^2$ sämtlich in Punkte der Symmetrie T über; außerdem wird O mit M_m , aber nicht mit M gleichwertig. Der Punkt M_m' erhält die Symmetrie D_3 , und dasselbe gilt für die Mitten von drei weiteren Teiloktanten, nämlich für die Punkte M''' , N' , N'''' (Fig. 218, S. 433).

3) Die Gruppe $\mathfrak{D}^5$ mit der Untergruppe $\mathfrak{T}^3$ (Fig. 240) besitzt ein körperzentriertes Gitter; als Achsenfigur ihrer Untergruppe $\mathfrak{D}_4^9$ kommt daher die Figur 216 in Betracht. Ihr entsprechen in der Tabelle C (S. 434) zunächst dieselben Symmetriepunkte, wie der Gruppe $\mathfrak{D}_4^1$, nur kommen noch H' und K' als Punkte V hinzu. Für die Gruppe $\mathfrak{D}^5$ werden daher wieder O und M Punkte der Symmetrie O und alle Punkte D , E , F , G , H , K Punkte der Symmetrie D_4^1); außerdem werden alle Kantenmitten H' , K' , H'' , K'' , H''' , K''' Punkte der Symmetrie V . Endlich macht die Achse u_m den Punkt M_m zu einem Punkt der Symmetrie D_3 .

4) Bei der Gruppe $\mathfrak{D}^6$ (Fig. 241) mit den Untergruppen $\mathfrak{T}^4$ und $\mathfrak{D}_4^4$ stellt sich nur im Punkte M_m' die Symmetrie D_3 ein, ebenso bei $\mathfrak{D}^7$ im Punkte $M_m''^2$). Die Gruppe $\mathfrak{D}^8$ (Fig. 242) besitzt die Untergruppen $\mathfrak{T}^5$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$, und zwar kommt hier

¹⁾ Die vierzählige Achse hat für D , E , F verschiedene Richtung.

²⁾ Man beachte, daß bei den Gruppen $\mathfrak{T}^4$ und $\mathfrak{T}^6$ der Würfel w nur von einer einzigen Achse d durchsetzt wird.

die Achsenfigur 217 a in Betracht, die an die Entstehung der Gruppe $\mathfrak{D}^8$ aus $\mathfrak{B}^9$ anknüpft. Die dreizählige Achse d bedingt für sie nach § 6 die beiden Punkte M_m' und M_m'' als Punkte D_3 , außerdem sind in der Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ die Punkte Q_1 und Q_2 Punkte der Symmetrie V ; zu ihnen treten die zyklisch gleichwertigen Punkte R_1, R_2 und S_1, S_2 (Fig. 243).

Die im Beginn des Paragraphen über die Gruppen $\mathfrak{T}_h^6$ und $\mathfrak{T}_h^7$ gemachten Bemerkungen übertragen sich auch auf die Gruppen $\mathfrak{D}^6, \mathfrak{D}^7, \mathfrak{D}^8$. Durch jede Ecke von w geht eine dreizählige Achse; ferner sind bei $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$ die Punkte O, G, H, K und ebenso D, E, F, M gleichwertig, bei $\mathfrak{D}^8$ sind sie es alle.

Die Gruppen $\mathfrak{D}_h$ ergeben sich aus den Gruppen $\mathfrak{D}$ mittels einer Inversion. Sie kann die bei den Gruppen $\mathfrak{D}$ vorhandenen Eigensymmetrien nur so steigern, daß diese in gewisse Symmetrien zweiter Art übergehen. Für welche Punktlagen dies eintritt, kann aus der erzeugenden Inversion und aus den Eigensymmetrien der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ und $\mathfrak{D}_{3d}$ bestimmt werden, die Untergruppen der Gruppen $\mathfrak{D}_h$ sind. Für die dreizähligen Achsen stellt sich, wenn die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ als Untergruppe auftritt, die Symmetrie C_3^v ein; für die Achsen, die in die Seitenflächen des Oktanten w fallen, tritt die Symmetrie der Untergruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ auf, sie kann durch den Übergang der Gruppen $\mathfrak{D}_{4h}$ in die kubischen Gruppen nicht gesteigert werden. Alle dreizähligen Achsen sind zweiseitig.

1) Die Gruppen $\mathfrak{D}_h^1$ und $\mathfrak{D}_h^2$. In $\mathfrak{D}_h^1$ tritt $\mathfrak{D}_{4h}^1$ als Untergruppe auf; Symmetrieebenen sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dies bedingt den Übergang der in $\mathfrak{D}^1$ enthaltenen Punktsymmetrien O und D_4 in O^h und D_4^h , insbesondere haben O und M die Symmetrie O^h und D, E, F, G, H, K die Symmetrie D_4^h . Die Gruppe $\mathfrak{D}_h^2$ besitzt $\mathfrak{D}_{4h}^4$ als Untergruppe. Symmetrieebenen stellen sich nicht ein; dagegen treten nach S. 430, 4 die Punkte H' und K' als Punkte S_4 auf. Die übrigen Punkte behalten die Symmetrie, die sie für $\mathfrak{D}^1$ besitzen, also O und K die Symmetrie O und D, E, F, G, H, K die Symmetrie D_4 . In M_m erscheint nur die Symmetrie C_3^i .

2) In $\mathfrak{D}_3^h$ und $\mathfrak{D}_4^h$ ist $\mathfrak{D}_2$ als Untergruppe enthalten; für die in $\mathfrak{D}_3^h$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{D}_{4h}^9$ kommt, wie für $\mathfrak{D}_4^5$, die Achsenfigur 212a in Betracht. Als Symmetrieebenen treten α, β, γ auf. Die Punktsymmetrie T der Gruppe $\mathfrak{D}^2$ geht daher bei den Punkten O und M in T^h über, die übrigen Punkte, die in $\mathfrak{D}_{4h}^9$ die Symmetrie V^h besitzen, steigern ihre Symmetrie nicht; neben H' und K' sind auch H'', K'', H''', K''' Punkte der Symmetrie V^d . Die in $\mathfrak{D}^2$ vorhandene Symmetrie D_3 von M_m bleibt ungeändert. Der Gruppe $\mathfrak{D}_h^4$ gehört die Untergruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$ an; die Inversion $\mathfrak{I}_m$ bedingt die Symmetrieebene δ , so daß sich in M_m die Symmetrie D_3^d bildet. Die in $\mathfrak{D}^2$ vorhandene Symmetrie T von O und M geht daher in T^d über, die in $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$ enthaltene Symmetrie V^d von D, E, H, K bleibt ungeändert und dehnt sich auf F und G aus, ebenso behalten H' und K' ihre Symmetrie V , da die durch $H'K'$ gehende Diagonalebene ε keine Symmetrieebene der Gruppe ist.

3) In den Gruppen $\mathfrak{D}_h^5, \mathfrak{D}_h^6, \mathfrak{D}_h^7, \mathfrak{D}_h^8$ ist das flächenzentrierte Gitter I_c' enthalten; es sind also wieder die Achsenfiguren mit flächenzentriertem Gitter zugrunde zu legen. Für $\mathfrak{D}_h^5$ sind $\mathfrak{D}^3$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ die Untergruppen; alle Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stellen sich als Symmetrieebenen ein, die Punkte O bis M , denen in $\mathfrak{D}^3$ die Symmetrie O zukommt, erwerben die Symmetrie O^h , und es nimmt M_m die Symmetrie T^d an. Die Punkte $G_m, G_m', H_m, H_m', K_m, K_m'$ erhalten die Symmetrie V^h . Für die aus $\mathfrak{D}^3$ entstandene Gruppe $\mathfrak{D}_h^6$ ist $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$ die Untergruppe. Die erzeugende Inversion $\mathfrak{I}_m$ bedingt im Punkt M_m die Symmetrieebenen λ, μ, ν , und läßt damit seine Symmetrie T in T^h übergehen. Die den Punkten G_m, G_m' in $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$ zukommende Symmetrie V^d dehnt sich auf H_m, H_m', K_m, K_m' aus; dagegen steigern die Punkte O bis M die ihnen für $\mathfrak{D}^3$ zukommende Symmetrie O nicht. Alle Kantenmitten von w sind Punkte der Symmetrie C_4^h . Die Gruppen $\mathfrak{D}_h^7$ und $\mathfrak{D}_h^8$ besitzen einerseits $\mathfrak{D}^4$, andererseits $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ als Untergruppe, wiederum mit flächenzentriertem Gitter, also der Achsenfigur 217 entsprechend. Das erzeugende Symmetriezentrum M_m' von $\mathfrak{D}_h^7$

bedingt die Symmetrieebene δ , es stellen sich also alle Diagonalebenen des Würfels w als Symmetrieebenen ein; sie verwandeln die Symmetrie D_3 von M_m' in D_3^d und bedingen für alle Punkte O bis M , wie auch für M_m die Symmetrie T^d . Der Punkt M_m wird mit O gleichwertig. Wie in M_m' tritt auch in M_m''' , N'' , N'''' die Symmetrie D_3^d auf. In $\mathfrak{D}_h^8$ ist die Untergruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ enthalten; das erzeugende Symmetriezentrum erteilt dem Punkt M_m'' nur die Symmetrie C_3^i , ebenso den ihm gleichwertigen Punkten M'''' , N' , N''' des Oktanten w . Der Punkt M_m' und seine analogen behalten die Symmetrie D_3 , ebenso bleibt in O bis M und M_m die der Gruppe $\mathfrak{D}^4$ zugehörige Symmetrie T erhalten. Der Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ entsprechend stellen sich in D_m , E_m , F_m , G' , G'' , G''' usw. Punkte der Symmetrie S_4 ein; alle Flächenmitten und Kantenmitten des Würfels w werden gleichwertige Punkte S_4 .

4) In den Gruppen $\mathfrak{D}_h^9$ und $\mathfrak{D}_h^{10}$ ist das Gitter körperzentriert; für ihre Untergruppen $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ kommen daher die Achsenfiguren 216 und 217a in Betracht. Die aus $\mathfrak{D}^5$ entstehende Gruppe $\mathfrak{D}_h^9$ besitzt α , β , γ , δ als Symmetrieebenen; sie erhöhen die Eigensymmetrien von $\mathfrak{D}^5$ folgendermaßen: Die Punkte O und M erhalten die Symmetrie O^h , D , E , F , G , H , K werden Punkte der Symmetrie D_4^h , in M_m stellt sich D_3^d ein, während H' und K' die Symmetrie V^d erwerben, die sie auch für $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ besitzen. Für die aus $\mathfrak{D}^8$ entstehende Gruppe $\mathfrak{D}_h^{10}$ stellt sich in O , M und M_m die Symmetrie C_3^i ein, ihre Untergruppe $\mathfrak{T}_h$ ist offenbar $\mathfrak{T}_h^7$, und daher sind alle Ecken von w gleichwertige Punkte C_3^i ; die Achse u_m' macht auch M_m mit ihnen gleichwertig. Die Symmetrie V der Punkte Q_1 , Q_2 , R_1 , R_2 , S_1 , S_2 bleibt ungeändert; endlich treten, der Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ entsprechend, die Punkte Q' , Q'' , R' , R'' , S' , S'' als Punkte der Symmetrie S_4 auf.

Unter den Achsen u der folgenden Tabelle sind nur die zweizähligen Achsen diagonalen Richtung verstanden, in Übereinstimmung mit der Tabelle C von Kap. XVI; die Achsen u , v , w der rhombischen Tabelle C (S. 342) tragen hier die Bezeichnung a , b , c .

Tabelle B. Die Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_h$

Gruppe Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppe Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{D}^1$	D_4 O	$D = E = F, G = H = K$ O, M	$\mathfrak{D}_h^2$	C_3^i S_4	M_m $H' = K' = H'' = K''$ $= H''' = K'''$
$\mathfrak{D}^2$	V	$D = E = F = G = H = K$ $H' = K' = H'' = K''$ $= H''' = K'''$		D_4 O	$D = E = F = G = H = K$ $O = M$
	D_3 T	M_m $O = M$	$\mathfrak{D}_h^3$	C_2^v V^h D_3 V^d	a, b, c $D = E = F = G = H = K$ M_m $H' = K' = H'' = K''$ $= H''' = K'''$ $O = M$
$\mathfrak{D}^3$	V T O	$G_m = G_m' = H_m = H_m'$ $= K_m = K_m'$ M_m $O = G = H = K$ $D = E = F = M$		T^h	
			$\mathfrak{D}_h^4$	C_2^v V	c $H' = K' = H'' = K''$ $= H''' = K'''$
$\mathfrak{D}^4$	D_3 T	$M_m' = M''' = N'' = N'''$ $O = G = H = K, M_m$ $D = E = F = M, M_m$		C_3^v D_3^d V^d T^d	$d = d_1 = d_2 = d_3$ M_m $D = E = F = G = H = K$ $O = M$
$\mathfrak{D}^5$	V D_3 D_4 O	$H' = K' = H'' = K''$ $= H''' = K'''$ M_m $D = E = F = G = H = K$ $O = M$	$\mathfrak{D}_h^5$	C_2^v V^h C_3^v C_4^v T^d O^h	$b, \text{ alle } u \text{ in } \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ $G_m = G_m' = H_m = H_m'$ $= K_m = K_m'$ $d = d_1 = d_2 = d_3$ a M_m $O = G = H = K$ $D = E = F = M$
$\mathfrak{D}^6$	D_3	M_m'			
$\mathfrak{D}^7$	D_3	M_m''			
$\mathfrak{D}^8$	V D_3	$Q_1 = Q_2 = R_1 = R_2$ $= S_1 = S_2$ M_m', M_m''	$\mathfrak{D}_h^6$	C_3^v C_4^h ¹⁾	$u' = v' = w' (= b)$ $D_m = E_m = F_m = G' = G''$ $= G''' = H' = K' = H''$ $= K'' = H''' = K'''$
$\mathfrak{D}_h^1$	C_2^v C_3^v C_4^v D_4^h O^h	$c, \text{ alle } u \text{ in } \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ $d = d_1 = d_2 = d_3$ a, b $D = E = F, G = H = K$ O, M		V^d T^h O	$G_m = G_m' = H_m = H_m'$ $= K_m = K_m'$ M_m $O = D = E = F = G = H$ $= K = M$

¹⁾ Alle Kantenmitten sind gleichwertige Punkte C_4^h .

Gruppe Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen	Gruppe Γ	Gruppe G_μ	Punktlagen
$\mathfrak{D}h^7$	C_2^v	c	$\mathfrak{D}h^9$	C_2^v	b , alle u in $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$
	C_3^v	$d = d_1 = d_2 = d_3$		C_3^v	$d = d_1 = d_2 = d_3$
	D_3^d	$M_m' = M'' = N' = N'''$		D_3^d	M_m
	T^d	$O = G = H = K = M_m$ $D = E = F = M$		C_4^v	a
$\mathfrak{D}h^8$	C_3^i	$M_m'' = M''' = N' = N'''$	$\mathfrak{D}h^{10}$	V	$Q_1 = Q_2 = R_1 = R_2 = S_1 = S_2$
	D_3	$M_m' = M''' = N' = N'''$		C_3^i	$O = D = E = F = G = H$ $= K = M = M_m$
	S_4	$D_m = E_m = F_m = G' = G''$ $= G''' = H' = K' = H''$ $= K'' = H''' = K'''$		D_8	$M_m' = M_m''$
	T	$O = G = H = K$ $D = E = F = M = M_m$		S_4	$Q' = Q'' = R' = R'' = S' = S''$

Die zusammenfassende Übersicht über alle Gruppen des kubischen Typus folgt wieder in zwei Teilen. Zur Vereinfachung der Tabellen seien folgende Abkürzungen eingeführt: Die Punkte D, E, F, G, H, K bezeichnen wir durch D bis K , die Punkte $H', K', H'', K'', H''', K'''$ durch H' bis K''' , die Punkte $G_m, G_m', H_m, H_m', K_m, K_m'$ durch G_m bis K_m' , $D_m, E_m, F_m, G', G'', G'''$ durch D_m bis G''' , $Q', Q'', R', R'', S', S''$ und $Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2$ durch Q' bis S'' und Q_1 bis S_2 . Dann nehmen die Tabellen die folgende Form an:

CL. Kubischer Typus (Gruppen $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}h, \mathfrak{I}d$)

Gruppe G_μ	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_2^h	4	$\mathfrak{I}h^2$	$\Gamma c'$	G_m bis K_m'
C_2^v	4	$\mathfrak{I}h^1$	Γc	alle u, v, w
		$\mathfrak{I}h^3$	$\Gamma c'$	u, v, w
		$\mathfrak{I}h^5$	$\Gamma c''$	alle u, v, w

Gruppe G_μ	Zählig- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_3^v	4	$\mathcal{I}d^1$ $\mathcal{I}d^2$ $\mathcal{I}d^3$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	u, v, w, u_3, v_3, w_3 u, v, w, u', v', w' u, v, w
V	4	$\mathcal{I}^1, \mathcal{I}h^2, \mathcal{I}d^4$ $\mathcal{I}^2$	Γ_c $\Gamma_{c''}$	D bis K D bis K
V^h	4	$\mathcal{I}h^1$ $\mathcal{I}h^5$	Γ_c $\Gamma_{c''}$	D bis K D bis K
C_3^i	6	$\mathcal{I}h^2$ $\mathcal{I}h^4$ $\mathcal{I}h^5$ $\mathcal{I}h^6$ $\mathcal{I}h^7$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$ Γ_c $\Gamma_{c''}$	M_m M_m', N'', M''', N'''' M_m O bis M O bis M, M_m
C_3^v	6	$\mathcal{I}d^1$ $\mathcal{I}d^2$ $\mathcal{I}d^3$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	d, d_1, d_2, d_3 d, d_1, d_2, d_3 d, d_1, d_2, d_3
S_4	4	$\mathcal{I}d^3$ $\mathcal{I}d^4$ $\mathcal{I}d^5$ $\mathcal{I}d^6$	$\Gamma_{c''}$ Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	H' bis K''' D_m bis G''' D_m bis G''' H' bis K''' G_m bis K_m' Q' bis S''
Vd	8	$\mathcal{I}d^1$ $\mathcal{I}d^8$	Γ_c $\Gamma_{c''}$	D bis K D bis K
T	12	$\mathcal{I}^1, \mathcal{I}h^2, \mathcal{I}d^4$ $\mathcal{I}^2, \mathcal{I}h^4, \mathcal{I}d^5$ $\mathcal{I}^3$ $\mathcal{I}h^6$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$ $\Gamma_{c'}$	O, M O bis M, M_m O, M M_m
T^h	24	$\mathcal{I}h^1$ $\mathcal{I}h^3$ $\mathcal{I}h^5$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	O, M O bis M O, M
Td	24	$\mathcal{I}d^1$ $\mathcal{I}d^2$ $\mathcal{I}d^3$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	O, M O bis M, M_m O, M

CII. Kubischer Typus (Gruppen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_h$)

Gruppe G_μ	Zählig- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_2^v	4	$\mathfrak{D}_h^1$ $\mathfrak{D}_h^8$ $\mathfrak{D}_h^4$ $\mathfrak{D}_h^6$ $\mathfrak{D}_h^3$ $\mathfrak{D}_h^7$ $\mathfrak{D}_h^9$	Γ_c Γ_c Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	c, u in $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ a, b, c c b, u in $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ $u', v', w' (b)$ c b, u in $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$
V	4	$\mathfrak{D}^2$ $\mathfrak{D}^3$ $\mathfrak{D}^5$ $\mathfrak{D}^3, \mathfrak{D}_h^{10}$ $\mathfrak{D}_h^4$	Γ_c Γ_c $\Gamma_{c''}$ $\Gamma_{c''}$ Γ_c	D bis K H' bis K''' O bis M H' bis K''' Q_1 bis S_2 H' bis K'''
V^h	8	$\mathfrak{D}_h^3$ $\mathfrak{D}_h^6$	Γ_c $\Gamma_{c'}$	D bis K G_m bis $K_{m'}$
C_3^i	6	$\mathfrak{D}_h^2$ $\mathfrak{D}_h^6$ $\mathfrak{D}_h^{10}$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	M_m M_m'', M''', N', N''' O bis M, M_m
C_3^v	6	$\mathfrak{D}_h^1, \mathfrak{D}_h^4$ $\mathfrak{D}_h^5, \mathfrak{D}_h^7$ $\mathfrak{D}_h^9$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	d, d_1, d_2, d_3 d, d_1, d_2, d_3 d, d_1, d_2, d_3
D_3	6	$\mathfrak{D}^2, \mathfrak{D}_h^3$ $\mathfrak{D}^4, \mathfrak{D}_h^8$ $\mathfrak{D}^5$ $\mathfrak{D}^6$ $\mathfrak{D}^7$ $\mathfrak{D}^9, \mathfrak{D}_h^{10}$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c'}$ Γ_c Γ_c $\Gamma_{c''}$	M_m M_m', M''', N', N''' M_m M_m' M_m'' M_m', M_m''
D_3^d	12	$\mathfrak{D}_h^4$ $\mathfrak{D}_h^7$ $\mathfrak{D}_h^9$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	M_m M_m', M''', N', N''' M_m
S_4	4	$\mathfrak{D}_h^2$ $\mathfrak{D}_h^8$ $\mathfrak{D}_h^{10}$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	H' bis K''' alle Kantenmitten Q' bis S''

Gruppe G_{μ}	Zähl- keit	Gruppen Γ	Gitter	Punktlagen
C_4^v	8	$\mathcal{D}_h^1$ $\mathcal{D}_h^5$ $\mathcal{D}_h^9$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	a, b a a
C_4^h	8	$\mathcal{D}_h^6$	$\Gamma_{c'}$	alle Kantenmitten
V^d	8	$\mathcal{D}_h^3$ $\mathcal{D}_h^4$ $\mathcal{D}_h^6$ $\mathcal{D}_h^9$	Γ_c Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	H' bis K''' D bis K G_m bis K_m' H' bis K'''
D_4	8	$\mathcal{D}^1, \mathcal{D}_h^2$ $\mathcal{D}^5$	Γ_c $\Gamma_{c''}$	D bis K D bis K
D_4^h	16	$\mathcal{D}_h^1$ $\mathcal{D}_h^9$	Γ_c $\Gamma_{c''}$	D bis K D bis K
T	12	$\mathcal{D}^2$ $\mathcal{D}^3$ $\mathcal{D}^4, \mathcal{D}_h^8$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c'}$	O, M M_m O bis M, M_m
T^h	24	$\mathcal{D}_h^3$ $\mathcal{D}_h^6$	Γ_c $\Gamma_{c'}$	O, M M_m
T^d	24	$\mathcal{D}_h^4$ $\mathcal{D}_h^5$ $\mathcal{D}_h^7$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c'}$	O, M M_m O bis M, M_m
O	24	$\mathcal{D}^1, \mathcal{D}_h^2$ $\mathcal{D}^3, \mathcal{D}_h^6$ $\mathcal{D}^5$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	O, M O bis M O, M
O^h	48	$\mathcal{D}_h^1$ $\mathcal{D}_h^5$ $\mathcal{D}_h^9$	Γ_c $\Gamma_{c'}$ $\Gamma_{c''}$	O, M O bis M O, M

Eine Erörterung der kritischen Punktlagen ist bei den kubischen Gruppen nicht mehr erforderlich. Die allgemeinen Gesichtspunkte sind bei den andern Gruppen eingehend erledigt und das einzelne ist in jedem Fall aus den Tabellen zu entnehmen. Auch kommen wir in den Beispielen darauf zurück.

Kap. XIX. Raumteilung und Kugelpackung

§ 1. Der Fundamentalbereich eines Punktnetzes. Seien $\{g\}$ und $\{h\}$ zwei Geradenschaaren, die ein Punktnetz $\mathfrak{N}$ bestimmen; sie zerlegen die Ebene in regelmäßig gelagerte Parallelogramme π , bewirken also eine regelmäßige *Ebenenteilung*. Die Parallelogramme sollen *Fundamentalbereiche* des Netzes und der Ebenenteilung heißen. Markieren wir die Mitten aller Parallelogramme τ , so erhalten wir in diesen Mitten ein neues Netz; es ist dem Netz $\mathfrak{N}$ kongruent und wir können die Parallelogramme, die die Punkte dieses Netzes umgeben, auch als Fundamentalbereiche für *dieses* Netz auffassen, so daß also jeder Netzkpunkt von einem Fundamentalbereich umgeben ist.

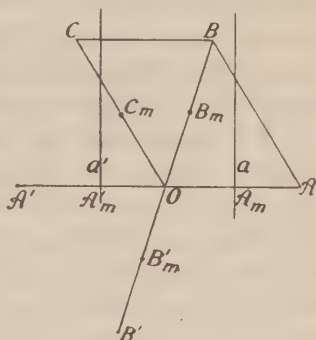


Fig. 244

Der so eingeführte Begriff des Fundamentalbereichs ist kein eindeutig bestimmter. Eine Gattung solcher Bereiche wollen wir näher betrachten. Wir knüpfen dazu an die Translationengruppe des Netzes an; sie besteht aus allen Strecken OP , die einen Netzkpunkt O mit den übrigen Netzkpunkten P verbinden. Ferner fügen wir zum Netz noch alle Mitten P_m der Netzstrecken OP hinzu; sie sind (S. 113) Inversionszentra des Netzes und bilden mit den Netzkpunkten zusammen selbst ein Netz, es möge $\mathfrak{N}_m$ heißen.

Unter den Translationen des Netzes $\mathfrak{N}$ gibt es zwei kleinste, OA und OB ; wir beschränken uns auf den allgemeinen Fall $OA < OB$. Seien A' und B' die Netzkpunkte, für die (Fig. 244)

$$A'O = OA \text{ und } B'O = OB$$

ist; wir dürfen die Bezeichnung so voraussetzen, daß der Winkel AOB nicht stumpf ist. Es ist dann offenbar

$$OA < OB < AB^1).$$

¹⁾ Auch hier beschränken wir uns auf den allgemeinen Fall der Ungleichheit. Aus $AB > OB > OA$ folgt weiter

$$AOB > OAB > OBA,$$

Endlich sei O der durch $OC \parallel AB$ und $BC \parallel AO$ bestimmte Netzpunkt. Errichten wir jetzt in den Mitten A_m und A'_m von OA und OA' die Mittellote a und a' , so begrenzen sie einen Parallelstreifen, und aus der Festsetzung über den Winkel AOB folgert man, daß die Mitten B_m und B'_m der Strecken OB und OB' innerhalb dieses Streifens liegen. Ziehen wir jetzt durch B_m und B'_m die Mittellote b und b' , so werden sie von dem Streifen ein Parallelogramm abschneiden. Liegt der Punkt C_m , also auch C'_m , innerhalb dieses Parallelogramms, so zeichnen wir auch die zu ihnen gehörigen Mittellote c und c' und behaupten nun zweierlei. Erstens, daß in dem so konstruierten Sechseck keine weiteren Mitten P_m von Netzstrecken OP mehr liegen und zweitens, daß die in gleicher Weise um jeden Netzpunkt konstruierbaren Sechsecke die behauptete Ebenenteilung darstellen.

Wir zeigen zunächst, daß Bereiche φ , die in der genannten Weise die Punkte des Netzes $\mathfrak{N}$ umgeben und die Ebene lückenlos erfüllen, gerade von sechs Mittelloten begrenzt sind. Aus der lückenlosen Erfüllung der Ebene schließt man nämlich, daß die Parallelogramme π und die Bereiche φ , da sie je einen Netzpunkt umschließen, gleichen Flächeninhalt besitzen¹⁾. Für die weiteren Schlüsse wird uns das oben eingeführte Netz $\mathfrak{N}_m$ dienen. Wegen der Flächengleichheit muß nämlich das um jeden Netzpunkt P liegende Sechseck φ ebenso viele Punkte des Netzes $\mathfrak{N}_m$ enthalten, wie das ihn umgebende Parallelogramm π . Nun enthält ein Parallelogramm außer seiner Mitte noch vier solcher Punkte auf den Seiten und vier in den Ecken; jede Seitenmitte gehört aber zu zwei und jede Ecke zu vier Parallelogrammen, und so stellen diese Punkte für das Parallelogramm π selbst

$$1 + \frac{4}{2} + \frac{4}{4} = 4$$

Punkte dar. Genau so viele muß also auch der Bereich φ enthalten; außer O also noch drei, und da jeder Punkt einer Seite

und da AOB nach Festsetzung nicht stumpf ist, sind auch OAB und OBA spitze Winkel. Das Dreieck OAB ist ein primitives Dreieck des Punktnetzes; das primitive Dreieck kann daher stets in der obigen Weise gewählt werden.

¹⁾ Vergl. die Schlußweise von S. 136.

zwei Bereichen φ angehört, so ergeben sich für φ in der Tat drei Seitenpaare. Damit ist die erste Behauptung erwiesen.

Um die zweite zu beweisen, zeigen wir, daß sich die drei zu den Punkten O, A, B gehörigen Bereiche lückenlos aneinander schließen (Fig. 245). Sei d das Mittellot von AB ¹⁾, so ist der Schnitt der Mittellote (a, b) eine Ecke des Bereiches φ , der Schnitt von (a, d) eine Ecke des Bereiches φ_a und der Schnitt von (b, d) eine Ecke des Bereiches φ_b ; die drei Mittellote a, b, d schneiden sich aber als Mittellote der Seiten von OAB in einem Punkte, und daher ist dieser Punkt eine gemeinsame Ecke der drei Bereiche $\varphi, \varphi_a, \varphi_b$, und das ist die Behauptung. Wir folgern daraus noch, daß A_m die Mitte der auf a liegenden Seite ST ist. Der Punkt A_m ist nämlich ein Inversionszentrum für das Netz, also auch für die Bereiche φ , und zwar geht φ so in φ_a über, daß die Seite ST in sich übergeht, insbesondere S in T und T in S . Es muß also A_m die Mitte von ST sein.

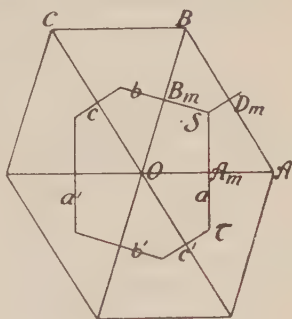


Fig. 245

Damit ist der Bereich φ als Fundamentalbereich eines Netzes nachgewiesen.

Er ist ein von parallelen Seiten begrenztes *konvexes Polygon mit Mittelpunkt*: jede durch O gezogene Gerade schneidet den Umfang in zwei Punkten L und L' , für die $OL = OL'$ ist.

Wir fragen noch, unter welchen Umständen der Bereich φ in ein Viereck ausarten kann. Soll dies eintreten, so muß ein Seitenpaar verschwinden und sich also auf Null reduzieren. Wir dürfen dafür die Mittellote d und d' wählen. Reduzieren sie sich auf Null, so ziehen sie sich auf die Punkte D_m und D_m' zusammen, es fällt also der Schnittpunkt der Lote a, b in die Mitte der Seite AB , und das Dreieck AOB ist *rechtwinklig*. Der einzige mögliche Sonderfall entspricht mithin dem recht-

¹⁾ Der Buchstabe d fehlt in der Figur.

winkligen Netz; sein Bereich φ ist überdies der Stammfigur des Netzes kongruent¹⁾.

§ 2. Beispiele von Fundamentalbereichen der Gitter.

Um das Vorstehende auf die Gitter zu übertragen, sollen zunächst einige Beispiele behandelt werden. Das, was uns vornehmlich interessiert, sind wiederum Bereiche Φ , die wir um die Gitterpunkte herumlegen, und die von den Normalebenen begrenzt werden, die auf den von O ausgehenden Gitterstrecken $OA, OB, OC \dots$ in ihren Mitten $A_m, B_m, C_m \dots$ senkrecht stehen.

Wir beginnen mit dem rhombischen Gitter Γ_v ; es sei bestimmt durch die drei rechtwinkligen Kanten

$$OA < OB < OC.$$

Konstruieren wir die zu OA, OA', OB, OB' normalen Mittelebenen, so bilden sie die Seitenflächen eines zur Ebene OAB senkrechten unbegrenzten prismatischen Raumteils, und wenn wir nun noch die Mittelebenen für OC und OC' hinzufügen, so schneiden diese aus dem prismatischen Raumteil ein rechtwinkliges Parallelepipedon heraus, das zur Stammfigur Π_0 des Gitters kongruent ist. In ihm haben wir den einfachsten Fall der hier möglichen Bereiche zu erblicken. Er ist ein *Sechsfächner*.

Ganz ähnlich ist es beim hexagonalen Gitter. Wir definieren es, wie in Kap. IX, § 13 durch die Translationen OL, OM, ON, OC . Errichten wir auf OL, OM, ON und den entgegengesetzten Translationen OL', OM', ON' die zugehörigen normalen Mittelebenen, so bilden sie einen geraden prismatischen Raumteil, der die Grundebene γ in einem regulären Sechseck schneidet. Durch die Normalebenen, die zu OC und OC' gehören, wird aus ihm eine gerade sechseckige Säule herausgeschnitten, deren Höhe die Länge OC hat. Der so gewonnene Bereich ist ein *Achtflächner*; er wird von zwei Sechsecken und sechs Rechtecken begrenzt.

¹⁾ Dem rhombischen Netz entspricht also kein Sonderfall, auch nicht dem gleichseitigen. Für das gleichseitige ist der Fundamentalbereich φ ein *reguläres* Sechseck.

Der Fundamentalbereich Φ des körperzentrierten kubischen Gitters wird sich als ein *Kubooktaeder* herausstellen. Um ihn zu erhalten, wollen wir an den Mittelpunkt M des Würfels anknüpfen. Zu den Grenzflächen von Φ gehören dann einerseits die sechs Seitenflächen $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ des Würfels, andererseits die Ebenen, die auf den acht von M ausgehenden halben Diagonalen in ihren Mitten senkrecht stehen und ein Oktaeder bilden. Sie liefern zusammen das Kubooktaeder. In jeder der acht Oktaederebenen ist die Begrenzungsfläche bekanntlich ein Sechseck, in jeder Seitenfläche des Würfels dagegen ein Quadrat. Wir erhalten also einen von sechs Quadraten und acht Sechsecken begrenzten *Vierzehnflächner* als Bereich Φ .

Wir betrachten endlich das flächenzentrierte kubische Gitter Γ_c' ; seien OG, OH, OK die von O ausgehenden Translationen (Fig. 96, S. 199). Die auf ihnen in G_m, H_m, K_m senkrechten Ebenen, die also durch DE, DF, EF gehen, sind dann die drei Diagonalebenen des Würfels; sie schneiden sich im Punkte M_m und es sind die drei Geraden M_mD, M_mE, M_mF Kanten

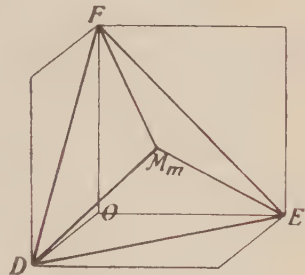


Fig. 246

der sich in M_m bildenden dreiseitigen Ecke (Fig. 246). Dasselbe gilt für jeden der acht Oktanten, die den Punkt O umgeben. Wir erhalten daher als Bereich Φ ein Polyeder, das von 12 Rhomben begrenzt wird. Das gleichschenklige Dreieck DEM_m stellt die Hälfte eines solchen Rhombus dar. Die Mitten der acht Oktanten sowie die Punkte D, D', E, E', F, F' bilden die Ecken von Φ . In jedem der Punkte D, D', E, E', F, F' stoßen vier Flächen zusammen, in jeder Oktantenmitte aber drei. Der Bereich ist ein *Zwölfflächner*.

§ 3. Die Paralleloeder. Die bisher gefundenen Bereiche haben sämtlich die folgenden Eigenschaften: 1. Sie sind *konvexe* Bereiche; 2. sie werden von *paarweise parallelen* und kongruenten Flächen begrenzt; 3. sie besitzen einen *Mittelpunkt*; 4. auch die Seitenflächen sind Polygone mit *Mittelpunkt* und

parallelen Kanten. Das letzte ist zwar nicht bewiesen worden, ist aber für alle betrachteten Bereiche leicht zu bestätigen. Bereiche dieser Art sind von Fedorow *Paralleloeder* genannt worden. Er hat gezeigt, daß *fünf* Gattungen solcher Paralleloeder existieren, die er als *Heptaparalleloeder*, *Hexaparalleloeder*, *Tetraparalleloeder* und *Triparalleloeder* bezeichnet hat. Hexaparalleloeder gibt es zwei verschiedene Arten. Um die Paralleloeder abzuleiten, schicken wir folgendes voraus. Sei ε irgend eine Netzebene des Gitters. In ihr sei $OABC' = \pi_0$ ein primitives Parallelogramm, wir vervollständigen es (Fig. 247) zu demjenigen Parallelogramm π' , dessen Seiten durch A , B ,

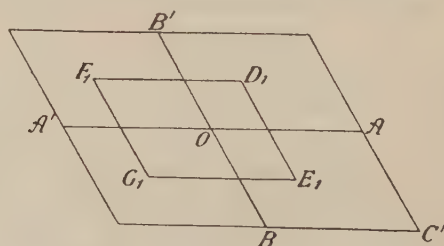


Fig. 247

A' , B' gehen, und das aus vier Parallelogrammen π besteht. Ferner sei $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ die nächste Netzebene zu ε . Projizieren wir ihre Gitterpunkte in die Ebene ε , so wird je ein Projektionspunkt in die vier Teilparallelogramme von π' hineinfallen; D , E , F , G seien die vier Punkte von ε_1 , für die es der Fall ist, und D_1 , E_1 , F_1 , G_1 ihre Projektionen in ε . Wie in § 1, ergänzen wir endlich noch das Gitter Γ_τ durch Hinzunahme der Mitten P_m aller von O ausgehenden Gitterstrecken zum Gitter Γ'_m ; auch hier bilden alle Punkte von Γ'_m die dem Gitter Γ_τ zukommenden Inversionszentra.

Seien nun OA und OB die beiden kleinsten Translationen des Gitters und γ die durch sie bestimmte Netzebene. Wir bestimmen mit ihnen, wie in § 1, das spitzwinklige Dreieck OBC , so daß

$$OA \leq OB < OC$$

ist. Weiter konstruieren wir zu OA , OA' , OB , OB' , OC , OC' in ihren Mitten A_m , B_m , C_m , A'_m , B'_m , C'_m die Normalebenen.

Der von ihnen begrenzte sechsflächige prismatische Raumteil wird dann im allgemeinen auch die Punkte D_m, E_m, F_m, G_m als innere Punkte enthalten; wir wollen noch festsetzen, daß D und E diejenigen Punkte sind, die von O den kleinsten Abstand haben. Legen wir also zunächst durch D_m und D'_m die zu OD und OD' normalen Mittelebenen δ und δ' , so werden sie von dem prismatischen Raumteil einen geschlossenen konvexen Bereich abtrennen. Wir operieren dann mit E_m und E'_m ebenso und können dies fortsetzen, bis in dem entstehenden konvexen Bereich keine Mitten P_m von Gitterstrecken OP mehr enthalten sind. Er stellt den gesuchten Fundamentalbereich dar; wir beweisen es wie in § 1.

Wenn nämlich die so konstruierten Bereiche Φ den Raum lückenlos erfüllen, so folgern wir zunächst wieder, daß sie mit der Stammfigur Π_0 des Gitters inhaltsgleich sind, und es muß daher der Bereich Φ von den Punkten P_m im Innern und auf der Oberfläche ebenso viele enthalten, wie die Stammfigur Π_0 . Diese enthält insgesamt $1 + 6 + 12 + 8$ solche Punkte, nämlich einen im Innern, 6 in den Flächenmitten, 12 in den Kantenmitten und 8 in den Ecken. Die 6 Flächenmitten gehören je zwei Bereichen Π an, die 12 Kantenmitten je vierein und die acht Ecken je achten; die ersten sind daher doppelt gerechnet, die zweiten vierfach und die letzten achtfach, sie stellen daher $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ einfach gerechnete Punkte dar. Für den Bereich Φ müssen sich daher 7 für seine Oberfläche einstellen, und da jede Grenzfläche von Φ zwei Bereichen angehört, so ist der Bereich Φ im allgemeinsten Fall ein *Vierzehnflächner* (wie das Kubooktaeder). Die sieben Flächenpaare, die ihn bilden, erhält man an der Hand der obigen Konstruktion folgendermaßen: Eines zu den Punkten A, A' der durch O gehenden Geraden g gehörig; zwei weitere zu den Punkten B, B' und C, C' der beiden nächsten Gittergeraden gehörig, endlich die vier Paare, die zu den Punkten $D, D', E, E', F, F', G, G'$, der beiden nächsten Gitterebenen γ_1 und γ' gehören; insgesamt also $1 + 2 + 4 = 7$ Flächenpaare¹⁾.

¹⁾ Im vierdimensionalen Raume würden noch 2^4 weitere Punkte hinzutreten usw.

Es ist aber noch zu zeigen, daß die Bereiche Φ den Raum lückenlos erfüllen. Nach der Konstruktion ist jede Grenzfläche des einen auch Grenzfläche eines andern; ebenso läßt sich zeigen, daß dies auch für jede Kante und jede Ecke gilt. Dazu knüpfen wir an das Tetraeder $OABD$ an (Fig. 248); seien $\alpha, \beta, \delta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1$ die Ebenen, die auf den Kanten OA, OB, OD, AB, BD, AD senkrecht stehen. Sie schneiden sich sämtlich in Punkt S , dem Zentrum der dem Tetraeder umschriebenen Kugel; ebenso schneiden sich je drei von diesen Ebenen, die zu drei Geraden derselben Tetraederfläche gehören, in einer durch S

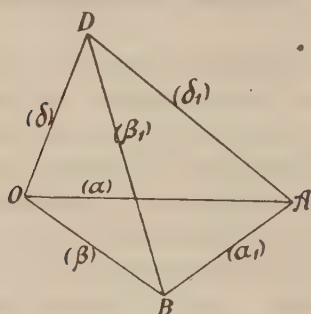


Fig. 248

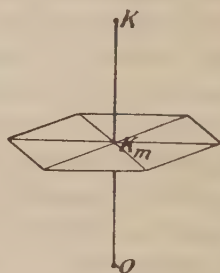


Fig. 249

gehenden Geraden. Nun ist S als Punkt $(\alpha\beta\delta), (\alpha\alpha_1\delta_1), (\beta\alpha_1\beta_1), (\delta\beta_1\delta_1)$ eine Ecke sowohl für Φ , wie für Φ_a, Φ_b, Φ_d , ebenso ist die Schnittlinie $(\alpha\beta\alpha_1)$ eine Kante sowohl für Φ , wie auch für Φ_a und Φ_b ; und damit ist die Behauptung erwiesen.

Das so bestimmte Paralleloeder Φ hat gemäß seiner Definition in O einen Mittelpunkt, seine Flächen α, α' sind paarweise parallel, ebenso sind die durch $(\alpha\beta)$ und $(\alpha'\beta')$ bestimmten Kanten parallel und offenbar auch gleich lang. Hierzu kommt als wichtigste Eigenschaft noch die, daß die begrenzenden *Polygone selbst einen Mittelpunkt und parallele Kanten besitzen*¹⁾. Sie ist für die Paralleloeder charakteristisch und kann

¹⁾ Sie kommt keineswegs allen Paralleleflächern zu. Schneidet man von einem Würfel an jeder Ecke durch eine vom Zentrum O gleich weit entfernte Ebene die Ecke ab, so entsteht ein Paralleleflächner. Er ist aber kein Paralleloeder; die an den Ecken sich bildenden Flächen sind Dreiecke.

folgendermaßen bewiesen werden. Sei α (Fig. 249) eine Grenzfläche des Paralleloeders, und OK die Strecke, auf der die Ebene α in K_m senkrecht steht, so ist K_m ein Inversionszentrum für das Gitter. Durch Inversion gegen K_m gehen also alle Paralleloeder ineinander über; insbesondere das Paralleloeder Φ in das den Punkt K umgebende Paralleloeder Φ_k . Dabei geht die in der Ebene α enthaltene gemeinsame Grenzfläche beider Polyeder *in sich über*; sie ist daher ein konvexes Polygon mit K_m als Mittelpunkt, und das ist die Behauptung.

Über die Gestalt des Bereiches Φ läßt sich folgendes aussagen. Seien η und α zwei seiner Flächen, die sich in einer Kante ($\eta\alpha$) schneiden; OH und OK seien die Gitterstrecken, auf denen sie senkrecht stehen, H_m und K_m ihre Mitten (Fig. 250). Sie bestimmen mit O eine Ebene ε , die eine Netzebene des Gitters Γ_z ist und auf der die beiden Ebenen η und α senkrecht stehen; das in ε enthaltene Punktnetz sei $\mathfrak{N}$. Die Punkte H_m, K_m usw. sind Inversionszentra für die Paralleloeder Φ .

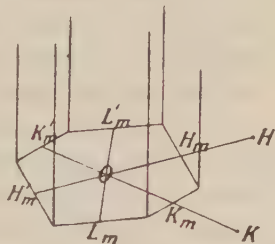


Fig. 250

Jede dieser Inversionen führt die Ebene ε *in sich über*, und daher die Schnittpolygone der Bereiche Φ mit ε ineinander. Fassen wir nur die Schaar der Bereiche Φ ins Auge, die von ε geschnitten werden, so sind es also deren Schnittpolygone, die durch alle die genannten Inversionen ineinander übergehen. Nun gehört zu dem in ε enthaltenen Punktnetz $\mathfrak{N}$ gemäß § 1 eine Teilung in analoge konvexe ebene Bereiche, die durch jede der genannten Inversionen ineinander übergehen; daher müssen diese Bereiche mit den Schnittpolygonen identisch sein. Das Paralleloeder Φ schneidet also die Ebene in dem sechseckigen Bereich ϕ von § 1. Sein Umfang enthält außer den Punkten H_m, H'_m, K_m, K'_m noch ein drittes Punktepaar L_m, L'_m , das ebenfalls Inversionszentra für die Paralleloeder der Φ darstellt, und daraus ist zu schließen, daß auch die zu L_m und L'_m gehörigen Normalebenen λ, λ' auf ε senkrecht stehen. Es bilden also die sechs Ebenen $\eta, \eta', \alpha, \alpha', \lambda, \lambda'$ eine sechsflächige auf ε senkrechte Zone. Dies gilt für *jede* solche Ebene ε .

Umgekehrt folgt, daß eine Ebene ε , der eine solche Zone Z zugehört, die Punkte A_m, A_m' eines jeden Flächenpaares α, α' von Φ enthält, das von ihr geschnitten wird.

§ 4. Die verschiedenen Paralleloedertypen. Sonderfälle des Vierzehnflächners können sich so ergeben, daß gewisse seiner Flächenpaare sich auf Null reduzieren. Diese Flächen sind die Normalebenen $\alpha, \beta, \dots$, sie enthalten Polygone, deren Mittelpunkte die Punkte $A_m, B_m \dots$ sind. Wir wollen den Prozeß ins Auge fassen, dem das Polygon der Ebene α unterliegt, wenn es allmählich verschwindet. Er kann ein zweifacher sein, das Polygon kann sich entweder auf den Punkt A_m selbst zusammenziehen, oder auf eine durch A_m gehende Gerade; im letzten Fall gehen zugleich zwei parallele Kanten ($\alpha\beta$) und ($\alpha\gamma$) des Polygons in eine und dieselbe durch A_m gehende Kante über. Sie soll eine *singuläre Kante* heißen; nach dem vorstehenden ist sie gemeinsamer Schnitt dreier Ebenen α, β, γ und zwar so, daß sie den Punkt A_m des Gitters Γ_m enthält. Dagegen ziehen sich im ersten Fall *alle* in der Ebene α enthaltenen Polygonkanten auf A_m zusammen; es gehen mehr als drei Normalebenen durch einen Punkt, und dieser Punkt ist zugleich ein Punkt A_m . Er soll eine *singuläre Ecke* des Bereichs Φ heißen. Wir werden *drei* Paralleloeder mit singulären Kanten und *eines* mit singulären Ecken kennen lernen.

Wir gehen dazu von den in § 3 betrachteten sechsflächigen Zonen aus. Reduziert sich eine ihrer Flächen auf eine Kante, so wird die Zone vierflächig, es wird daher der in der Ebene ε liegende Bereich φ ein rechtwinkliger Bereich. Damit wird auch die Zone eine rechtwinklige, und nach § 1 folgern wir, daß alle ihre Kanten singuläre Kanten sind; wir nennen sie eine *singuläre Zone*, und die Ebene ε , auf der sie senkrecht steht, eine *singuläre Ebene*. Ein Paralleloeder kann nun entweder *keinerlei* singuläre Zone besitzen oder *eine* oder *mehrere*; möglicherweise kann auch *jede* Zone singulär sein. Der erste Fall ist der allgemeine; wir lernen noch, daß bei ihm jede Zone eine sechsflächige ist.

Um die *singulären* Fälle abzuleiten, knüpfen wir an die in § 2 betrachtete Ebene ε an, die die kleinsten Translationen

OA und OB enthält, und nehmen zunächst an, daß die zu ihr gehörige Zone Z *nicht* singulär, also sechsflächig ist. Sei ε_1 eine Ebene, für die sich eine singuläre Zone einstellt, und φ_1 das in ε_1 enthaltene Schnittpolygon, das also ein Rechteck ist; zu ihm kann nach dem Schluß von § 3 nur *ein* Paar Gegenflächen der Zone Z ein Seitenpaar liefern. Die Ebene ε_1 muß daher zu den Kanten der Zone Z parallel laufen, also auf ε senkrecht stehen, und weil das Polygon φ_1 ein Rechteck ist, folgt nun weiter, daß das Paralleloeder Φ nur noch von zwei weiteren und zwar horizontalen Flächen begrenzt sein kann. Dies liefert als mögliche Gestalt einen *Achtflächner*, begrenzt von der sechsflächigen Zone Z und zwei horizontalen Sechsecken; er ist die Verallgemeinerung desjenigen, der dem hexagonalen Gitter (§ 2) entspricht. Offenbar besitzt er drei singuläre Zonen; jede Seite eines der beiden Sechsecke ist eine singuläre Kante.

Sei zweitens die vertikale Zone Z eine *singuläre*, also φ ein Rechteck. Dann ist zunächst der Fall möglich, daß es noch andere singuläre Zonen gibt. Wir erkennen dann genau wie vorher, daß jede Ebene ε_1 , die zu einer solchen singulären Zone Anlaß gibt, auf ε senkrecht steht, und das Paralleloeder hat wiederum außer den Flächen der Zone Z nur noch zwei horizontale Grenzflächen. Es ist ein rechtwinkliges Parallelepipeton, also ein *Sechsfächner*, und *jede* seiner Kanten ist eine singuläre.

Es bleibt also nur noch der Fall übrig, daß die Zone Z die *einzige* singuläre ist. Dann reduzieren sich nur zwei vertikale Grenzflächen auf Null, während alle anderen Flächen erhalten bleiben. Über und unter der rechtwinkligen Zone Z sind also noch je vier Flächen von Φ vorhanden. Sie schneiden sich aber jetzt in je *einem und demselben* Punkt, bilden also in ihm eine vierseitige Ecke und reduzieren sich sämtlich auf Parallelogramme. Dies kann man erkennen, wenn man den gestaltlichen Prozeß verfolgt, der die sechsflächige Zone Z in die vierflächige übergehen läßt; man schließt es aber auch aus den bekannten Polyederformeln¹⁾. Wir finden also einen

¹⁾ Hier kommt zunächst die Eulersche Formel

$$e + f = k + 2$$

in Frage; e Zahl der Ecken, f Zahl der Flächen, k der Kanten. Ist a_4

Zwölfflächner, der von vier Sechsecken und acht Vierecken begrenzt wird. Er ist ein verlängertes Rhombendodekaeder; man kann ihn aus einem Rhombendodekaeder entstehen lassen, indem man es längs einer durch sein Zentrum gehenden Würfel-ebene aufschneidet (z. B. längs einer vertikalen Ebene) und zwischen beide Hälften einen prismatischen Körperteil einschaltet (Fig. 251).

Wir haben endlich noch den Fall der *singulären* Ecken zu erledigen; ihm entspricht ein Paralleloeder, das eine zum Rhombendodekaeder analoge Gestalt besitzt. Wir gehen jetzt

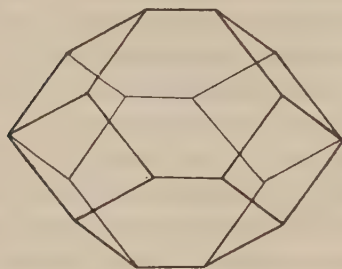


Fig. 251

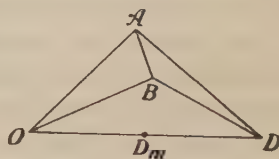


Fig. 252

von den in § 3 betrachteten Gitterstrecken OA , OB , OD und dem durch sie bestimmten Tetraeder aus; wir wissen, daß die normalen Mittelebenen der sechs Kanten dieses Tetraeders sich im Mittelpunkt der dem Tetraeder umschriebenen Kugel schneiden.

die Zahl der Vierecke und a_6 die Zahl der Sechsecke, so bestehen weiter die Gleichungen

$$a_4 + a_6 = f, \quad 4a_4 + 6a_6 = 2k;$$

endlich gilt für die allgemeinen Polyeder mit nur dreiseitigen Ecken die Formel $3e = 2k$. Mit ihrer Hilfe geht die zweite der vorstehenden Gleichungen in $2a_4 + 3a_6 = k$ über, und die Eulersche Gleichung in $3f = k + 6$. Für den Vierzehnflächner ergeben sich daraus die Werte $a_4 = 6$, $a_6 = 8$. Für ein Paralleloeder von 12 Grenzflächen, das nur dreiseitige Ecken enthält, würden die Gleichungen

$$a_4 + a_6 = 12, \quad 2a_4 + 3a_6 = k = 30$$

bestehen; sie geben als Lösung $a_4 = 6$, $a_6 = 6$. Das Paralleloeder müßte also sechs Vierecke enthalten, unter den über und unter Z liegenden Grenzflächen müßten also je drei Vierecke und ein Sechseck enthalten sein. Das verstößt aber gegen seine gestaltliche Symmetrie.

Eine singuläre Ecke ist dann vorhanden, wenn dieser Schnittpunkt in eine Tetraederkante fällt.

Ist OD diese Kante (Fig. 252), also D_m das Kugelzentrum, so sind OAD und OBD rechte Winkel und die in den Ebenen OAD und OBD liegenden Netze sind rechtwinklig. In D_m bildet sich eine vierkantige Ecke; es stoßen in D_m sechs Bereiche Φ zusammen und für *jeden* von ihnen ist D_m eine singuläre Ecke. Diese Ecken sind aber *keine homologen* Ecken dieser Bereiche, sie stellen vielmehr drei verschiedene Eckengattungen dar, und es kommen daher jedem Bereich Φ drei singuläre Eckenpaare zu. Damit ist er in der Tat als eine Verallgemeinerung des Rhombendodekaeders erwiesen. Er ist ein *Zwölfflächner*, dessen Grenzflächen sämtlich Parallelogramme sind.

§ 5. Die Fundamentalbereiche der allgemeinsten regelmäßigen Strukturen. Die Zerlegung des Raumes in Fundamentalbereiche Φ , die in gleicher Weise alle Punkte eines Gitters umgeben und durch die Translationen des Gitters ineinander übergehen, läßt sich auf jede regelmäßige Anordnung übertragen. Ist O irgend ein Punkt einer regelmäßigen Struktur Σ , so wird es wiederum einen ihm nächsten Punkt A geben, freilich *gehört der Struktur im allgemeinen sein Gegenpunkt A' nicht mehr an*. In der Mitte A_m von OA konstruieren wir wieder die Normalebene α . Seien B, C, D die zu O zunächst gelegenen Punkte, B_m, C_m, D_m die Mitten von OB, OC, OD , und β, γ, δ die zugehörigen Normalebenen, so bilden die vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bereits ein Tetraeder von der Art, daß O im Innern liegt, A_m, B_m, C_m, D_m auf den Seitenflächen und A, B, C, D außerhalb. Gibt es im Innern von ihm noch einen Punkt E_m , so legen wir durch E_m die zugehörige Normalebene ε ; sie schneidet vom Tetraeder einen konvexen Teilbereich ab, und wir setzen dies so lange fort, bis der sich bildende Bereich derartige Punkte in seinem Innern nicht mehr enthält. Er stellt dann wieder einen den Punkt O umgebenden konvexen Fundamentalbereich Φ dar; auch ist wieder jede seiner Flächen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ zugleich Grenzfläche der um A, B, C analog konstruierten Bereiche $\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c \dots$. Die Bereiche sind aber im allgemeinen keine Parallelfächner; sie behalten jedoch die Eigen-

schaft, den Raum lückenlos zu erfüllen. Ebenso gehen sie durch jede zur Struktur Σ gehörige Deckoperation $\mathcal{Q}$ in sich über. Setzen wir insbesondere voraus, daß die Struktur aus einem Baustein allgemeiner Lage entstanden ist, so wird die Operation $\mathcal{Q}$ jeden Bereich in einen *andern* Bereich überführen. Diese Bereiche Φ bilden die *zur Struktur Σ gehörige regelmäßige Raumteilung*; alle Bausteine der Bereiche Φ befinden sich in ihnen an *homologen* Stellen. Man erhält also die Struktur, wenn man an homologe Stellen der sämtlichen Bereiche je einen identischen Baustein (oder Bausteincomplex) einsetzt¹⁾. Innerhalb des Bereiches Φ mag also der Kristallograph schalten und walten wie er mag, oder wie es die praktischen Bedürfnisse verlangen — immer wird die so entstehende Struktur die Symmetrie aufweisen, die der Gruppe Γ entspricht, von der man ausgeht. Fedorow hat die so definierten Bereiche Φ als *Stereoöder* bezeichnet.

Wie wir in Kap. XII, § 9 erkannten, ist eine jede Struktur parallelepipedisch aufgebaut; sie geht aus den N Bausteinen der Stammfigur Π_0 hervor, wenn man die Bausteine den sämtlichen Translationen von Γ_τ unterwirft, wo Γ_τ das Gitter der Gruppe Γ ist, der die Struktur entspricht²⁾. Nun ist jeder dieser N Bausteine in einem der Polyeder Φ enthalten, die wir soeben konstruktiv ableiteten. Diese N Polyeder bilden zusammen ein Gesamtpolyeder Ψ , und es ist klar, daß auch diese Polyeder Ψ den Raum parallelepipedisch erfüllen; ihre Gesamtheit entsteht also, wenn wir eines von ihnen den sämtlichen Translationen des Gitters Γ_τ unterwerfen. Das Polyeder Ψ hat daher zu den Translationen des Gitters Γ_τ die gleiche Beziehung, wie die Stammfigur Π_0 ; ein Unterschied besteht nur in der Gestalt. Das Polyeder Ψ braucht übrigens im allgemeinen nicht konvex zu sein; die N Bereiche Φ , aus denen es besteht, können sich auch so aneinanderlegen, daß an den Kanten und Ecken überstumpfte Winkel entstehen.

¹⁾ Im Interesse einer kurzen Ausdrucksweise soll im folgenden nur von „Bausteinen“ gesprochen werden.

²⁾ Der Verband dieser N Bausteine wird als „N-Punktner“ bezeichnet.

Ist die Struktur Σ aus einem symmetrischen Baustein μ entstanden, so ergeben sich Besonderheiten, die in Kürze aufgeführt seien:

1) Nach Kap. XII, § 11 enthält die Stammfigur Π_0 statt der N Bausteine jetzt nur ν , wenn $N = n\nu$ ist und n die Ordnung der Eigensymmetrie des Bausteins μ , also die Ordnung seiner Symmetriegruppe G_μ . Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Symmetriegruppe G_μ nur Achsensymmetrie enthält, so werden sich an jeder Stelle P , an der ein Baustein μ steht, alle Achsen einer Gruppe G_μ schneiden. Dies ist eine unmittelbare Folge der Regelmäßigkeit; Beispiele lassen sich in beliebiger Menge aus den Tabellen und den Achsenfiguren entnehmen.

2) Die Bausteine μ besitzen eine regelmäßige Anordnung; wir können daher die sie umgebenden Fundamentalbereiche konstruieren. Diese Bereiche Φ_μ sind jetzt symmetrisch, und zwar besitzen sie ebenfalls die Symmetrie der Gruppe G_μ . Ist nämlich μ_0 ein bestimmter Baustein, ist Φ_μ^0 der ihn umgebende Bereich, und $\mathfrak{U}_0$ eine Drehung um eine durch μ_0 gehende Achse von G_μ , so ist diese Drehung eine Deckoperation der Struktur, und zwar eine, die μ_0 in sich überführt. Ebenso ist sie eine Deckoperation für die Gesamtheit der Bereiche Φ_μ und muß insbesondere den Bereich Φ_μ^0 in sich überführen. Dem Bereich Φ_μ kommt daher in der Tat die gleiche Symmetrie G_μ zu, wie dem Baustein μ , und dies gilt offenbar auch dann noch, wenn in G_μ nicht ausschließlich Achsensymmetrie auftritt.

3) Die ν Bereiche Φ_μ , die den ν symmetrischen Bausteinen von Π_0 entsprechen, können wir wieder zu einem Polyeder Ψ zusammenfassen und erkennen wie oben, daß diese Polyeder Ψ den Raum parallelepipedisch erfüllen, und daß von ihnen alles gilt, was wir im allgemeinen Fall für die Polyeder Ψ abgeleitet haben.

4) Das symmetrische Polyeder Φ_μ kann in n Polyeder Φ allgemeiner Art aufgelöst werden. Diese n Polyeder müssen offenbar eine solche Lage haben, daß sie durch die n Operationen der Gruppe G_μ auseinander hervorgehen, sie müssen also zusammen den symmetrischen Bereich Φ_μ ausmachen.

5) Endlich noch eine Bemerkung, die sich auf die Bereiche Φ allgemeiner Lage bezieht. Eine Drehungsachse oder

eine Symmetrieebene (Symmetriezentrum) kann niemals in einen solchen Bereich eindringen; die zugehörige Drehung oder Spiegelung (Inversion) muß ja den Bereich Φ in einen *andern* Bereich Φ gelangen lassen. Die Achsen und Symmetrieebenen (Symmetriezentra) einer Gruppe können daher *nur in die Oberflächen der Bereiche Φ* fallen, eine mehr als zweizählige Achse sogar nur in eine Kante¹⁾.

§ 6. Gitterhafte Kugelpackungen. Die Vorstellung, daß die Strukturen vielfach dem Streben nach dichtester Lagerung folgen, ist an sich naheliegend; sie kann auf die Bevorzugung der flächenzentrierten Gitter gestützt werden. Sir W. Thomson²⁾ und W. Barlow³⁾ haben von dieser Erwägung ausgehend dichteste Lagerungen von Kugeln in Betracht gezogen. Wir werden hier zunächst *alle gitterhaften Kugelpackungen* vorführen.

Wir behandeln zuvor das einfachere Problem der Lagerung von Kreisen. Es verlangt, Kreise von gleichem Radius in der

¹⁾ Fedorow hat die Strukturen in symmorph, hemisymmorph, und asymmorph eingeteilt; seine Einteilung hängt sachlich davon ab, in welchem Verhältnis die drei Fundamentalbereiche Φ , Φ_μ , Ψ zueinander stehen. *Symmorph* nennt er die Strukturen dann, wenn sich die N Fundamentalbereiche Φ allgemeiner Art so zu einem Gesamtpolyeder Ψ zusammenfassen lassen, daß dies ein *Paralleloeder*, also ein konvexer Körper mit Mittelpunkt ist. Alle Achsen und Symmetrieebenen der Gruppe gehen dann immer durch die Zentra dieser Paralleloeder. Diese Strukturen sind mit den Bravais'schen identisch. Der zweite Fall ist der, daß sich die Bereiche Φ so zu symmetrischen Polyedern Φ_μ zusammenfassen lassen, daß der Gesamtbereich Ψ nur aus *zwei* solchen Teilen Φ_μ besteht und daß außerdem diese beiden Polyeder Φ_μ durch Spiegelung oder Inversion ineinander übergehen. Es sind dann Φ_μ konvexe Polyeder, und es ist auch noch Ψ ein Parallelfächner, aber nicht mehr ein konvexer. Diese Gruppen und Strukturen sind die *hemisymmorph*. Die übrigen Strukturen sind die *asymmorph*. Bei ihnen besteht daher der Bereich Ψ entweder aus mehr als zwei konvexen Teilbereichen, oder aber, wenn es nur zwei sind, aus solchen, die nur durch Drehung oder Schraubung ineinander übergehen. Strukturen dieser Art hielt Fedorow nicht für wahrscheinlich. Zu ihnen gehören bereits Strukturen, die nur Achsensymmetrie enthalten, ohne aber Bravais'sche zu sein.

²⁾ Proc. Roy. Soc. Edinburg, Bd. 16 (1888/89), S. 712.

³⁾ Zeitschr. f. Kristallogr., Bd. 29 (1898), S. 433.

Ebene so anzuordnen, daß jeder Kreis einige Nachbarkreise berührt und die Mittelpunkte ein Punktnetz bilden. Die Verbindungslinie von zwei Kreismittelpunkten ist daher eine Translation des Netzes und jeder Berührungspunkt von zwei Kreisen ein Symmetriezentrum. Es folgt unmittelbar, daß die Translationen $2\tau_1$ und $2\tau_2$ des primitiven Paares einander gleich sein müssen, und wir erhalten als allgemeinste Lösung das Resultat, daß *die Kreiszentra ein rhombisches Netz bilden*.

Es gibt zwei Sonderfälle des rhombischen Netzes, das *quadratische* und das *gleichseitige*; beim ersten grenzt jeder Kreis an vier Nachbarkreise an, beim zweiten an sechs. Das erste entspricht offenbar der am wenigsten dichten (und damit labilsten) derartigen Lagerung, das zweite der dichtesten (und damit stabilsten). Auch ist klar, daß ein rhombisches Netz nur dann eine Kreislagerung mit auseinanderliegenden Kreisen liefert, wenn der spitze Winkel des Rhombus zwischen 60° und 90° liegt.

Die räumliche Verallgemeinerung unserer Fragestellung führt zu der Aufgabe, Kugeln von gleichem Radius so im Raum anzuordnen, daß jede Kugel einige Nachbarkugeln berührt und die Kugelzentra ein Punktgitter bilden. Jeder Abstand zweier Kugelzentren ist dann wieder eine Translation des Gitters und jeder Berührungspunkt zweier Kugeln ein Inversionszentrum.

Wir erkennen als allgemeinste Lösung ein Gitter, dessen primitives Tripel aus drei gleichen Translationen besteht, naturgemäß mit solchen Winkeln, daß der Aufbau praktisch möglich ist.

Von den Sonderfällen sind diejenigen von besonderem Interesse, in denen das Gitter symmetrisch ist; es sind die folgenden:

1) Der *rhomboedrische* Fall; jede Kugel wird von *sechs* Nachbarkugeln berührt, einen Sonderfall hiervon bildet wieder die *kubische* Packung. Jede Ecke des Gitters ist mit einer Kugel besetzt, deren Radius die halbe Rhomboederkante oder Würfelkante ist. Wir haben in diesen Packungen die labilsten gitterhaften Packungen vor uns.

2) Die Packung des *hexagonalen* Gitters; in den horizontalen Ebenen bilden die Kugeln die dichteste Packung, die dem horizontalen Netz entspricht; die dritte Translation des Gitters

verläuft vertikal. Jede Kugel wird von acht Nachbarkugeln berührt.

3) Die dem *körperzentrierten kubischen* Gitter entsprechende Packung; wir erhalten sie, indem wir in jede Würfecke und in die Würfelmitte je eine Kugel setzen, deren Radius gleich dem vierten Teil der Würfeldiagonale ist. Jede Kugel wird von *acht* Nachbarkugeln berührt, die Mittelpunktkugel von den acht Eckenkugeln und jede Eckenkugel von den Mittelpunktkugeln der acht Würfel, die in dieser Ecke zusammenstoßen¹⁾.

4) Die Packung des *flächenzentrierten kubischen* Gitters; sie entsteht, wenn wir in jede Ecke und jede Flächenmitte eines Würfels Kugeln setzen, deren Radius gleich der halben Flächendiagonale ist. Ein anschauliches Bild dieser Packung erhalten wir am besten so, daß wir von dem rhomboedrischen Charakter des Gitters ausgehen und die Lagerung in der Ebene GHK in Betracht ziehen (Fig. 67 und 68, S. 165). Sie enthält auch die Würfecken A, B, C und schneidet daher die Kugelpackung in einem gleichseitigen Kreisnetz, das die oben erörterte dichteste Kreislagerung darstellt. Das gleiche gilt von der Diagonalebene $G'H'K'$ des Gitters, wenn G', H', K' die Zentra der drei Flächen sind, die in der Gegenecke O' von O zusammenstoßen. Wie die Kugel um O die drei Kugeln um G, H, K berührt, so berührt sie auch die analogen Punkte der übrigen in O zusammenstoßenden Oktanten. Sie berührt daher insgesamt *zwölf* Nachbarkugeln. Wir haben die *dichteste* Packung vor uns. Wir erhalten sie auch, wenn wir, der praktischen Kugellagerung entsprechend, über die erste Schicht gleichseitig gelagerter Kugeln eine zweite in der Weise legen, daß die neuen Kugelzentra über die Mitten der in der unteren Ebene vorhandenen Lücken fallen, ebenso dann die dritte usw. Doch werden wir alsbald sehen, daß sich auf diese Weise nicht immer die genannte Lagerung einstellt.

§ 7. **Allgemeinere Kugelpackungen.** Die Annahme, daß die Symmetrie eine selbstverständliche Eigenschaft aller Kreislagerungen und Kugelpackungen sei, würde nicht zutreffen. Für

¹⁾ Beim körperzentrierten Gitter kommt den Ecken und dem Zentrum die gleiche Bedeutung zu (vgl. S. 142).

die Kreislagerungen ergaben sich im vorstehenden allerdings nur rhombische und rechteckige Netze, aber schon die Kugelpackung, die einem Gitter mit drei gleichgroßen Translationen $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ entspricht, hat im allgemeinen weder Symmetrieachsen noch Symmetrieebenen.

Um zunächst Kreislagerungen zu erhalten, die keinem symmetrischen Punktnetz entsprechen, kann man folgendermaßen vorgehen. Kreise, die sich berühren, können außer durch Translation auch durch Inversion gegen ihren Berührungspunkt ineinander übergehen, oder auch durch Spiegelung gegen die gemeinsame Tangente. Wir wollen die Inversion als Deckoperation in Betracht ziehen. Da wir uns nur mit *regelmäßigen* Lagerungen beschäftigen, so bilden alle Deckoperationen der Kreislagerung eine Gruppe, in ihr gibt es Translationen, und diese bilden ein Punktnetz. Das Punktnetz besitzt, auch wenn es im Sinn von S. 144 unsymmetrisch ist, doch Inversionen, und diese müssen den Ausgangspunkt unserer Konstruktionen bilden.

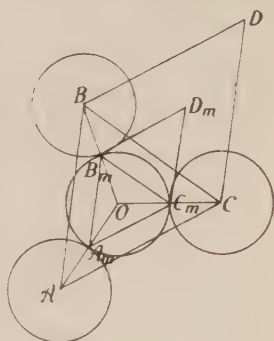


Fig. 253

Seien A_m, B_m, C_m (Fig. 253) die drei in § 1 benutzten Inversionszentra des Netzes, sei k der ihnen umschriebene Kreis und O sein Mittelpunkt; er liegt im *Innern* des Dreiecks $A_m B_m C_m$, und die drei Winkel im Punkt O sind stumpf. Vervollständigen wir also das Dreieck zum Parallelogramm, so liegt die vierte Ecke D_m außerhalb des Kreises. Zeichnen wir jetzt die Kreise k_a, k_b, k_c , die aus k durch die Inversionen $\mathfrak{I}_a, \mathfrak{I}_b, \mathfrak{I}_c$ gegen A_m, B_m, C_m hervorgehen, so liegen sie sämtlich außerhalb von k und außerhalb voneinander. Ihre Mittelpunkte A, B, C bilden ein Dreieck, dessen Seiten die doppelte Länge haben wie die Seiten von $A_m B_m C_m$, und daher Translationen des Netzes darstellen. Ergänzen wir nun noch das Dreieck ABC in der Weise zum Parallelogramm $ABCD$, daß der Punkt D zu ABC so liegt, wie D_m zu $A_m B_m C_m$, so bildet es eine Stammfigur des Netzes, und wenn wir auf die Kreise k, k_a, k_b, k_c alle Netz-

translationen ausüben oder in die Ecken eines jeden Netzparallelogramms π' und in die zu O homologen Punkte O' Kreise k_a', k_b', k_c', k' einsetzen, so ist die Kreislagerung vorhanden. Die Kreise gehen durch Inversion gegen ihre Berührungspunkte und durch die eben bestimmten Translationen ineinander über¹⁾. Jeder Kreis wird von drei Nachbarkreisen berührt; unter den Inversionszentren des Netzes gibt es aber eine Schaar (D_m), die nicht auf den Kreis k und die homologen (k') fällt, aber doch auch Symmetriezentra für die ganze Lagerung bildet²⁾. Die Gruppe, der diese Lagerung entspricht, ist die monokline Gruppe $\mathcal{C}_2^1$, wenn wir in ihr $\tau_z = 0$ setzen; ihre Achsen a, b, c, d gehen durch A_m, B_m, C_m, D_m . Durch Symmetrisierung des monoklinen Netzes ergeben sich hieraus symmetrische Kreislagerungen. Doch ist es ohne näheres Interesse, im einzelnen auf sie einzugehen, es sollte sich hier nur um Vorführung des allgemeinsten Typus handeln.

Ganz analog ist es im Raum. Sei Γ_τ irgend ein Gitter, und seien A_m, B_m, C_m, D_m die in § 3 benutzten Inversionszentra, die ausdrücklich so angenommen werden sollen, daß die Mitte O der ihnen umschriebenen Kugel k im Innern des Tetraeders liegt. Wir konstruieren die Kugeln k_a, k_b, k_c, k_d , die aus k durch Inversion gegen A_m, B_m, C_m, D_m hervorgehen, und haben in ihnen vier Kugeln, die sowohl außerhalb von k wie außerhalb voneinander liegen. Ergänzen wir wieder das Tetraeder $ABCD$ zum Parallelepipeton Π_0 , und zwar so, daß die Tetraederebene, die außerhalb der Kugel k verläuft, eine Diagonalebene von Π_0 ist, so bildet Π_0 eine Stammfigur des Gitters, und wenn wir in jeden Gitterpunkt und in jeden zu O homologen Punkt Kugeln $k_a', k_b', k_c', k_d', k'$ einsetzen, so läßt sich wie vorher beweisen, daß damit eine regelmäßige Kugelpackung vorhanden ist.

¹⁾ Will man das Netz so zeichnen, daß die Punkte A_m, B_m, C_m, D_m die übliche Lage in ihm haben, so sind A_mB_m und A_mC_m um sich selbst bis B_m' und C_m' zu verlängern und $A_mB_m'C_m'$ durch D_m' zum Parallelogramm zu ergänzen. Der Punkt B_m' liegt auf k_b und C_m' auf k_c .

²⁾ Es ist allerdings zu beweisen, daß D_m nicht in das Innere eines Kreises fällt, also CD_m größer als der Kreisradius ist. Schneidet die Strecke C_mD_m den Kreis k_c nicht, so ist offenbar $CD_m > CC_m$. Schneidet sie ihn, und ist D_m' der Schnittpunkt, so ist $CD_m > CD'_m$.

Jede Kugel wird von vier Nachbarkugeln berührt. Auch hier soll es sich nur um die Aufdeckung des allgemeinsten Typus handeln. Das Gitter Γ_z dieser Kugelpackung ist symmetrielos. Es gibt auch Kugelpackungen, bei denen jede Kugel von fünf Nachbarkugeln berührt wird. Daß diese Zahl auch 6, 8, 12 betragen kann, zeigen die Kugelpackungen des vorigen Paragraphen.

Eine besondere nicht gitterhafte regelmäßige Packung sei noch genannt. Sie ist eine *dichteste* Packung und ist zuerst von Barlow (a. a. O.) und später von A. Johnsen behandelt worden¹⁾. Sie wird auch als *hexagonale dichteste Kugelpackung* bezeichnet²⁾. Sie entsteht durch eine einfache Abänderung der

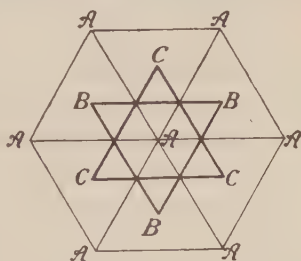


Fig. 254

Dann kommt die dichteste Lagerung von S. 518 so zustande, daß die Kugelmitten der zweiten Schicht über die Punkte *B* fallen, die der dritten über die Punkte *C*, die der vierten wieder über die Punkte *A* usw. Die Barlowsche Packung kommt dagegen so zustande, daß die Kugeln der zweiten Schicht wie vorher über die Punkte *B* fallen, die der dritten aber über die Punkte *A*, die der vierten wieder über die Punkte *B* usw. Die Packung kann auch so erzeugt werden, daß man über die erste Schicht wie vorher eine zweite legt, dann die Kugeln der zweiten Schicht an der Ebene der ersten Schicht (also der Ausgangsebene) spiegelt, und dies weiter fortsetzt. Sie entspricht der Figur 229 der Gruppe $\mathcal{D}_{6h}^3$, in der nach der Tabelle von S. 457 die Punkte *B*, *C'*, und *B'*, *C* gleichwertig sind. Sie hat (S. 530) alle Zentraebenen als Symmetrieebenen, alle vertikalen

¹⁾ Centralbl. für Min., Geol. u. Paläont., 1909, S. 302.

²⁾ Vgl. A. W. Hull, Phys. Rev., Bd. 10 (1917), S. 678.

Achsen durch die Punkte B und C als dreizählige Drehungsachsen, alle Achsen durch O und die Ecken des gleichseitigen Netzes zu sechszähligen Schraubenachsen mit der Translation τ_z , endlich in F_m ein Symmetriezentrum.

Zu weiteren Kugelpackungen kann man so gelangen, daß man von vornherein von der Gleichwertigkeit der Kugeln absieht. Derartige Packungen hat W. Barlow a. a. O. behandelt. Es mag genügen, die Grundgedanken an dem einfachen Beispiel der kubischen Lagerung zu veranschaulichen. Jede Würfecke ist bei ihr Sitz eines Kugelzentrums. Es bleiben aber Würfelmitten, Flächenmitten und Kantenmitten außerhalb jeder Kugel. Wir können also auch in sie Kugeln setzen, die die schon vorhandenen berühren, und erhalten so eine Kugellagerung kubischer Symmetrie mit *vier* ungleichwertigen Ausgangskugeln, die auch verschiedene Größe haben. Man kann aber auch die in den Ecken befindlichen gleich großen Kugeln teilweise als verschieden betrachten. Die Tabelle B (S. 496) zeigt z. B., daß eine Spaltung in zwei verschiedene Gruppen von je vier Kugeln möglich ist, so daß nur die Kugeln O, G, H, K und die Kugeln D, E, F, M untereinander gleichwertig sind, wie es bei den Gruppen $\mathfrak{D}^4, \mathfrak{D}_h^5$ und anderen der Fall ist. Jeder Zerlegung der acht Würfecken in mehrere gleichwertige Gruppen, die in den Tabellen erscheint, entspricht eine analoge Kugellagerung, und wir entnehmen der Tabelle zugleich die Raumgruppen, denen solche Kugellagerungen entsprechen. Auch die vorstehende hexagonale Packung gehört hierher, da bei ihr nur B mit C' und B' mit C gleichwertig ist. Auf diesem Grunde lassen sich Barlowsche Kugellagerungen mit ungleichwertigen Kugeln in vielfacher Weise herstellen.

Kap. XX. Anwendungen und Beispiele

§ 1. Allgemeine Gesichtspunkte. Die praktische Ermittlung der Struktur eines Kristalls¹⁾ ruht in erster Linie auf dem Röntgenverfahren; es gibt die Anhaltspunkte für die Lagerung der Atome in der Stammfigur H_0 . Die Lagerung ist

¹⁾ Das der Struktur zugrundeliegende Punktsystem wird meist als *Kristallgitter* bezeichnet.

das Produkt aller ins Spiel tretenden physikalischen und chemischen Kräfte. Ihre Angabe und Deutung, ihre Anpassung an Erfahrung und Versuch, die Frage, ob die treibenden Impulse ihren Sitz in den Atomen oder Atomkomplexen (Baugruppen) haben, alles dies liegt jenseits des Programms dieser Darstellung. Sie hat den alleinigen Zweck, den Aufbau des mathematischen Gerüstes zu liefern, von dem aus das Studium der Kristallstruktur heute erfolgt, und auf die Folgen hinzuweisen, die sich für die einzelnen Strukturen kraft geometrischer Notwendigkeit daraus ergeben. Dem sollen auch die Tabellen und Achsenfiguren dienen. Sie lassen in erster Linie die Eigensymmetrie der Bausteine erkennen, also die Symmetrie, die ihrem dynamischen Wirken notwendig beizulegen ist¹⁾. Sie werden dem Kristallographen aber auch zeitliche und gedankliche Arbeit ersparen können, wenn er für den Aufbau der Strukturen gewisse Annahmen oder Tatsachen über die Kristallsymmetrie, die Eigensymmetrie der Bausteine, ihre Anzahl in der Stammfigur usw. zugrunde legen kann²⁾. Daß in der Eigensymmetrie, die der Wirkungsweise der Bausteine zukommt, eine wesentliche Erklärung für ihr Zusammentreten zu dieser oder jener Strukturform zu suchen ist, ist eine Vorstellung, die im Lauf des wissenschaftlichen Fortschreitens immer festere Formen angenommen hat; im steten Anschluß an die allgemeinen Annahmen und Kenntnisse, die sich über die atomistische Konstitution der Materie ausgebildet haben³⁾.

§ 2. Gleichwertige Punktlagen. Ist irgend eine Stelle eines Strukturbildes mit einem Baustein μ besetzt, so muß es auch jede zu ihm gleichwertige Stelle sein; *dies ist die grundlegende Tatsache, die gemäß der Theorie der regelmäßigen Anordnung hier an die Spitze zu stellen ist.*

¹⁾ A. Johnsen bezeichnet diese Symmetrie, also die Symmetrie der Gruppe G_μ , als *minimale Atomsymmetrie*.

²⁾ Näheres in § 8 und § 9. Betonung und Angabe der Eigensymmetrie erscheint in umfassender Weise zuerst in der „geometrischen Kristallographie des Diskontinuums“ von Niggli.

³⁾ Hierfür ist in erster Linie der zeitige Nestor der kristallographischen Wissenschaft P. v. Groth zu nennen.

Sei nun G eine Punktgruppe und N ihre Ordnung (die Zahl ihrer Operationen); sei Γ eine zu G isomorphe Raumgruppe, Γ_τ ihr Gitter und Σ eine ihr entsprechende Struktur. Die Struktur ist so geformt (Kap. XII, § 9), daß die Stammfigur Π_0 des Gitters von jeder einzelnen Bausteingattung je N gleichwertige Punkte allgemeiner Art enthält; sie bilden die *Basis* der Struktur, aus der alle übrigen Punktlagen durch die Translationen des Gitters Γ_τ hervorgehen. Die Zahl N verringert sich für Bausteine mit *Eigensymmetrie*. Ist n die Zähligkeit der Eigensymmetrie (die Ordnung der Gruppe G_μ), so sind in Π_0 nur ν Bausteine enthalten, wenn

$$N = n\nu$$

ist. Das Gitter Γ_τ kann zentriert oder unzentriert sein; für die hier in Betracht kommenden zahlenmäßigen Feststellungen ist es aber zweckmäßig, die Zahl der gleichwertigen Punktlagen einheitlich in der *unzentrierten* Stammfigur in Betracht zu ziehen; *wir werden also unter Π_0 von nun an stets die unzentrierte Stammfigur verstehen*. Besitzt die Gruppe Γ ein flächenzentriertes Gitter, so liegen in der unzentrierten Stammfigur Π_0 insgesamt $4N$ gleichwertige Punkte; ist es eines der beiden andern zentrierten Gitter, so sind es $2N$, das Produkt $n\nu$ hat daher für die drei Gitter die Werte

$$n\nu = N, \quad n\nu = 2N, \quad n\nu = 4N.$$

Auch über die Stammfigur selbst sind einige Vorbemerkungen nötig. Sie ist durch das primitive Tripel bestimmt. Bei den rhombischen und kubischen Gruppen ist dies Tripel durch die drei Richtungen τ_x, τ_y, τ_z eindeutig festgelegt; wesentlich analog ist es bei den hexagonalen Gruppen. Bei den tetragonalen Gruppen konnten wir (S. 381) die Translationen τ_x, τ_y, τ_z auf zwei verschiedene Arten wählen; dem entsprach die doppelte Auffassung des Gitters Γ'_q als körperzentriert und flächenzentriert, und dies macht bei einzelnen Gruppen seinen Einfluß geltend. Beim rhomboedrischen Gitter ist das Tripel ebenfalls eindeutig bestimmt. Die Translationsrichtung τ_z ist durch die dreizähligen Achsen gegeben, und die Translationen $2\tau_l, 2\tau_m, 2\tau_n$ haben die doppelte Eigenschaft, daß sie erstens mit τ_z kleinste Winkel

bilden, und daß zweitens ihre Projektionen auf τ_s einen kleinsten Wert haben. Operiert man also mit *zentrierten* rhomboedrischen Gittern, so bedeutet dies, daß man das primitive Tripel nicht gemäß der genannten Bestimmung gewählt hat. Dies wird eintreten können, wenn die Translationen $2\tau_l, 2\tau_m, 2\tau_n$ aus strukturellen Gründen von vornherein in bestimmter Weise angenommen werden mußten.

Unsere Tabellen geben die gleichwertigen Bausteinlagen mit Eigensymmetrie nur für den Oktanten p von Π_0 an; aus ihnen ist ihre Zahl und Lage in Π_0 selbst zu ermitteln. Hierüber seien zunächst einige allgemeine Tatsachen angeführt, die für alle Gruppen Geltung haben; sie betreffen die Punkte O, D, E, F, G, H, K, M .

1) Der Punkt O ist eine Ecke von Π_0 , zu ihm ist jede andere Ecke von Π_0 gleichwertig. Da aber jede Ecke acht Stammfiguren angehört, so zählen alle acht Punkte zusammen statt eines einzigen; wir wollen sagen, daß sie *einem einzigen Vollpunkt (VP) äquivalent sind*. 2) Der Punkt D ist eine Kantenmitte von Π_0 , zu ihm ist die Mitte jeder parallelen Kante von Π_0 gleichwertig. In jeder Kante stoßen vier Bereiche Π_0 zusammen, und so sind auch diese vier Punkte *einem VP äquivalent*. Dasselbe gilt für E und F . 3) Der Punkt G (ebenso H und K) ist eine Flächenmitte von Π_0 , zu ihm ist die Mitte der Gegenfläche gleichwertig. Die Fläche ist zwei Bereichen Π_0 gemeinsam, also ist G *einem VP äquivalent*. 4) Der Punkt M ist ein innerer Punkt von Π_0 ; er stellt an sich einen VP dar. Punkte anderer Oktanten der Stammfigur können ihm, da er ihr Zentrum ist, nicht gleichwertig sein.

§ 3. Gleichwertige Punkte bei den rhombischen Gruppen. Es sind nur die Gruppen mit flächenzentriertem Gitter Γ_v'' , über die wir eine allgemeinere Betrachtung anzustellen haben. Sie betrifft die im Innern des Oktanten p gelegenen Punkte M_m, M_m', M_m'' (S. 433). Zu ihnen gibt es *nicht in jedem andern* Oktanten der Stammfigur einen gleichwertigen Punkt, was sich analog auch auf gewisse Gruppen höherer Symmetrie mit flächenzentriertem Gitter überträgt. Die Achsen der Figur 144 b von $\mathfrak{B}^7$ (S. 320) führen nämlich M_m nur in *drei* Nachbar-

oktanten über, und zwar in die, die an p längs einer Kante angrenzen; der Punkt M_m bedingt also nur vier gleichwertige VP in der Stammfigur Π_0 . Die Zentra der anderen vier Oktanten von Π_0 — sie mögen N_m heißen — sind ebenfalls gleichwertig. Wir zeigen noch, daß dies mit den in § 2 genannten Beziehungen zwischen N, n, ν übereinstimmt. Der Punkt M_m hat bei der Gruppe $\mathfrak{B}^7$ die Eigensymmetrie V , es ist also $n = 4$, $\nu = 4$, und $n\nu = 16 = 4N$, wie nötig.

Von den Gruppen $\mathfrak{B}_h$ mit flächenzentriertem Gitter soll nur die Gruppe $\mathfrak{B}_h^{24}$ näher erörtert werden. Für die Punkte der Symmetrie V stellt sich bei ihr die folgende Rechnung ein. Es sind nach Tabelle C (S. 343) gleichwertig

$$1) O = G = H = K = M_m, \quad 2) D = E = F = M.$$

Hier zählen O, G, H, K je als ein VP , M_m als vier, was zusammen 8 VP liefert; da $n = 8$ ist, so resultiert $n\nu = 32$, wie nötig. Zu den Punkten 2) treten nach dem Vorstehenden noch vier Punkte N_m hinzu, und wir erhalten wiederum $n\nu = 32$.

Für die bei der Gruppe $\mathfrak{B}_h^{24}$ auftretenden Punkte M_m' gilt folgendes. Mit M_m' sind zunächst drei im Oktanten p selbst gelegene Punkte gleichwertig, nämlich (S. 433) die Punkte M''', N'', N'''' ; außerdem enthält wieder jeder der drei Oktanten, die längs einer Kante an p angrenzen, vier analoge Punkte. Wir haben daher 16 VP in Π_0 , jeder besitzt für $\mathfrak{B}_h^{24}$ die Symmetrie S_2 , und es folgt $n\nu = 32$.

§ 4. Gleichwertige Punkte bei den tetragonalen Gruppen. Wir betrachten hauptsächlich solche Gruppen, deren Achsenfiguren die gleichwertigen Punkte nicht unmittelbar erkennen lassen, und beginnen mit den Punkten der Symmetrie S_4 bei den Gruppen $\mathfrak{B}_d$. Es ist $n = 4$, $N = 8$. Je nachdem das Gitter in der Form Γ_v oder Γ_v', Γ_v''' oder Γ_v'' in Betracht zu ziehen ist, müssen sich also für $n\nu$ die Werte

$$n\nu = 8, \quad n\nu = 16, \quad n\nu = 32$$

ergeben, also für ν die Werte 2 oder 4 oder 8. Dies ist die Zahl der in Π_0 zu erwartenden Vollpunkte.

Die Gruppe $\mathfrak{B}_d^2$ enthält nach der Tabelle B (S. 424) die beiden ungleichwertigen Punkte F_m und G' ; das Gitter ist Γ_q .

Jeder von ihnen stellt nach § 2 je einen VP dar. Mit F_m ist (Fig. 203, S. 394) der um τ_z über F_m liegende Punkt gleichwertig; er stellt ebenfalls einen VP dar, und ebenso ist es für den Punkt, der um τ_z über G' liegt. Sowohl für F_m , wie für G' ergibt sich also, wie nötig $\nu = 2$.

Die Gruppen $\mathfrak{B}_d^3$ und $\mathfrak{B}_d^4$. Die Punkte D und E von $\mathfrak{B}_d^3$ bilden das eine Paar, H und K das andere Paar gleichwertiger Punkte. Hier folgt aus § 2 unmittelbar für beide Punktgruppen $\nu = 2$. In der Gruppe $\mathfrak{B}_d^4$ treten H' und K' als Punkte S_4 auf. Durch die Operation $\mathfrak{S}_d(\tau_z)$ wird der Punkt, der um τ_z über K' liegt, mit H' gleichwertig, ebenso mit K' der Punkt, der um τ_z über H' liegt. Jeder dieser vier Punkte stellt nach § 2 je einen VP dar, und wir finden für jede Punktgruppe $\nu = 2$.

Die Gruppen $\mathfrak{B}_d^6$, $\mathfrak{B}_d^7$, $\mathfrak{B}_d^8$ entstehen aus $\mathfrak{B}^6$ mit dem Gitter Γ_v' ; es muß sich also $\nu = 4$ ergeben. Für $\mathfrak{B}_d^6$ sind F_m und G' , ebenso H' und K' gleichwertig; für jedes dieser Punktepaare ergibt sich nach dem vorstehenden $\nu = 4$. Die Punkte S_4 von $\mathfrak{B}_d^7$ sind G_m , G_m' . Die zweizähligen Achsen der Grundfläche γ bedingen in ihr noch drei mit G_m gleichwertige Punkte; es sind Flächenpunkte, und so finden wir nach § 2, daß sie je einem VP äquivalent sind. Es ist, wie nötig, $\nu = 4$. Der Punkt G_m' liegt in der Mittelebene der Stammfigur, sie enthält noch drei mit G_m' gleichwertige Punkte, und da jeder ein VP ist, so ist wiederum $\nu = 4$. Bei der Gruppe $\mathfrak{B}_d^8$ endlich ist nur M_m ein Punkt S_4 . Wie in § 3 folgern wir, daß nur vier Oktanten von Π_0 einen zu M_m gleichwertigen Punkt enthalten, so daß sich wiederum $\nu = 4$ ergibt.

Die Gruppe $\mathfrak{B}_d^{10}$ mit dem Gitter Γ_v'' enthält die beiden Punktgruppen $F_m = G' = H' = K'$ und $G_m = G_m'$ als Punkte S_4 ; aus den Erörterungen über die Gruppen $\mathfrak{B}_d^6$, $\mathfrak{B}_d^7$, $\mathfrak{B}_d^8$ ergibt sich für beide der Wert $\nu = 8$.

Die Gruppen $\mathfrak{B}_d^{11}$ und $\mathfrak{B}_d^{12}$ entstehen aus den Gruppen $\mathfrak{B}^8$ und $\mathfrak{B}^9$ mit dem Gitter Γ_v''' ; für sie ist daher $\nu = 4$ zu erwarten. Die Gruppe $\mathfrak{B}_d^{11}$ besitzt $H' = K'$ als Punktepaar S_4 , nach den Betrachtungen von $\mathfrak{B}_d^4$ wird daher $\nu = 4$. Es bleibt noch $\mathfrak{B}_d^{12}$ zu erledigen; für sie stellen $Q' = Q''$ das

Punktepaar S_4 dar. Wir bestimmen zunächst die zu ihm gleichwertigen Punkte auf den Seitenflächen α und α' von p . Die Schnitte von α , α' mit der Stammfigur Π_0 zeigt Figur 255, die feinen Linien stellen die Kanten von p und der übrigen drei Oktanten dar. Der Punkt Q' geht durch Umschraubung um die Achse u_1 in den ihm gleichwertigen Punkt Q'_1 über, analog Q'' in Q'_1'' ; durch Ausübung der Translation OM entsteht aus Q' noch Q_2' und aus Q_2' durch Umschraubung um u endlich $Q_3'^1$; analog gehen aus Q'' noch Q_2'' und Q_3'' hervor. Damit sind alle mit Q' und Q'' gleichwertigen Punkte auf α und α' vorhanden. Jeder von

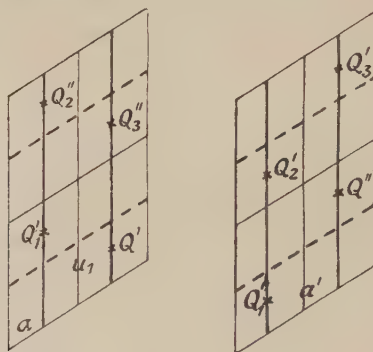


Fig. 255

ihnen hat den Wert eines VP , und so ergibt sich $\nu = 8$, statt des oben angegebenen Wertes $\nu = 4$. Die Erklärung ist bereits in Kap. XVI enthalten. Wir erkannten dort (S. 398), daß wir das in der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$ enthaltene Gitter als flächenzentriertes tetragonales Gitter Γ_q'' aufzufassen haben. Dies ruhte auf dem Satz 2 von S. 381; die Richtungen der Translationen τ_x, τ_y, τ_z fallen nämlich nicht in die kürzesten Abstände der vierzähligen Achsen, wie bei Figur 87 (S. 186), sondern in die kürzesten Abstände der Achsen a, c und b, c , wie es der Achsenfigur 192 (S. 381) entspricht. Wir müssen also auch den Wert $\nu = 8$ erhalten.

¹⁾ u ist die obere Schraubenachse der Ebene α' .

Das zweite Beispiel sollen die Gruppen $\mathfrak{D}_4^{10}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ bilden; wir legen die Achsenfigur 217 (S. 409) und damit das flächenzentrierte Gitter Γ_q'' zugrunde. Für die Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ ist $N = 8$, und da das Gitter als flächenzentriert in Betracht kommt, $nv = 32$. In der Tabelle C (S. 434) sind nur Punkte der Eigensymmetrie V vorhanden, und zwar

$$O = G = H = K = M_m \text{ und } D = E = F = M.$$

Für sie ist $n = 4$, also $\nu = 8$. In der ersten Punktgruppe stellt jeder der Punkte O, G, H, K je einen VP dar. Da der Figur 217 die Achsenfigur von $\mathfrak{B}^7$ als Rahmen zugrunde liegt (S. 320), so folgern wir wie in § 3, daß es zu M_m in der Stammfigur Π_0 nur noch drei gleichwertige Punkte gibt; also wird, wie nötig, $\nu = 8$. Dasselbe folgt aber auch für die Punktgruppe D, E, F, M ; zu ihr tritt noch der in § 3 eingeführte Punkt N_m hinzu, und wir finden wiederum $\nu = 8$.

Für die Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$ und $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ ist $N = 16$, also $nv = 64$. Bei $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$ haben wir zunächst die Punkte C_2^h der Tabelle (S. 436) in Betracht zu ziehen; für sie ist $n = 4$. Die Tabelle enthält die gleichwertigen Punkte $M_m' = M''' = N'' = N''''$. Nach § 3 sind nur in vier Oktanten p solche Punkte enthalten, und wir finden $\nu = 16$. Für die Punkte der Symmetrie V^a gilt, was wir soeben bei der Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$ für die Punkte der Symmetrie V ableiteten; da jetzt $n = 8$ ist, folgt wieder, wie nötig, $\nu = 8$. Es bleiben noch die Punkte der Symmetrie C_2^v zu betrachten. Ein auf einer Achse c gelegener Punkt P bedingt zunächst auf c selbst noch einen zweiten mit P gleichwertigen Punkt, nämlich sein Spiegelbild gegen die Mittelebene von Π_0 . Nun enthält der Oktant p die vier vertikalen Kanten als gleichwertige Achsen c und außerdem eine im Innern, und auf jeder Achse ein Punktpaar. Das gibt insgesamt die geforderten

$$4 + 4 + 8 = 16 VP.$$

In der Gruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ treten nur Punkte der Symmetrien V und S_4 auf; für beide ist $n = 4$, also muß sich $\nu = 16$ ergeben. Die Punkte V sind die gleichen wie bei $\mathfrak{D}_4^{10}$; nur werden die beiden für $\mathfrak{D}_4^{10}$ ungleichwertigen Punktgruppen hier gleichwertig. Das liefert, wie nötig, $\nu = 16$. Die in $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ auftretenden

den Punkte S_4 sind dieselben, die wir oben bei der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{10}$ betrachteten; dort zerfielen sie in zwei ungleichwertige Punktgruppen, hier sind sie alle gleichwertig und wir finden auch für sie $\nu = 16$.

§ 5. Gleichwertige Punkte bei rhomboedrischen und hexagonalen Gruppen. Es soll sich im wesentlichen nur darum handeln, die Eigenart des hexagonalen Gitters und der Achsenfiguren an einigen Beispielen darzulegen.

Das erste Beispiel sei die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^1$ (S. 364). Für sie ist $N = 12$, also $n\nu = 12$. Die Tabelle A von S. 368 enthält als Punkte C_2^h die beiden Tripel $D = E = G$ und $D' = E' = G'$; jeder von ihnen stellt gemäß § 2 einen VP dar, und da $n = 4$ ist, so folgt beidemal $n\nu = 12$. Für die Punkte C_3^v ist $n = 6$, also muß $\nu = 2$ sein. Von solchen Punkten enthält die Achsenfigur 181 (S. 360) nur einen auf der Achse a ; er bedingt auf a noch einen weiteren gegen den Punkt F symmetrisch gelegenen Punkt; ferner gehen Achsen a nur durch die Ecken des in der Ebene γ enthaltenen gleichseitigen Netzes, und wir finden daher in der Tat $\nu = 2$. Von Punkten der Symmetrie D_3 gibt es die zwei Paare $B = C$ und $B' = C'$; wegen $n = 6$ muß sich wiederum $\nu = 2$ einstellen. Von den Punkten B und C zählt jeder als ein VP, in der ebenen Stammfigur $OLMN'$ (S. 351) des hexagonalen Netzes sind andere ihnen gleichwertige Punkte nicht vorhanden, und so folgt $\nu = 2$. Das gleiche folgt analog für das Paar B', C' . Endlich haben wir für die Punkte O und F der Symmetrie D_3^d unmittelbar $\nu = 1$, $n = 12$, $n\nu = 12$.

Als zweites Beispiel behandeln wir die hexagonalen Gruppen $\mathfrak{D}_{6h}^3$ und $\mathfrak{D}_{6h}^4$ (Fig. 229). Für sie ist $N = 24$, also $n\nu = 24$. Die Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^3$ besitzt in F_m einen Punkt der Symmetrie D_3^d ; für ihn ist $n = 12$, also muß $\nu = 2$ sein. In der Tat ist mit F_m noch der Punkt gleichwertig, der um τ_z über F_m liegt, und jeder von beiden stellt einen VP dar. Außerdem treten in $\mathfrak{D}_{6h}^3$ noch drei Punktepaare der Symmetrie D_3^h auf, O, F, B, C' und B', C (S. 457). Jeder dieser Punkte zählt, wie wir eben sahen, als je ein VP, weitere ihnen gleichwertige Punkte sind in der Stammfigur nicht vorhanden, und so ergibt sich für jedes dieser

drei Punktpaare, wie nötig, $\nu = 2$. In der Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^4$ zählen O und F als je ein VP , für F'_m folgt, wie eben, daß $\nu = 2$ ist, endlich stellen auch B, C, B', C' je einen VP dar, so daß für diese Punktgruppe $\nu = 4$ ist, in Übereinstimmung mit den Werten $n = 12$ und $n = 6$. Was endlich die Punkte C_2^h betrifft, so zählt jeder der Punkte H', K', G' von $\mathfrak{D}_{6h}^3$ für zwei, und jeder der Punkte D, E, G, H, K, M von $\mathfrak{D}_{6h}^4$ für einen VP , was beidemale den Wert $n\nu = 24$ liefert.

§ 6. Gleichwertige Punkte bei den kubischen Gruppen.

Eine erste Betrachtung betrifft ihre dreizähligen Achsen. Sie sind sämtlich untereinander gleichwertig, wie in den Tabellen A und B von S. 490 und 496 zum Ausdruck kommt. Sie sind aber, wie bei den Punktgruppen, teils *einseitig*, teils *zweiseitig*, einseitig für T und T^a , zweiseitig für T^h , O und O^h . Die Achsenhälften zerfallen also bei T und T^a in zweimal vier gleichwertige, und zwar sind einerseits die von der Mitte des Tetraeders nach den Ecken laufenden Richtungen gleichwertig, andererseits auch die umgekehrten. Für die Gruppen T^h , O , O^h sind alle acht Hälften gleichwertig. Ein Punkt P , der beliebig auf einer Achse d angenommen wird, bedingt daher für T und T^a vier gleichwertige Punkte, für T^h , O , O^h aber acht. Dies überträgt sich unmittelbar auf solche Stellen der Raumgruppen, denen eine kubische Symmetriegruppe zukommt.

Das zweite Beispiel sollen die Punkte der Symmetrie S_4 der Gruppen $\mathfrak{T}_a$ bilden. Für sie ergibt sich aus Kap. XVIII das folgende. Punkte der Symmetrie S_4 treten bei den Gruppen $\mathfrak{T}_a^3$, $\mathfrak{T}_a^4$, $\mathfrak{T}_a^5$, $\mathfrak{T}_a^6$ auf (S. 490). Die Gruppe $\mathfrak{T}_a^4$ besitzt die Punktgruppen D_m , E_m , F_m und G', G'', G''' als gleichwertige Punkte S_4 . Das Gitter von $\mathfrak{T}_a^4$ ist Γ_c ; es ist $N = 24$, $n = 4$, also $\nu = 6$. Jeder der vorstehenden sechs Punkte bedingt in der Stammfigur Π_0 zwei VP , daher findet sich für beide Punktgruppen $\nu = 6$. Die Gruppe $\mathfrak{T}_a^3$ enthält die sechs gleichwertigen Punkte $H', K', H'', K'', H''', K'''$; es ergibt sich daher $\nu = 12$, was dem körperzentrierten Gitter Γ_c'' entspricht. Für $\mathfrak{T}_a^5$ sind alle Kantenmitten und alle Flächenmitten des Würfels w Punkte S_4 ; es sind die Punkte, die aus denen der Gruppe $\mathfrak{B}_a^{10}$ zyklisch entstehen. Für $\mathfrak{B}_a^{10}$ hatten wir $\nu = 8$, hier wird also $\nu = 24$, wie es das Gitter Γ_c' verlangt.

Bei der Gruppe $\mathfrak{T}_d^6$ treten $Q', Q'', R', R'', S', S''$ als Punkte S_4 auf; es sind die, die aus den Punkten von $\mathfrak{B}_d^{12}$ zyklisch hervorgehen. Für $\mathfrak{B}_d^{12}$ stellten Q' und Q'' zusammen 8 VP dar, wir finden daher $\nu = 24$, also $n\nu = 96$, während das kubische Gitter von $\mathfrak{T}_d^6$ das körperzentrierte Gitter Γ_c'' ist. Wir stoßen also auf die gleichen Verhältnisse wie bei der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$ und auch auf die gleiche Erklärung. Die vertikalen vierzähligen Achsen zweiter Art von $\mathfrak{T}_d^6$ sind die Achsen w , die Translationen τ_x, τ_y, τ_z fallen also in die nächsten Abstände der vierzähligen Achsen, und wir haben daher, wenn wir die vierzähligen Achsen und ihre Punkte S_4 betrachten, das Gitter von $\mathfrak{T}_d^6$ als Sonderfall des Gitters Γ_q'' aufzufassen¹⁾.

Endlich sollen einige Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_h$ erörtert werden, zunächst die Gruppe $\mathfrak{D}^3$ mit dem flächenzentrierten Gitter Γ_c' . Es ist $N = 24$, also $n\nu = 96$. In der Tabelle B von S. 496 treten Punkte der Symmetrie V , der Symmetrie T und der Symmetrie O auf. Die gleichwertigen Punkte V sind $G_m, G_m', H_m, H_m', K_m, K_m'$. Jeder von ihnen bedingt mit den vierzähligen Achsen der Fläche, in der er liegt, noch drei weitere Punkte, alle zählen als je ein VP, und so finden wir $\nu = 24$, $n\nu = 96$. Für den Punkt M_m der Symmetrie T ist $n = 12$; für die Gruppe $\mathfrak{D}^3$ findet sich aber in jedem Oktanten w ein zu M_m gleichwertiger Punkt. Für die, die an w längs einer Kante angrenzen, folgt es wie bei jedem flächenzentrierten Gitter, für die übrigen wird es dadurch bedingt, daß die Achse b eine vierzählige Schraubenachse mit der Translation τ_z ist, also ist wieder $n\nu = 96$. Endlich stellt jeder der Punkte O, G, H, K , und ebenso D, E, F, M je einen VP dar, und so ergibt sich für diese Punkte der Symmetrie O in beiden Fällen $n = 24$, $\nu = 4$, $n\nu = 96$.

Die Gruppe $\mathfrak{D}^4$ enthält ebenfalls das flächenzentrierte Gitter Γ_c' . Von Punktlagen mit Eigensymmetrie sind nur solche der Symmetrie T und D_3 vorhanden. Die Punkte der

¹⁾ Für Punkte, die mit den vierzähligen Achsen nicht zusammenhängen, gilt dies nicht. Zu jedem Punkt der dreizähligen Achse des Oktanten w gibt es in w noch einen gleichwertigen Punkt, der Operation $\mathfrak{S}_d(\tau_d)$ entsprechend; insgesamt also 16, so daß $n\nu = 48$ wird.

Symmetrie T zerfallen in zwei ungleichwertige Gruppen; O, G, H, K, M_m bilden die eine, D, E, F, M die andere, ebenso wie bei der in § 5 behandelten Gruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$, die in $\mathfrak{D}^4$ als Untergruppe enthalten ist. Wie dort ist jede dieser beiden Punktgruppen mit 8 VP äquivalent; zu den Punkten D, E, F, M treten noch die vier Punkte N_m . Punkte der Symmetrie D_3 enthält die Tabelle B vier gleichwertige; da der Oktant w bei der Gruppe $\mathfrak{D}^4$ nur mit drei andern Oktanten des Würfels W gleichwertig ist, so erhalten wir $\nu = 16$ solcher Punkte. Eine analoge Gruppe von 16 solchen Punkten erfüllt die andern vier Oktanten.

In den beiden Gruppen $\mathfrak{D}^8$ und $\mathfrak{D}_h^{10}$ ist das körperzentrierte Gitter I_c'' enthalten; für $\mathfrak{D}^8$ haben wir $N = 24$ und für $\mathfrak{D}_h^{10}$ ist $N = 48$, daher ergeben sich für ν für die eine und die andere Gruppe die Werte $\nu = 48$ und $\nu = 96$. In $\mathfrak{D}^8$ treten Punkte der Symmetrie V und D_3 auf. Die Punkte V sind die Punkte $Q_1 = R_1 = S_1$ und $Q_2 = R_2 = S_2$. Jeder dieser sechs Punkte stellt vier gleichwertige VP dar; dies folgt ebenso, wie das analoge Resultat für die Punkte Q', Q'' der Symmetrie S_4 bei der Gruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$ (S. 528). Wir erhalten also für jede der beiden Punktgruppen 12 VP , wie es dem Wert $n = 4$ entspricht. Die Punkte M_m' und M_m'' der Symmetrie D_3 sind VP ; alle acht Oktanten, in die der Würfel W zerfällt, enthalten solche Punkte, außer w also auch diejenigen, die an w in einer Kante angrenzen, und in die w durch Umschraubung um die auf α, β, γ liegenden Achsen a, b übergeht (Fig. 242, S. 478). Wir finden daher $\nu = 8$, in Übereinstimmung mit dem Wert $n = 6$.

In der aus $\mathfrak{D}^8$ abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{D}_h^{10}$ treten Punkte der Symmetrie V, C_3^i, D_3, S_4 auf. Die Punkte V sind die gleichen wie bei $\mathfrak{D}^8$, nur mit dem Unterschied, daß die beiden Punkte-
tripel von $\mathfrak{D}^8$ für $\mathfrak{D}_h^{10}$ gleichwertig geworden sind; dies liefert jetzt den Wert $\nu = 24$. Die bei der Gruppe $\mathfrak{D}^8$ vorhandenen Punkte der Symmetrie D_3 verdoppeln sich ebenfalls; durch die erzeugende Inversion der Gruppe $\mathfrak{D}_h^{10}$ werden die beiden Punkte M_m' und M_m'' , die bei $\mathfrak{D}^8$ verschieden sind, zueinander gleichwertig. Dies liefert $\nu = 16$. Für die Punkte C_3^i ist $n = 6$,

also muß sich ebenfalls $\nu = 16$ ergeben. Von den Punkten O bis M stellt jeder je einen VP dar; der Punkt M_m bedingt acht, da jeder der acht Oktanten von W mit einem Punkt C_3^4 erfüllt ist, was die 16 VP ausmacht. Die Zahl der Punkte der Symmetrie S_4 kann man aus der Betrachtung der Gruppen $\mathfrak{B}_4^{12}$ entnehmen; jeder der sechs Punkte der Tabelle zählt wiederum für 4 VP , so daß sich $\nu = 24$ ergibt, in Übereinstimmung mit $n = 6$.

§ 7. Beispiele einzelner Strukturen. Für die soeben behandelte Beziehung zwischen Zahl, Lage und Eigensymmetrie der Bausteine sollen einzelne Strukturen als Beispiele vorgeführt werden. Doch beschränken wir uns auf einige einfachste Fälle, da es sich hier nur um eine vorbereitende Darlegung der allgemeinen Methoden und Gesichtspunkte handelt; eine umfassendere Erörterung bringen die beiden folgenden Paragraphen¹⁾.

1) *Diamant*. Das von W. L. Bragg mittels Röntgenuntersuchungen gefundene Strukturbild des Diamanten (*Diamantgitter*) entspricht der Gruppe $\mathfrak{D}_h^7$ und entspringt aus ihren gleichwertigen Punkten O, G, H, K, M_m der Symmetrie T^d . Die Zahl der gleichwertigen Punkte im unzentrierten Würfel W ist $\nu = 8$; in Übereinstimmung mit dem Resultat, das wir in § 6 für die Punkte der Symmetrie T der Gruppe $\mathfrak{D}^4$ ableiteten. Die eigentliche Stammfigur der Gruppe $\mathfrak{D}_h^7$ ist aber das durch die primitiven Translationen OG, OH, OK (Fig. 96) bestimmte Rhomboeder; in ihm liegen von den obigen acht Punkten nur zwei, nämlich O und M_m . Dieses Punktepaar bildet also (§ 2) die *Basis* der Struktur für das rhomboedrische Gitter.

Die charakteristische Eigenart der Diamantstruktur liegt einerseits in der Eigensymmetrie der Bausteine — es ist die Symmetrie T^d , die dem vierwertigen C-Atom zukommt — andererseits in dem Punkt M_m . Er ist nach Tabelle B (S. 496) mit dem Punkt O gleichwertig, und es enthalten, wie dies in

¹⁾ Von der Darstellung der Strukturbilder durch eine Figur wird im allgemeinen abgesehen; die einheitliche Punktbezeichnung gestattet es, an der Hand der Achsenfiguren die Struktur meist unmittelbar zu entwerfen; auch ist zugleich die den Atomen zukommende Eigensymmetrie durch sie gekennzeichnet.

§ 6 für die Gruppe $\mathfrak{D}^4$ ausgeführt ist, nur vier der Oktanten, in die der Würfel W zerfällt, einen mit M_m gleichwertigen Punkt. Insbesondere enthält die Strecke MO' der Würfeldiagonale keinen. Die Mitte M_m' von OM_m ist ein Symmetriezentrum für das in O und M_m vorhandene Paar (T', T'') von C-Atomen; durch M_m' gehen auch drei zweizählige Achsen, die dem Punkt M_m' für die Gruppe $\mathfrak{D}_h^7$ zukommende Eigensymmetrie ist D_3^d .

Hieran werde folgende geometrische Betrachtung angeknüpft. Das Punktepaar O, M_m oder das ihm entsprechende Atomenpaar T', T'' bildet, wie wir sahen, die Strukturbasis für das aus den drei Translationen OG, OH, OK bestehende rhomboedrische Gitter Γ_c' . Die Mitte des Paares bildet der Punkt M_m' . Aus diesem Paar geht nach Kap. XII, § 9 die gesamte Struktur hervor, wenn wir es allen Translationen des Gitters unterwerfen, und es bilden auch alle Stellen, an die die genannte Mitte M_m' kommt, ein Gitter Γ_c' . Die Struktur wird also auch erhalten, wenn man in jede Ecke des Gitters Γ_c' ein solches Paar $(T' T'')$ mit seinem Mittelpunkt parallel einsetzt (Fig. 256). Dabei erscheint freilich die Würfeldiagonale OO' ausgezeichnet; das gleiche gilt aber für jede Würfeldiagonale.



Fig. 256

Das Auftreten der für das C-Atom charakteristischen Eigensymmetrie T^d legt die Frage nahe, inwieweit man aus den Tabellen der kubischen Gruppen unmittelbare Anhaltspunkte für das Diamantgitter gewinnt, wenn man davon ausgeht, daß der Diamant holoedrisch kristallisiert und daß die C-Atome Punktlagen der Symmetrie T^d einnehmen. Um sie zu beantworten, haben wir zunächst alle Gruppen der Tabelle C zu ermitteln, in denen Punktlagen der Symmetrie T^d vorkommen; dies sind die Gruppen $\mathfrak{D}_h^4$, $\mathfrak{D}_h^5$ und $\mathfrak{D}_h^7$.

Die Gruppe $\mathfrak{D}_h^7$ ist die Gruppe der Bragg'schen Struktur.

Wie $\mathfrak{D}_h^7$, besitzt auch die Gruppe $\mathfrak{D}_h^5$ das flächenzentrierte Gitter Γ_c' , auch für sie ist also $\nu = 8$. Der Teilwürfel u enthält nur eine Punktlage der Symmetrie T^d , nämlich M_m ,

und *jeder* der acht Teilwürfel w enthält, wie in § 6 für die Gruppe $\mathfrak{D}^8$ gezeigt wurde und wie es dem Wert $\nu = 8$ entspricht, einen mit M_m gleichwertigen Punkt. Diese Punkte bilden daher ein gewöhnliches Würfelgitter. Die Abstände der nächsten C-Atome fallen mithin in die Kantenrichtungen des Würfels. Die Seitenflächen und Mittelebenen des Würfels sind bei $\mathfrak{D}_h^5$ Symmetrieebenen für das von den Punkten M_m gebildete Gitter, und daher liegen die C-Atome abwechselnd *spiegelbildlich gleich zu diesen Ebenen*. Alle diese Tatsachen stellen die Gruppe $\mathfrak{D}_h^5$ als unwahrscheinliches Gerüst des Diamantgitters hin. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}_h^7$ hingegen fallen die nächsten Abstände der C-Atome genau mit den Valenzrichtungen zusammen; zu jedem C-Atom gibt es in diesen Richtungen im gleichen Abstand ein weiteres C-Atom.

Die Gruppe $\mathfrak{D}_h^4$ endlich enthält das Gitter Γ_c , für sie ist $\nu = 2$, die gleichwertigen Punktlagen sind O und M , die zugehörigen Punkte bilden also ein körperzentriertes kubisches Gitter. Die Abstände der nächsten C-Atome fallen in die Körperdiagonalen; jedes C-Atom ist von acht anderen C-Atomen umgeben. Gleichwertig sind freilich (§ 6) nur je vier der von O und M ausgehenden halben Körperdiagonalen — insofern könnte man sich vorstellen, daß das in M befindliche C-Atom nur mit vier Würfecken, z. B. O, A', B', C' , gebunden sei. Es erscheint also auch an der Hand der Tabellen $\mathfrak{D}_h^7$ als die wahrscheinliche Gruppe¹⁾.

2) *Kochsalz* (NaCl). Die Struktur des Kochsalzes soll insbesondere zu dem Zweck erörtert werden, um an ihr den Einfluß einer kritischen Übersymmetrie aufzuzeigen.

Die kristallographische Punktgruppe des Kochsalzes ist die Gruppe O . Die von Bragg gefundene Struktur entspricht der

¹⁾ Von der Annahme ausgehend, daß die Valenzen der vierwertigen C-Atome und ihre gegenseitigen Bindungen die Struktur des Diamanten eindeutig bestimmen, hat bereits A. Nold ein Stück des Diamantgitters dargestellt — ohne freilich einen bindenden Beweis seiner Periodizität (also seines parallelepipedischen Aufbaues) zu geben. Vgl. Chemiker-Zeitung, Bd. 29 (1905), Nr. 14 und Zeitschr. f. Krist., Bd. 21 (1910), S. 323. Vgl. auch eine Darstellung des Verfassers in der Zeitschr. f. Krist., Bd. 54 (1915), S. 563.

kubischen Raumgruppe $\mathfrak{D}^3$, die Na-Atome sitzen in den Punkten O, G, H, K des Teilwürfels w , die Cl-Atome in D, E, F, M . Jedes der beiden Elemente erfüllt also die Ecken eines flächenzentrierten Gitters; beide Gitter zusammen bilden ein einfaches kubisches Gitter mit den Translationen τ_x, τ_y, τ_z , der Tatsache entsprechend, daß sich jedes Gitter in zwei solche flächenzentrierte Gitter auflösen läßt. Es ist $\nu = 4$; jedem Atom kommt gemäß Tabelle B (S. 496) die Eigensymmetrie O zu.

Geht man davon aus, daß dem Na- und Cl-Atom die Eigensymmetrie O zukommt und sucht in der Tabelle nach solchen Gruppen der Symmetrieklasse O , die geometrisch der Struktur von NaCl entsprechen können, so hat man Gruppen zu ermitteln, die *ungleichwertige* Punktlagen der Eigensymmetrie O enthalten. Außer $\mathfrak{D}^3$ ist auch $\mathfrak{D}^1$ eine solche Gruppe. Für sie sind O und M zwei ungleichwertige Punkte dieser Art, es ist für jede Atomart $\nu = 1$, die eine Atomart würde die Ecken, die andere die Zentra eines einfachen kubischen Gitters erfüllen; ihre nächsten Abstände fallen daher in die Diagonalen des Würfels. Die Tabelle liefert also zwei an sich geometrisch mögliche Strukturen.

Geht die Symmetrie *beider* Atome über die Symmetrie O hinaus, ist also jedem Atom aus irgend welchen Gründen die Symmetrie O^h beizulegen, so nimmt auch die Gesamtsymmetrie den Grad O^h an; die Struktur entspricht dann der Gruppe $\mathfrak{D}_h^5$. Die Symmetrie O^h für *beide* Atome stellt also eine *kritische Übersymmetrie* dar¹⁾.

3) *Salmiak* (NH_4Cl). Für die drei Arten von Atomen, die im Salmiak enthalten sind, haben wir drei *ungleichwertige* Arten von Punktlagen nötig. Folgende allgemeine Erwägung sei als typisch für derartige Betrachtungen vorausgeschickt. Betrachten wir eine dieser drei Punktarten, z. B. die Punkte, die von den N-Atomen eingenommen werden. Zu jedem einzelnen von ihnen muß dann auch jeder ihm gleichwertige Punkt vorhanden sein. Das bedeutet aber nicht, daß die N-Atome *nur* in gleichwertige Punktlagen fallen können, oder daß — all-

¹⁾ Die Frage, welcher Symmetrieklasse (O oder O^h) das Kochsalz definitiv zuzurechnen ist, bleibt hier außer Betracht; vgl. aber auch § 10.

gemeiner gesprochen — jede einzelne Atomart *nur* aus gleichwertigen Punktlagen bestehen muß.

Davon ausgehend wollen wir an der Hand der Tabellen *geometrisch mögliche* Strukturen des Salmiaks aufsuchen; die Beziehung zum Röntgenbild und sonstigen Erfahrungstatsachen bleibt dabei an dieser Stelle außer Betracht.

Wir finden, wenn wir uns auf die Gruppen der Symmetrie O beschränken, die Gruppen $\mathfrak{D}^3$ und $\mathfrak{D}^4$ der Tabelle A als geometrisch geeignete Strukturgruppen; dabei setzen wir insbesondere noch voraus, daß die Eigensymmetrie der N-Atome und der Cl-Atome eine kubische ist¹⁾. Beide Gruppen enthalten das flächenzentrierte Gitter I'_c , es ist also $N = 24$ und $n_V = 96$. Die gleichwertigen Punkte beider Gruppen sind in § 6 näher erörtert worden.

Die Gruppe $\mathfrak{D}^3$ enthält den Punkt M_m als Punkt der Symmetrie T und außerdem noch zwei verschiedene Punktgruppen der Symmetrie O ; die eine wird von den Punkten O, G, H, K gebildet, die andere von D, E, F, M . Für die Punkte der Symmetrie T ergab sich $\nu = 8$, für jede der beiden Punktgruppen der Symmetrie O war $\nu = 4$; *beide zusammen liefern also auch eine Punktgruppe mit dem Wert $\nu = 8$* . Außerdem haben wir im Würfel W noch 32 H-Atome nötig. Sie können auf den dreizähligen Achsen angenommen werden, die durch die Punkte M_m gehen und für die $n = 3$ ist. Von diesen Achsen sind gemäß § 6 nur je vier Halbachsen gleichwertig, und dies liefert für die acht Punkte M_m in der Tat 32 sie umgebende H-Atome. Der Abstand des H-Atoms vom Punkt M oder O kann an sich beliebig gewählt werden. In der Tat ist dies die Struktur, die von Bragg angegeben worden ist²⁾.

Die aus der Gruppe $\mathfrak{D}^4$ entspringende geometrisch mögliche Struktur ist die folgende. Die Gruppe $\mathfrak{D}^4$ enthält sowohl in O, G, H, K, M_m , wie auch in D, E, F, M, N_m gleichwertige Punkte der Eigensymmetrie T ; beide Punktarten sind aber voneinander verschieden. Jede von beiden entspricht dem Bau des

¹⁾ Vgl. auch die ausführlichere Betrachtung in § 9.

²⁾ Vor kurzem ist die Struktur von R. W. G. Wyckoff wieder gefunden worden; Am. Journ. of Science, Bd. 4 (1922), S. 469.

Diamantgitters, für jede ist $\nu = 8$, und es sind wiederum 32 H-Atome zwischen diese Atome einzufügen. Es kann wiederum so geschehen, daß die H-Atome in die dreizähligen Achsen gelegt werden. Mögen die N-Atome in die Punkte O, G, H, K, M_m fallen. Nun ist M_m' ein Punkt der Symmetrie D_3 ; wird also ein H-Atom an eine Stelle der Strecke OM_m gelegt, so bedingt es auf ihr im gleichen Abstand von M_m' noch ein zweites H-Atom. Ferner hat der Punkt M_m die Symmetrie T ; um M_m sind daher nur die vier Halbstrahlen gleichwertig, auf denen die Punkte M_m', M''', N'', N'''' liegen, und so enthält der Oktant w insgesamt 8 H-Atome. Mit dem Oktanten w sind noch drei andere Oktanten des Würfels W gleichwertig, und wir finden 32 H-Atome im Würfel.

4) *Graphit*. Über den Graphit haben Debye und Hull Untersuchungen angestellt ¹⁾. Hull legte ihm die Struktur bei, die aus der S. 521 beschriebenen hexagonalen Kugelpackung durch vertikale Dehnung hervorgeht; sie entspricht, wie dort angegeben, der Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^3$. In dieser Gruppe treten (S. 457) $B = C'$ und $B' = C$ je als ein gleichwertiges Punktepaar auf; jedes von ihnen liefert die Hullsche Struktur, wir wählen dafür das Paar $B = C'$. Die Basis der Struktur ist also zweipunktig ($\nu = 2$). Hull gibt als ihre Koordinatentripel 0, 0, 0 und $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ an, was dem Umstand entspricht, daß seine z -Achse nicht durch den Punkt O der Figur 229 (S. 452), sondern durch B geht. Die Ebenen γ und γ' sind Symmetrieebenen der Struktur, und die durch O gehende Achse a ist eine sechszählige Schraubenachse mit der Translation τ_z ; sie ist es, die die Gleichwertigkeit von B und C' bedingt. Der Punkt F_m ist ein Symmetriezentrum. Die Eigensymmetrie der Punktlagen B und C' ist die Symmetrie D_3^h ; sie also muß bei dieser Struktur den C-Atomen des Graphits eigen sein.

Nach den Untersuchungen von Debye kommt dem Graphit eine Struktur zu, die der des Diamanten ganz analog ist. Sie entsteht aus einem rhomboedrischen Gitter mittels einer *zwei-*

¹⁾ Phys. Zeitschrift, Bd. 18 (1917), S. 291. Phys. Review, Bd. 10 (1917), S. 678.

atomigen Basis ($\nu = 2$). Sie wird am einfachsten so erzeugt, daß man das unter 1) genannte gekoppelte Paar (T' , T'') von C-Atomen, oder genauer seine Mitte Z , wie beim Diamant, in alle Ecken eines rhomboedrischen Gitters einsetzt (Fig. 90, S. 190); das Gitter ist aber beim Graphit ein allgemeineres rhomboedrisches Gitter. Für die Struktur ergibt sich demgemäß die Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$. Das gekoppelte Paar von C-Atomen besitzt für den Punkt Z , wie beim Diamantgitter, die Symmetrie D_3^d ; diese Symmetrie entspricht bei der Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ gemäß Tabelle B von S. 368 den Ecken des rhomboedrischen Gitters. Die Analogie zum Diamantgitter ist also insofern eine vollständige; der Unterschied besteht nur in der Länge der in die dreizählige Achse fallenden Gittertranslation, sowie in der Entfernung der beiden Atome des Paares (T' , T''); sie beträgt beim Diamant $1/4$, beim Graphit $1/3$ dieser Translation.

Von Debye wird die Lage der beiden Atome T' , T'' so angegeben, daß eines in eine Rhomboederecke fällt. Es ist aber gruppentheoretisch besser, diese Lage auf die Achsengesamtheit zu beziehen; was man auch so aussprechen kann, daß man sich die Lage der rhomboedrischen Stammfigur am besten im Anschluß an die Achsenschaaren vorzustellen hat. Geschieht es so, daß Figur 90 die Stammfigur darstellt, so liegen die beiden Atome T' , T'' , von denen wir ausgingen, symmetrisch gegen den Punkt O ; insbesondere fällt also eines zwischen O und O_m ; es bedingt noch ein zweites zwischen O_m und O' , sodaß O_m die Mitte zwischen ihnen ist. Die den Atomen zukommende Eigensymmetrie ist jetzt die Symmetrie C_3^v , die drei Symmetrieebenen von C_3^v sind diejenigen des C-Atoms.

5) *Beziehungen der Diamant- und Graphitstruktur zu den Kugelpackungen.* Die Diamantstruktur, wie die Graphitstruktur, und zwar sowohl die Hüllsche, wie die Debyesche, haben nahe Beziehungen zu den dichtesten Kugelpackungen und lassen den Wert der an die Kugelpackungen anschließenden Bilder gut hervortreten. Wir knüpfen aber die Darstellung nicht an die Kugeln selbst an, sondern an ihre Mittelpunkte. Beim Diamant erfüllen die Punkte Z der gekoppelten C-Atome T' , T'' ein flächenzentriertes kubisches Gitter; sie stellen also

die Kugelmitten der S. 518 genannten dichtesten Kugelpackung dar. In drei übereinanderliegenden Ebenen bilden diese Punkte die Ecken der gleichseitigen Dreiecke (A) , (B) , (C) von S. 521. Der Abstand je zweier Ebenen ist $\frac{1}{3} d$, wenn d die Würfel-diagonale ist. Wir lösen nun die in Z gekoppelten Atomen-paare in jeder Ebene in die beiden Tetraeder T' und T'' auf, diese Tetraeder erfüllen dann zwei Ebenen, die wir die Ebenen (A') , (A'') , (B') , (B'') , (C') , (C'') nennen wollen. Da die Entfernung von T' und $T'' = \frac{1}{4} d$ ist, so folgen diese Ebenen so aufeinander, wie es Fig. 257 andeutet¹⁾; der Abstand der Ebenen $(A'')(A')$ ist $\frac{1}{4} d$, und der Abstand $(A')(B'')$ ist $\frac{1}{12} d$. Man kann nun noch die beiden in den Ebenen (A'') und (B') liegenden Dreieckspunkte zu einem sechs-eckigen Ring zusammenfassen; in seine Seiten fallen dann je zwei entgegengesetzte chemische Valenzen des C-Atoms hinein, und wir erhalten so die windschiefen Sechsecke, aus denen das Diamantgitter aufgebaut ist. Es sei noch hervorgehoben, daß das Diamantgitter dieses Bild senkrecht zu jeder der vier Würfel $diagonalen$ darbietet.

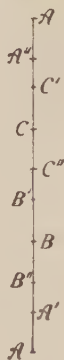


Fig. 257

Die Änderungen, die beim Debyeschen Graphit-gitter eintreten, rühren daher, daß erstens die Ecken des rhomboedrischen Gitters Γ_{rh} nicht mehr die Zentra einer dichtesten Kugelpackung bilden, und daß zweitens die Längen der Translationen (das Achsenverhältnis $c : a$) in bestimmter Weise gewählt wird. Zunächst sei daran erinnert, daß bei jedem rhomboedrischen Gitter, wie beim Gitter Γ_c' , in jeder horizontalen Netzebene die Ecken (A) , (B) , (C) ein gleichseitiges Netz bilden. Die Wahl $c : a$ geschieht nun so, daß die Ebenen (A'') , (B') , ebenso (B'') , (C') usw. *miteinander zusammenfallen*; dies wird so bewirkt, daß der Abstand $(T'T'') = \frac{1}{3} d$ gewählt wird, also gleich dem Abstand zweier Ebenen (A) , (B) , (C) . Die sechs Ebenen des Diamantgitters, die die sämtlichen C-Atome enthalten, reduzieren sich also hier auf drei; die windschiefen Sechsecke gehen in ebene Sechsecke über, und so erfüllen die

¹⁾ Die Figur gibt nur die Abstände der Ebenen an.

C-Atome in jeder der drei Ebenen (A), (B), (C) die unzentrierte Sechseckteilung, die Debye angegeben hat; es ist dieselbe, die Figur 97 (S. 212) zeigt. In allen drei Ebenen haben die Sechsecke verschiedene Lage; sie werden abwechselnd von den Punkten (A, B), (B, C) und (A, C) der Figur 254 gebildet. Beim Graphitgitter gilt dies aber nur für die *eine* in ihm ausgezeichnete Diagonale d . Die Abstände der nächsten C-Atome fallen in die Sechseckseiten und in *einseitige* zu den Netzebenen senkrechte Geraden, die Atome bilden also eine Figur der Symmetrie C_3^v , wie es der Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ entspricht.

Der Übergang vom Diamantgitter zur Hullschen Graphitstruktur geschieht so, daß die kubische dichteste Kugelpackung durch die hexagonale ersetzt wird, die der Gruppe $\mathfrak{D}_{6h}^3$ entspricht; die vertikale Translation erfährt außerdem noch die analoge Dehnung, wie bei der Debyeschen Struktur. Ein Unterschied beider Strukturen besteht weiter darin, daß beim Diamantgitter an die Stelle jedes Kugelzentrums die Mitte des Tetraederpaares ($T'T''$) eingesetzt wird, während im Hullschen Fall in jedes Kugelzentrum ein *einzelnes* C-Atom fällt. Dies bewirkt, daß in *beiden* Fällen die eigentliche Basis zweiatomig ist ($\nu = 2$). In der Stammfigur des hexagonalen Gitters folgen aber nur zwei Netzebenen mit gleichseitig gelagerten C-Atomen aufeinander, je im Abstand τ_z ; insofern hört also die Analogie zum Diamantgitter auf. Diese Ebenen sind Symmetrieebenen der Struktur, sie sind es daher auch für das C-Atom und seine Wirkungsweise. Die nächsten Abstände von zwei C-Atomen fallen in die Seiten der Netzdreiecke, so daß sich die Gruppe D_3^h als notwendige Eigensymmetrie für die in B und C' stehenden Atome einstellt, in Übereinstimmung mit der Tabelle von S. 457.

§ 8. Die Deutung des Strukturbildes. Beim Kochsalz (§ 7) wurde bereits der kritische Einfluß der Atomsymmetrie auf die Gesamtsymmetrie der Struktur hervorgehoben. Wir waren davon ausgegangen, daß den Na-Atomen und den Cl-Atomen die Eigensymmetrie O zukomme, und hatten erkannt, daß ein Ansteigen beider Atomsymmetrien auf die holodrische Symmetrie O^h auch der Struktur selbst die Symmetrie der

kubischen Holoedrie aufprägen würde. Dies führt auf die folgende verallgemeinerte Problemstellung. Anordnung der Bausteine im Strukturbild und ihre Eigensymmetrie sind die zwei Dinge, die für die Zurechnung einer Struktur zu einer bestimmten Raumgruppe und damit für ihre Symmetrie entscheidend sind. Die Anordnung wird aus dem experimentellen Röntgenverfahren erschlossen, über die Atomsymmetrie können wir nur Vermutungen hegen; ja es ist sogar damit zu rechnen, daß sie sich, je nach den Umständen, proteusartig verwandeln kann. Das C-Atom bildet dafür einen bestätigenden Beleg; seine Atomsymmetrie ist im Diamanten eine andere als im Benzolring und wohl auch im Graphit. Hieraus erwächst für die Theorie die Aufgabe, von der Annahme bestimmter Atomsymmetrien zunächst einmal abzusehen und vielmehr umgekehrt zu prüfen, welche Atomsymmetrien mit einem geometrisch gegebenen Strukturbild nach den Tabellen an sich vereinbar sind und in welcher Weise sie auf die Gesamtsymmetrie der Struktur einwirken. Alle derart vorhandenen Möglichkeiten sind aufzusuchen, und ihr Einfluß auf die Deutung des Strukturbildes zu prüfen. Die Anordnung setzen wir also als bekannt voraus, die zu ihr gehörige Gruppe und Symmetrie hingegen ist das, was in Frage steht. Diese Aufgabe soll an einigen Beispielen durchgeführt werden, zunächst für die Struktur des Diamanten¹⁾.

Die Struktur des Diamanten ist durch die Punkte O , G , H , K , M_m bestimmt (§ 7, 1); die ihr zugewiesene Gruppe ist die Gruppe $\mathfrak{D}_h^7$. Alle diese Punkte sind für die Gruppe $\mathfrak{D}_h^7$ gleichwertig. Es fragt sich, ob es noch andere kubische Gruppen gibt, die ebenfalls eine aus diesen Punkten erwachsende Struktur liefern. Dabei ist zu beachten, daß im Würfel W nur noch drei mit M_m gleichwertige Punkte liegen; es sind die Zentra der drei Oktanten, die an den Oktanten w von Fig. 239 (S. 476) längs einer Kante angrenzen, während die Zentra N_m der vier übrigen Oktanten nicht zur Struktur gehören; ebenso

¹⁾ Zahlreiche Beispiele enthalten die Arbeiten von Wyckoff im Journal of the Amer. Chem. Soc. und im Amer. Journ. of Science, besonders auch Bd. 4 (1922), S. 175.

sind die Punkte D, E, F, M als Strukturpunkte ausgeschlossen. Solche Gruppen gibt es in der Tat; es sind die Gruppen

$$\mathfrak{D}^4, \mathfrak{T}_h^4, \mathfrak{T}_d^2, \mathfrak{T}^2, \mathfrak{T}_d^1, \mathfrak{T}^1.$$

Mit Ausnahme der Gruppen $\mathfrak{T}_d^1$ und $\mathfrak{T}^1$, von denen wir zunächst absehen, besitzen alle diese Gruppen ein flächenzentriertes Gitter Γ_c' . Für die Gruppe $\mathfrak{D}^4$ haben die Punkte O, G, H, K, M_m sämtlich die Eigensymmetrie T , ebenso für $\mathfrak{T}_h^4$ und $\mathfrak{T}^2$; für $\mathfrak{T}_d^2$ haben sie die Eigensymmetrie T^d . Für $\mathfrak{D}^4$ und $\mathfrak{T}_h^4$ sind alle diese Punkte überdies gleichwertig, während es für $\mathfrak{T}_d^2$ und $\mathfrak{T}^2$ nicht der Fall ist, bei ihnen sind nur O, G, H, K gleichwertig. Der Übergang von $\mathfrak{D}^4$ und $\mathfrak{T}_h^4$ in $\mathfrak{D}_h^7$ geschieht also in der Weise, daß die Eigensymmetrie der Bausteine von T auf T^d steigt; der Übergang von $\mathfrak{T}_d^2$ in $\mathfrak{D}_h^7$ vollzieht sich so, daß die in O, G, H, K stehenden Atome mit dem Atom in M_m gleichwertig werden, und beim Übergang von $\mathfrak{T}^2$ in $\mathfrak{D}_h^7$ findet beides statt, sowohl die Steigerung der Atomsymmetrie, wie auch das Gleichwertigwerden der genannten Punktlagen. Daß es keine geometrischen Bedenken hat, die Struktur so aufzubauen, daß nicht alle in sie eingehenden Bausteine gleichwertig sind, wurde bereits in § 7 beim Salmiak erwähnt. Allen diesen Gruppen kann also der Diamant an sich zugezählt werden, wenn man *nur* seinen Aufbau in Betracht zieht.

Formal mögliche Gruppen sind auch die Gruppen $\mathfrak{T}_d^1$ und $\mathfrak{T}^1$. Beide besitzen ein unzentriertes Gitter; das Gitter ist aber aus dem Röntgenverfahren nicht mit bindender Gewißheit erschließbar. Dem Punkt O würde für sie die Eigensymmetrie $T^d(T)$ zukommen, den Punkten G, H, K die Eigensymmetrie $V^d(V)$ und dem Punkt M_m die Symmetrie $C_3^v(C)$; ist dies auch als unwahrscheinlich anzusehen, so durfte doch die Angabe dieser Gruppen aus Gründen der Vollständigkeit nicht fehlen.

Ein zweites Beispiel möge das Kochsalz bilden; wir wollen die in § 7 begonnene Erörterung hier vervollständigen. Wir haben alle kubischen Raumgruppen aufzusuchen, bei denen sich O, G, H, K einerseits und D, E, F, M andererseits als Strukturpunkte einstellen; beide Punktarten bilden je ein flächen-

zentriertes Gitter, sie müssen aber ungleichwertig sein. Solcher Gruppen gibt es eine ganze Reihe. An sich kommen auch die Gruppen $\mathfrak{D}_h^1$, $\mathfrak{D}^1$, $\mathfrak{T}_h^1$, $\mathfrak{T}_d^1$, $\mathfrak{T}^1$ in Frage; für sie liegen aber die Verhältnisse ähnlich, wie im vorigen Beispiel für $\mathfrak{T}_d^1$ und $\mathfrak{T}^1$, und es soll daher von ihnen abgesehen werden. Es bleiben dann noch

$$\mathfrak{D}_h^5, \mathfrak{D}^3, \mathfrak{T}_h^3, \mathfrak{T}_d^2, \mathfrak{T}^2$$

als diejenigen Gruppen, die zu der in § 7 genannten Anordnung des Kochsalzes führen. Die Gruppe $\mathfrak{D}^3$ ist die ihm in § 7 beigelegte, die Gruppe $\mathfrak{D}_h^5$ die durch Übersymmetrie entstehende. Bei der Struktur, die diesen beiden Gruppen entspricht, hat das Na-Atom, wie das Cl-Atom, die Eigensymmetrie O oder O^h ; für die aus $\mathfrak{T}_h^3$ entstehende Struktur ist sie T^h , und analog ist sie T^d und T für die aus $\mathfrak{T}_d^2$ und $\mathfrak{T}^2$ entstehenden. Jede dieser Auffassungen ist also geometrisch zulässig, je nach der Eigensymmetrie, die man den beiden Atomen beizulegen hat. In allen diesen Fällen kann die Struktur als Ineinanderstellung zweier gitterhafter Bravaischer Strukturen mit flächenzentriertem Gitter $\mathcal{I}_c'$ aufgefaßt werden.

§ 9. Bedeutung und Nutzung der Tabellen. Sei Γ eine Raumgruppe der Symmetrieklasse G . Eine zu ihr gehörige Struktur entsteht so (S. 514), daß man in alle Fundamentalbereiche die nämliche Basis an homologen Stellen einfügt. Die Basispunkte können sowohl allgemeine Lage besitzen, als auch eine spezielle, die mit Eigensymmetrie verbunden ist; in beiden Fällen besteht für ihren Ort im Fundamentalbereich nur die eine evidente Beschränkung, daß er keine kritische Übersymmetrie für sie bedingt. Hiervon abgesehen können die Atome an sich in jeder Lage im Fundamentalbereich vorhanden sein. Ihre Zahl wird durch die chemische Aufbauformel geregelt; die Struktur des Salmiaks z. B. muß aus gleich vielen N- und Cl-Atomen und der vierfachen Zahl der H-Atome bestehen. Ein weiteres wird — immer unter Vermeidung jeder Übersymmetrie — nicht gefordert. Der geometrische Zwang, der die Lage und Eigenart der Basis beherrscht, läßt also den kristallographischen Notwendigkeiten des tatsächlichen Aufbaues in breitester Weise Raum.

Das Ergebnis der experimentellen Forschung zeigt freilich vielfach einen wesentlich spezielleren Charakter. Zwei einander bedingende Besonderheiten haben sich herausgestellt. Die Zahl der Atome in der Stammfigur scheint einem *Streben nach der möglichsten Mindestzahl* zu folgen; in Übereinstimmung damit müssen die Atome selbst die Lagen *möglichst hoher Eigensymmetrie* bevorzugen. Zum Teil mag das so gefundene Resultat darauf beruhen, daß die bisher untersuchten Kristalle meist von hoher Symmetrie sind; es ist wohl denkbar, daß bei Kristallen geringerer Symmetrie, zumal bei solchen komplizierterer Zusammensetzung, auch Strukturen allgemeinerer Art angetroffen werden. Wie dem auch sei, der bisherige Stand der Dinge rückt die Strukturen mit atomistischer Eigensymmetrie in den Vordergrund der Untersuchungen. Zwei Fragen sind es, deren Beantwortung an die geometrische Theorie herantritt. Erstens, welche möglichen Strukturen sich auf Grund der Tabellen an sich erwarten lassen, wenn man die Symmetrieklasse des Kristalls als bekannt annimmt, und zweitens, welche geometrischen Auffassungen für eine aus dem Röntgenbild abgeleitete Struktur an sich möglich sind. Die zweite Frage ist soeben (§ 8) an einigen Beispielen behandelt worden; es mag genügen, auch die erste Frage an einem Beispiel zu erörtern und zwar an dem des Salmiaks¹⁾.

Wie schon hervorgehoben, verlangt die Theorie der regelmäßigen Anordnung nur, daß zu jedem Baustein auch alle ihm geometrisch gleichwertigen vorhanden sind; sie verlangt *nicht*, daß alle chemisch gleichen Atome auch geometrisch gleichwertig sind. Ob dem kristallographische Bedenken entgegenstehen, kommt hier nicht in Frage; der leitende Gesichtspunkt dieser Schrift kann auch an dieser Stelle nur sein, alle Probleme, die an sich einmal praktische Bedeutung erlangen können, methodisch und erschöpfend zu klären.

Um diese Aufgabe für den Salmiak zu behandeln, haben wir davon auszugehen, daß seine Struktur einer Gruppe der Symmetrieklasse *O* entsprechen soll. Wir knüpfen zunächst an

¹⁾ Das Beispiel hat freilich den Mangel, daß die H-Atome im Röntgenbild nicht sichtbar sind.

die beiden in § 7 schon genannten Strukturen an; die erste entstand mittels der Gruppe $\mathfrak{D}^3$, die zweite mittels $\mathfrak{D}^4$. Wir bezeichnen die Atomzahl in der unzentrierten Stammfigur und den Grad der Atomsymmetrie für die Elemente Cl, N, H im folgenden durch

$$\nu, \mu, \lambda, n, m, l$$

und durch $N = 24$ den Grad der Symmetrieklasse O . Da $\mathfrak{D}^3$ und $\mathfrak{D}^4$ das Gitter I_1' besitzen, so sind bei ihnen in der unzentrierten Stammfigur $4N = 96$ Bausteine allgemeiner Lage enthalten.

Bei der aus $\mathfrak{D}^4$ erwachsenen Struktur fielen die Cl- und N-Atome in je acht gleichwertige Punkte der Symmetrie T , dargestellt durch O, G, H, K, M_m und D, E, F, M, N_m , wir haben daher die Beziehungen

$$\nu = \mu = 8, \quad n = m = 12,$$

aus ihnen folgt weiter

$$\lambda = 4\nu = 4\mu = 32; \quad l = 3,$$

und demgemäß fallen die H-Atome in 32 gleichwertige Lagen auf den dreizähligen Achsen; endlich ist noch

$$n\nu = m\mu = l\lambda = 96 = 4N.$$

Bei der Gruppe $\mathfrak{D}^3$ konnten wir $\nu = 8$ gleichwertige Atome N (oder Cl) in die Punkte M_m der Symmetrie T legen, die andern $\mu = 8$ Atome (Cl oder N) fielen in die Punkte O, D, E, F, G, H, K, M ; sie spalteten sich in

$$\mu = \mu' + \mu'' = 4 + 4, \quad (m' = m'' = 24)$$

Atome, die untereinander gleichwertig sind, und es war ebenfalls $\lambda = 32, l = 3$. In diesem Fall bestehen die Gleichungen

$$n\nu = \mu'm' = \mu''m'' = \lambda l = 4N = 96.$$

Sie drücken wiederum aus, daß zu jeder Atomart alle ihr gleichwertigen vorhanden sind. Alle N- und Cl-Atome zusammen bilden ein körperzentriertes Gitter.

In Verallgemeinerung hiervon gelangen wir zu der arithmetischen Aufgabe, für jede Gruppe $\mathfrak{D}$ Zerlegungen

$$\nu = \nu' + \nu'' + \dots$$

$$\mu = \mu' + \mu'' + \dots$$

$$\lambda = \lambda' + \lambda'' + \dots$$

in der Weise zu suchen, daß

$$\lambda = 4\mu = 4\nu$$

ist, und daß die Zahlenwerte ν' , ν'' , . . ., μ' , μ'' , . . ., λ' , λ'' . . . gewissen Punktgruppen mit Eigensymmetrie entsprechen. Alle solchen Lösungen sind aufzusuchen, und alle Gruppen $\mathfrak{D}$ unter diesem Gesichtspunkt zu prüfen. Das Resultat ist, daß sich eine ganze Anzahl solcher Lösungen einstellt; jede liefert eine geometrisch mögliche Struktur für den Salmiak.

1) Die Gruppe $\mathfrak{D}^2$. Ihr Gitter ist Γ_c . Sie enthält zweimal ⁱⁱ sechs gleichwertige Punkte der Symmetrie V , nämlich D, E, F, G, H, K und $H', K', H'', K'', H''', K'''$. Dies liefert

$$\nu = \mu = 6, \quad n = m = 4, \quad n\nu = \mu m = 24,$$

und es folgt

$$\lambda = 24, \text{ also } l = 1;$$

das H-Atom kann also in einen Punkt allgemeiner Lage gelegt werden. Alle H-Atome sind gleichwertig; je sechs von ihnen liegen um die vier Punkte M_m der Symmetrie D_3 herum. Die Punkte H', K' . . . bilden die Mitten des von D, E, F, G, H, K gebildeten windschiefen Sechsecks.

2) Die Gruppe $\mathfrak{D}^5$. Wir können aus ihr eine Struktur gewinnen, die den Gleichungen

$$\nu = 8, \quad \mu = \mu' + \mu'' = 2 + 6, \quad \lambda = \lambda' + \lambda'' = 16 + 16$$

entspricht. Die acht Punkte M_m der Symmetrie D_3 bilden die Gruppe $\nu = 8$, für die also $n = 6$ ist, die μ -Punkte setzen sich aus den $\mu' = 2$ Punkten O und M der Symmetrie O und den $\mu'' = 6$ Punkten D, E, F, G, H, K der Symmetrie D_4 zusammen. Endlich spalten wir die $\lambda = 32$ H-Atome in $\lambda' + \lambda'' = 16 + 16$ Atome, die in die dreizähligen Achsen fallen, für die also $l' = l'' = 3$ ist. Dann haben wir in der Tat

$$\nu n = \mu' m' = \mu'' m'' = \lambda' l' = \lambda'' l'' = 2N = 48,$$

wie es dem körperzentrierten Gitter von $\mathfrak{D}^5$ entspricht. Die N- und Cl-Atome bilden je ein kubisches Gitter, beide zusammen ein körperzentriertes. Wesentlich für diese Struktur ist, daß die H-Atome ungleichartig zu den Punkten O, M, D, E, F, G, H, K und den Punkten M_m liegen. Jeder Oktant w des Würfels W enthält einen Punkt M_m , eine durch ihn gehende Diagonale und auf ihr zwei H-Atome in gleichem Abstand von M_m . Von den übrigen 16 H-Atomen liegen je 8 in gleicher Weise um O und M herum; während um die Punkte D, E, F, G, H, K keine H-Atome liegen.

3) Die Gruppe $\mathfrak{D}^8$. Sie enthält zweimal acht gleichwertige Punkte der Symmetrie D_8 ; die einen durch M_m' , die andern durch M_m'' dargestellt. In jedem Oktanten w liegt (S. 533) je einer. Wir dürfen also setzen

$$\nu = \mu = 8, \quad n = m = 6.$$

Demgemäß haben wir $\lambda = 32$, und können

$$\lambda = \lambda' + \lambda'' = 16 + 16, \quad l' = l'' = 3$$

setzen, so daß die H-Atome wieder sämtlich in die dreizähligen Achsen fallen, und zwar so, daß der Basis zwei ungleichwertige Punkte angehören. Der eine darf einen beliebigen Abstand von M_m' haben, der andere einen beliebigen Abstand von M_m'' . Die dreizähligen Achsen, die die Oktanten w durchziehen, sind windschief.

4) Die Gruppe $\mathfrak{D}^1$. Sie gibt zu zwei möglichen Strukturen Anlaß. Für die erste ist

$$\nu = \mu = 3, \quad n = m = 8, \quad \lambda = 12, \quad l = 2.$$

Die N- und Cl-Atome werden einerseits von den drei Punkten D, E, F , andererseits von G, H, K gebildet; die sechs Atome zusammen bilden also ein windschiefes Sechseck. Die H-Atome sind sämtlich gleichwertig und entstehen aus einem Basispunkt, der in irgendeine zweizählige Achse fällt; es ist also, dem unzentrierten Gitter Γ_c entsprechend,

$$\nu n = \mu m = \lambda l = 24 = N.$$

Die zweite mögliche Struktur entspricht den Werten

$$\lambda = \lambda' + \lambda'' = 6 + 6, \quad l' = l'' = 4;$$

sie ergibt sich mittels zweier ungleichwertiger H -Atome als Basis, die irgendwie in eine vierzählige Achse der Gruppe fallen.

5) Auch die Gruppe $\mathfrak{D}^4$ gibt noch zu einer zweiten möglichen Struktur Anlaß. Die entsprechenden Zahlenwerte sind

$$\nu = \mu = 16, \quad \lambda = \lambda' + \lambda'' = 32 + 32 = 64.$$

Die Gruppe enthält zweimal 16 gleichwertige Punkte der Symmetrie D_3 , die einen dargestellt durch den Punkt M_m' , die andern durch den analogen Punkt N' . Die acht Oktanten w zerfallen nämlich (S. 533) in zweimal vier, die je untereinander gleichwertig sind, und jeder Oktant enthält wiederum vier solche unter sich gleichwertige Punkte. Dies liefert die 16 Atome N und Cl; sie bilden zusammen die Ecken eines regulären Tetraeders; die Mitten dieser vier Tetraeder bilden wiederum ein reguläres Tetraeder. Es ist ferner

$$\nu n = \mu m = \lambda' l' = \lambda'' l'' = 4N = 96,$$

so daß $l' = l'' = 3$ ist, und in die Basis noch zwei ungleichwertige H-Atome eingehen, die beliebig auf einer dreizähligen Achse angenommen werden können.

6) Die Gruppen $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$. Diese beiden Gruppen sind enantiomorph, ihr Gitter ist I_c' . Jede von ihnen führt zu zwei möglichen Strukturen, sie seien für die Gruppe $\mathfrak{D}^6$ angegeben. Sie besitzt folgende zweimal vier Punkte der Symmetrie D_3 ; die einen dargestellt durch M_m' und die analogen Punkte der drei Oktanten, die an w längs einer Kante angrenzen, die andere durch die entsprechenden Punkte der vier übrigen Oktanten. Man hat also

$$\nu = \mu = 4, \quad n = m = 6, \quad \nu n = \mu m = 24.$$

Dies liefert $\lambda = 16$, man kann also setzen

$$\lambda = \lambda' + \lambda'' = 8 + 8, \quad l' = l'' = 3,$$

und hat daher die H-Atome auf den dreizähligen Achsen anzunehmen. Die Basis enthält zwei ungleichwertige H-Atome.

Eine zweite Lösung ist noch so möglich, daß

$$v = v' + v'' = 4 + 4, \mu = 8; \quad n' = n'' = 6, m = 3$$

ist. Die Cl-Atome bestehen dann aus den beiden eben genannten Gruppen der Symmetrie D_3 , während 8 N-Atome auf den dreizähligen Achsen liegen. Für λ hat man

$$\lambda = \lambda' + \lambda'' = 8 + 24,$$

so daß die H-Atome in acht Punkte der dreizähligen Achsen und in 24 Punkte allgemeiner Lage fallen würden.

Diese Darlegungen dürften die Art des Problems und die Lösungsmethode hinlänglich klären; es ist auch leicht, in jedem Fall die Lage aller Atome zum Würfel und die von ihnen gebildete Gesamtfigur sich anschaulich zu machen. Weiter ist klar, daß auch solche Lösungen möglich sind, bei denen die Cl- und N-Atome in eine vierzählige Achse fallen, und zwar an *beliebige* Ausgangslagen; von ihnen wird aber abgesehen. Auch die aus $\mathfrak{D}^2$ abgeleitete Struktur zeichnet sich übrigens schon durch niedere Symmetrieverhältnisse der drei Atomarten aus; immerhin haben in ihr die Cl- und N-Atome noch feste Lagen.

§ 10. **Schlußwort.** Die Atomsymmetrie ist für die Zuweisung der Struktur an eine Raumgruppe von wesentlicher Bedeutung. Für sie können sehr wohl Tatsachen von zwingender Natur vorliegen; von wesentlichem Gewicht werden ihre kürzesten Abstände sein, ihr elektronenhafter Aufbau und anderes mehr. So lange aber solche Anhaltspunkte fehlen, fehlt der Deutung des Strukturbildes die Eindeutigkeit; die Symmetrieklasse, der es entspricht, bleibt schwankend. Vielleicht hat dies einen tieferen Grund. Auch die allgemeine empirische Feststellung der Kristallsymmetrie zeigt solche Schwankungen; sie erscheint verschiedenen chemischen oder physikalischen Einwirkungen gegenüber oftmals in verschiedener Weise. Sollten die Atome die Fähigkeit besitzen, verschiedenen Einwirkungen gegenüber eine verschiedene Symmetrie zu betätigen, so würde dies eine einfache Erklärung des verschiedenartigen Verhaltens liefern. Der Atomaufbau bliebe ein einheitlicher, und nur die Atomsymmetrie würde sich in wechselnder Weise zeigen. Diese

Vorstellung würde auch mit dem elektronenhaften Aufbau der Atome sehr wohl vereinbar sein.

So ergibt sich schließlich, daß die Tragweite der geometrischen Betrachtung ihre wohlgesteckten Grenzen hat. Der anschaulichen Erfassung und Durchdringung des Strukturaufbaues werden die Ergebnisse der geometrischen Theorie stets zu statten kommen; auch wird die Durchsuchung der Tabellen nach geometrisch geeigneten Strukturbildern für eine vorläufige Orientierung vielfach von Nutzen sein. Eine eindeutige Sprache sprechen die Tabellen freilich insofern nicht. Die wirkliche Ermittlung der Strukturbilder muß dem vorbehalten bleiben, was für die Erkenntnis der Naturerscheinungen in allen Fällen das Alfa und Omega bildet, *der direkten Befragung der Natur*.

Sachregister

- Achsen, gleichwertige 271
- Achsenfigur 270, 271
- Achsengruppe 145, 156
- Achtflächner 511
- Addition der Vektoren 113
- Asymmetrie Strukturen 516
- Aufbau, parallelepipedischer 259
- Aufzählung aller Drehungsgruppen 66
- Basis des Kristallgitters 524**
- Bravais'sche Strukturen 206, 260
- Deckoperation 47**
 - , erzeugende 247
- Deckschiebung 100
- Diamantgitter 543
- Diëdergruppe 56
- Drehung 3
- Drehungsachse 3
- , einseitige 70
- , zweiseitige 71
- Drehungsgruppe 55, 63
- Drehspiegelung 7
- Ebenenteilung 501**
- Ecke, singuläre 510
- Eigensymmetrie der Bausteine 265
- Einfach flächenzentriertes Gitter 140
- Erzeugungssatz für Gruppen erster Art 63
 - für Gruppen zweiter Art 79
 - für Raumgruppen 245, 254
- Eulerscher Satz 34
- Flächenzentriertes Gitter 141
- Fundamentalebene 513
 - der Gitter 504
 - der Netze 501
- Fußpunktenetz 172, 271
- Gesetz der rationalen Indizes 217, 238
- Gitterdiagonale 128
- Gittergerade 120
- Gleichwertige Punktlagen 523
 - — der hexagonalen Gruppen 530
 - — der kubischen Gruppen 531
 - — der rhombischen Gruppen 525
 - — der rhomboëdrischen Gruppen 530
 - — der tetragonalen Gruppen 526
- Gleitspiegelung 6
- Graphitgitter 539
- Gruppe erster Art 52
 - zweiter Art 71
- Grundgesetz, kristallographisches 258
- Hemiasymmetrie Strukturen 516
- Heptaparalleloeder 506
- Hexaparalleloeder 506
- Identität 11
 - von Punktgruppen 80
 - von Raumgruppen 256
- Inversion 6
- Isomorphe Operationen 45
- Isomorphie der Gruppen 240

- Kante, singuläre 510
- Kochsalzgitter 536
- Koordinaten gleichwertiger Punkte 92, 267, 269
- Körperzentriertes Gitter 142
- Kristallographisches Grundgesetz 258
- Kristallsysteme 91
- Kritische Punktlagen 264, 289, 345, 370, 440, 459
- Kubooktaeder 505
- Kugelpackungen 516
 - , dichteste 518
 - , dichteste hexagonale 521
- Netzdiagonale 126
- Netzebene des Gitters 124, 239
- Netzgerade 112
- Oktaedergruppe 59
- Operationen, isomorphe 45
 - , reduzierte 244
 - , vertauschbare 19
 - , zusammengesetzte 8
 - zweiter Art 5
- Paralleloeder 506
- Parallelepipedischer Aufbau 259
- Polyeder, symmetrische 67
- Potenzen von Drehspiegelungen 22
 - von Drehungen 9
 - von Gleitspiegelungen 24
 - von Schraubungen 24
- Primitives Dreieck 132
 - Parallelepiped 137
 - Parallelogramm 135
 - Tetraeder 135
 - Translationenpaar 127
 - Translationentripel 128
- Produkte von Operationen 12
- Punktgitter 128
 - , einfach flächenzentriertes 140
 - , flächenzentriertes 141
 - , hexagonales 168
 - , körperzentriertes 142
- Punktgitter, kubisches 172
 - , monoklines 155
 - , rhombisches 162
 - , rhomboedrisches 169
 - , symmetrisches 189
 - , tetragonales 171
 - , zentriertes 142
- Punktlagen, gleichwertige 523
- Punktnetz 109
 - , gleichseitiges 150
 - , quadratisches 149
 - , rechtwinkliges 139, 148
 - , rhombisches 139, 148
 - , seitenzentriertes 140
 - , symmetrisches 144
 - , zentriertes 138
- Punktreihe 105
- Raumgruppe 214
 - mit irrationalen Winkeln 226
- Raumteilung, regelmäßige 514
- Rhombendodekaeder 505
 - , verlängertes 512
- Salmiakgitter 537
- Schraubung 4
- Sechsfächner 511
- Seitenzentriertes Punktnetz 140
- Singuläre Ecke 510
 - Kante 510
 - Zone 510
- Spiegelung 6
- Stammfigur 109, 118
- Stereoeder 514
- Struktur 257
 - , asymmorphie 516
 - , hemisymmorphie 516
 - , symmorphie 516
- Symmetrieachse 48
 - , zweiter Art 48
- Symmetrieebene 48
- Symmetriegesetz 215, 238
- Symmetriegruppe des Gitters 162
- Symmetriezentrum 48

- | | |
|--|--|
| <p>Tabellen der hexagonalen Gruppen 457</p> <p>— der kubischen Gruppen 490, 496</p> <p>— der monoklinen Gruppen 285, 288</p> <p>— der rhombischen Gruppen 342, 344</p> <p>— der rhomboedrischen Gruppen 365, 367, 368</p> <p>— der tetragonalen Gruppen 423, 424, 434</p> <p>Tetraedergruppe 57</p> <p>Tetraparalleloeder 506</p> <p>Transformierte Drehung 60</p> <p>— Operation, allgemeinste 218</p> <p>— — zweiter Art 78</p> <p>Translation 3</p> <p>—, primitive 125</p> <p>Translationengruppe 106</p> <p>— der Raumgruppen 236</p> | <p>Translationengruppe, ebene 116</p> <p>—, räumliche 123</p> <p>Triparalleloeder 506</p> <p>Übersymmetrie 265</p> <p>Umwendungsachse 4</p> <p>Untergruppe 91</p> <p>Vertauschbare Operationen 19</p> <p>Vierergruppe 57</p> <p>Vierzehnflächner 505, 507</p> <p>Vollpunkt 525</p> <p>Windungssinn 5</p> <p>Zone der Paralleloeder 509</p> <p>—, singuläre 510</p> <p>Zusammengesetzte Operation 8</p> <p>Zwölfflächner 512</p> <p>Zyklische Gruppe 55</p> <p>— — zweiter Art 82</p> |
|--|--|
-

TO 351 LeConte Hall

642-3122

LOAN PERIOD 1

2

3

QUARTER

4

5

6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS
Overdue books are subject to replacement bills

DUE AS STAMPED BELOW

DEC 8 1985

JUL 24 2000

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

FORM NO. DD 25, 2.5m, 12/80 BERKELEY, CA 94720

Ⓟ

U.C. BERKELEY LIBRARIES



C032776812

911
542

PHYSICS
LIBRARY

LIB. OF CALIFORNIA
WITHDRAWN

APR 2 1982
rebind

APR

-023

